

Soulsby no. 2598, p. 66–84 ('Histoire' section) ✓

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXVIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXI.

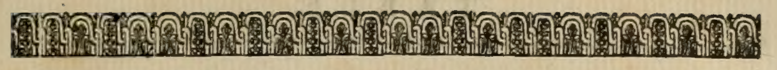


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

BOTANIQUE.

MINÉRALOGIE.

CHIMIE.

ASTRONOMIE.

MÉCANIQUE.

HYDRODYNAMIQUE.

ANALYSE.

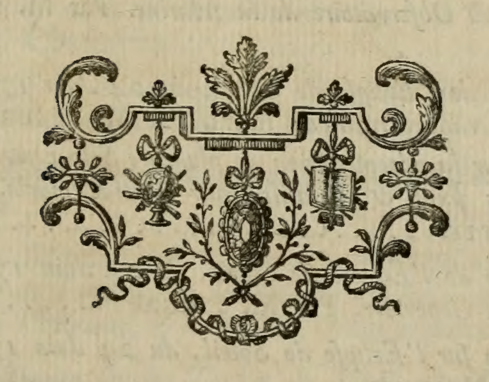
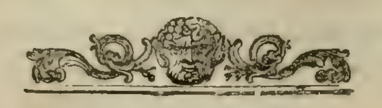


TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

FAUTE à corriger dans ce Volume.

HISTOIRE, page 65, ligne 25, a perdus; *lisez* aura perdus,



HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXVIII.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR LE FROID DE 1767.



CE Mémoire auroit dû être inséré parmi ceux de l'Académie pour l'année 1767 : l'Auteur le fait paroître aujourd'hui, parce qu'il a cru qu'il pourroit être utile pour compléter la suite des observations d'hivers rigoureux, observations qui, depuis 1776, ont attiré l'attention des Physiciens. V. les Mém. p. 425.

Il a obſervé en même temps avec des thermomètres, ſoit placés contre des murs au nord ou au midi, ſoit iſolés en plein air, mais expoſés de tous côtés ou mis à l'abri du Soleil: par ce moyen, il a pu déterminer la différence que l'expoſition, les abris doivent mettre dans le degré abſolu du froid, & dans ſes variations diurnes. L'Auteur a obſervé auſſi les effets du froid ſur les animaux, & principalement ſur les plantes; c'eſt à celles du genre des blés qu'il s'eſt arrêté le plus: il en avoit en expérience d'un grand nombre d'eſpèces & de variétés ſemés à différentes époques. Il réſulte de ces expériences, que les blés ſemés au mois d'Octobre ont moins ſouffert de ce froid arrivé vers la mi-Janvier, que ceux qui avoient été ſemés plus tôt ou plus tard : or comme cette époque eſt la plus commune pour les grands froids, on voit que c'eſt dans celle du mois d'Octobre qu'il faut de préférence ſemer les blés d'hiver. Ce Mémoire n'eſt qu'une très-petite partie d'un Ouvrage très-étendu ſur les variations de l'atmoſphère, dont M. Adanſon s'occupe depuis long-temps, avec une ſuite & une attention infatigables.







ANATOMIE.

SUR LE MÉCANISME DE LA RESPIRATION.

M. SABATIER décrit dans ce Mémoire, les différens mouvemens que les côtes exécutent pendant la reſpiration, & l'action des muſcles qui les font mouvoir. V. les Mém. p. 347.

Toutes les côtes ne s'élèvent pas dans l'inſpiration, comme la plupart des Anatomiſtes l'avoient ſuppoſé : les ſupérieures montent tandis que les inférieures deſcendent; celles du milieu éprouvent, dans le même temps, une ſorte de mouvement de rotation de dedans en dehors. Ce mouvement eſt commun à toutes les côtes, mais c'eſt dans celles du milieu qu'il eſt le plus ſenſible : il augmente en largeur l'étendue de la poitrine, tandis que l'écartement des côtes en augmente la capacité en longueur. Pendant l'expiration, les mouvemens des côtes ſe font dans le ſens oppoſé. Les facettes cartilagineuſes qu'on obſerve ſur les apophyſes tranſverſes des vertèbres, ont indiqué à M. Sabatier le ſens de ces divers mouvemens : & il entre dans des détails intéreſſans ſur ces facettes cartilagineuſes qui, aperçues par Véſale, n'avoient été décrites avec exactitude par aucun Anatomiſte.

M. Sabatier a confirmé ſon opinion par des obſervations faites ſur des hommes bleſſés à la poitrine, & ſur des animaux; elles l'ont conduit à conclure que les muſcles intercoſtaux comptés parmi les muſcles inſpirateurs, parmi ceux qui ſervent à dilater la poitrine s'alongent dans ce mouvement, & ſe raccourciſſent quand la poitrine ſe reſſerre, & qu'ils doivent par conſéquent être placés au nombre des muſcles expirateurs.

Dans l'état naturel, pour une ſoible inſpiration le diaphragme agit preſque ſeul ; ſi l'inſpiration eſt forte, ce ſont les muſcles ſcalènes, les dentelés ſupérieurs qui élèvent les premières côtes. Les quarrés des lombes, les dentelés poſtérieurs, & généralement les muſcles expirateurs l'emportent en force ſur les inſpirateurs, ce qui eſt conforme à ce qui s'obſerve dans le reſte de l'économie animale, où les muſcles fléchiſſeurs l'emportent ſur les extenſeurs. D'ailleurs, comme l'a remarqué Véſale, la voix, la toux, l'expulſion du fœtus, d'autres fonctions animales dépendent de l'expiration, & exigent beaucoup de force dans l'état naturel, au lieu que l'inſpiration en exige peu.

V. les Mém. p. 213. Le Mémoire de M. Bordenave a le même objet que celui de M. Sabatier, & quoiqu'ils ſe fondent ſur des obſervations de genres différens, tous deux ont été conduits en général aux mêmes concluſions.

M. Bordenave termine ſon Mémoire par des réflexions ſur le dérangement que l'uſage des corps produit ſur la poitrine des femmes, & dans le mécaniſme de la reſpiration. Mais ces réflexions, quoique très-ſages, ne corrigeront perſonne, pas même l'obſervation très-fondée, que cet uſage nuit plus réellement à la beauté qu'il n'y contribue. Pour les femmes comme pour les ambitieux, ce n'eſt pas de vivre qu'il s'agit, c'eſt de régner ; ce n'eſt pas d'avoir les qualités néceſſaires pour mériter le pouvoir, c'eſt de paroître les poſſéder ; & les femmes ne renonceront à tant d'uſages auſſi contraires à la ſanté qu'à la vraie beauté, que lorſqu'elles renonceront à la gloire de plaire, & daigneront ſe contenter du bonheur d'être aimées.

SUR UNE

OUVERTURE FISTULEUSE DU NOMBRIL.

Page 224. M. SABATIER rend compte dans ce Mémoire, de l'état d'un homme dont le canal de l'urètre étoit obſtrué par une

pierre, & dont les urines s'étoient ouvert une route par une ouverture fiſtuleuſe, près du nombril. Les obſervations de cette eſpèce ſont très-rares dans les adultes ; M. Sabatier a remarqué que dans celle-ci, l'ouverture n'avoit pas eu pour cauſe la dilatation de l'ouraque, canal qui exiſte dans le fœtus, & qui s'oblitère après la naiſſance. Pluſieurs Anatomiſtes célèbres ont obſervé cette dilatation dans des ſujets très-jeunes, dont le canal de l'urètre avoit été bouché ou par des obſtacles accidentels, ou par une ſtructure vicieuſe; mais ici, la Nature avoit ſuivi une route différente : le fond de la veſſie s'étoit enflammé; il avoit contracté une adhérence avec les tégumens, & à la ſuite de l'abcès, il s'étoit formé une ouverture à la veſſie, & une ſorte de canal qui conduiſoit l'urine à la fiſtule des tégumens. Mais la Nature n'avoit pas tout fait; la route qu'elle avoit formée ne procuroit à l'urine qu'une iſſue, qui ne ſuffiſoit que pour une excrétion peu abondante, & cette excrétion étoit douloureuſe ; l'Art auroit pu la ſeconder, s'il avoit été poſſible de reconnoître, avant la mort du ſujet, l'état des parties & la direction de ce nouveau canal.

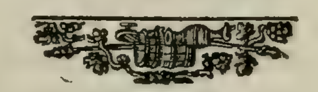
SUR L'ORGANE DE L'OUÏE

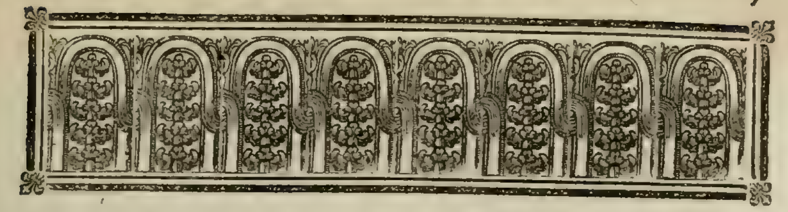
DANS LES DIFFÉRENS GENRES D'ANIMAUX.

CE n'eſt qu'en comparant dans différens Animaux, les organes des ſens, ou en général les organes deſtinés à des fonctions ſemblables, que l'on peut apprendre à diſtinguer dans un organe les parties vraiment néceſſaires, de celles qui ne ſervent qu'à le perfectionner ou à l'étendre ; c'eſt auſſi le ſeul moyen de bien reconnoître à quelle fonction particulière chacune de ſes parties eſt deſtinée. V. les Mém. p. 381.

En comparant l'organe de l'ouïe dans les quadrupèdes, les oiſeaux, les reptiles & les poiſſons, M. Vicq-d'Azir a obſervé que ſes parties eſſentielles étoient au moins un oſſelet, des conduits demi-circulaires, & une pulpe nerveuſe:

ces parties, en effet, ſe retrouvent dans l'organe de l'ouïe de tous les animaux, & ce ſont les ſeules qui s'y trouvent conſtamment. La conque extérieure qu'on obſerve dans l'homme & dans les quadrupèdes, manque dans toutes les autres eſpèces; à la vérité, le trou auditif eſt entouré, dans la plupart des oiſeaux, de plumes rangées circulairement, & avec une diſpoſition régulière, qui ne permet pas de les croire inutiles au ſens de l'ouïe. Le conduit auditif, commun aux quadrupèdes & aux oiſeaux, manque dans pluſieurs reptiles & dans les poiſſons. Le limaçon qu'on n'a obſervé que dans l'homme & les quadrupèdes, manque dans les oiſeaux, mais un conduit droit y ſupplée; au lieu de trois oſſelets ils n'en ont qu'un, comme dans la plupart des autres genres, excepté dans certains poiſſons; mais par une ſingularité remarquable, ſi l'organe des quadrupèdes eſt plus compliqué que celui des oiſeaux dans ſa ſtructure, & par le nombre des pièces qui le compoſent, les parties eſſentielles de l'ouïe ſemblent avoir dans les oiſeaux une perfection plus grande; en ſorte, qu'à moins de ſuppoſer au limaçon & à la ſpirale qui leur manquent, quelqu'uſage qui nous eſt inconnu, on ne peut dire à qui des oiſeaux ou de nous la Nature a accordé un organe de l'ouïe plus parfait. A s'en tenir même aux connoiſſances actuelles, il paroît qu'il y a lieu de croire que les oiſeaux ont l'avantage: en effet, il n'y a point de différences eſſentielles entre l'ouïe de l'homme & celui des quadrupèdes, & aucun des quadrupèdes n'a, comme les oiſeaux, la faculté de chanter, d'apprendre des airs; ainſi l'homme paroît devoir les avantages de ſon ouïe plutôt à ſon intelligence qu'à ſon organiſation.





HISTOIRE NATURELLE
DES ANIMAUX.

OBSERVATIONS SUR LE CRAPAUD.

L'HISTOIRE de l'Académie a déjà fait mention de l'Obſervation de M. Demours, ſur le Crapaud accoucheur de ſa femelle; mais l'Auteur, devenu Aſſocié de l'Académie, a cru devoir conſigner dans nos Mémoires les détails de ſon obſervation : nous ne parlerons que de ceux dont l'Hiſtoire de 1741 n'a pas fait mention. V. les Mém. p. 13.

Pluſieurs ſemaines avant la ponte, le crapaud mâle tient ſa femelle embraſſée; cependant, lorſqu'il s'en ſépare pour l'accoucher, les œufs ne ſont pas fécondés; & il y a tout lieu de croire que c'eſt ſeulement après les avoir tirés qu'il les féconde d'un ſeul jet; depuis ce moment, lui ſeul en reſte chargé, & il les porte avec lui. Comme les petits qui doivent éclore exiſtent d'abord ſous la forme de têtards, forme ſous laquelle il ne peuvent vivre que dans l'eau, le crapaud cherche une mare où il puiſſe dépoſer les œufs; s'il n'en trouve point dont l'abord lui ſoit facile, il ſe précipite d'un bord eſcarpé au haſard de périr au bout de quelques jours s'il lui eſt impoſſible de remonter, & quoiqu'il ait appris par l'expérience qu'il ne peut paſſer dans l'eau un long eſpace de temps ſans y ſouffrir.

Ainſi l'on voit qu'il exiſte dans tout être ſenſible une force qui lui fait un beſoin réel & très-preſſant de l'exiſtence

& du bien-être, non-ſeulement des individus à qui il doit des jouiſſances, mais de ceux même qui ne ſont liés avec lui que par le beſoin qu'ils ont de ſes ſecours. Cette force exiſte avec toute ſon énergie dans des animaux, objet de notre horreur & de notre mépris; elle balance en eux l'intérêt de leur conſervation, le ſoin de chercher leur nourriture: c'eſt à elle que la plupart des eſpèces d'animaux doivent leur perpétuité, & dans l'homme, elle eſt la ſource de ſes affections morales, & le principe naturel de ſes vertus.

L'origine de ce ſentiment, ſes rapports avec l'intérêt perſonnel direct dont il triomphe ſi ſouvent, ſon influence ſur nos actions & nos principes, tous ces objets importans, ſur leſquels l'Obſervation des animaux peut nous donner tant de lumières, n'ont peut-être pas encore été démêlés avec aſſez de ſoin par les Métaphyſiciens, qui, ſéduits par les préjugés de la Philoſophie, ont ſouvent été chercher bien loin, ce qu'ils ne pouvoient trouver qu'au-dedans d'eux-mêmes.



BOTANIQUE.



BOTANIQUE.

SUR LES GOMMIERS DU SÉNÉGAL.

CE Mémoire est la suite de celui que M. Adanson a publié dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1775, sur les Gommiers du Sénégal. V. les Mém. p. 20.

Il considère ici deux espèces de gommiers ou d'acacias; le premier, nommé *Uérek* par les habitans du pays, est un arbre de moyenne grandeur, qui ne s'élève guère qu'à vingt pieds; il fournit, sans qu'il soit nécessaire d'y faire des incisions, une gomme blanche qui n'a qu'une saveur douce, mêlée d'un peu d'acidité lorsqu'elle est fraîche & qu'on la goûte avec attention.

La gomme rouge ou blanche est, avec le lait de leurs troupeaux, la principale nourriture des Maures, ou plutôt des Arabes, qui mènent une vie errante dans le vaste pays qui s'étend entre le Niger & les montagnes où se termine le royaume de Maroc. Comme les gommiers se trouvent partagés entre trois grandes forêts, ces peuples sont aussi divisés en trois hordes, dont chacune a son Chef.

Ils font avec l'Europe un commerce considérable de toutes les espèces de gommes. M. Adanson évalue ce commerce à trois millions de livres pesant : il est plus lucratif & plus sûr que la traite des Nègres, si pourtant l'on peut se permettre de comparer deux espèces de commerce dont l'un, fondé sur les besoins mutuels de deux peuples, a pour but de procurer à l'Europe une denrée utile, tandis que l'autre, fondé sur la

perfidie ou la violence, eſt un véritable crime aux yeux de quiconque n'a pas renoncé aux plus ſimples notions de la morale.

La ſeconde eſpèce d'acacia dont parle M. Adanſon eſt beaucoup plus petite, les Maures lui donnent le nom de *Ded*; quoique du même genre que l'uérek, le ded ne produit pas de gomme. Cet arbre ne peut être d'aucune utilité, mais les Maures en ont fait un arbre ſacré; ils prétendent que ceux qui ſe réfugient dans ce buiſſon, y ſont invulnérables aux flèches de leurs ennemis; mais ils ne ſont pas à l'abri des piqûres des épines dont cet arbre eſt hériſſé, & cet aſyle incommode, qui ne s'étend pas au-delà du buiſſon ſacré, n'offre aux ſuperſtitieux & aux lâches, qu'une bien foible reſſource.

M. Adanſon annonce dans ſon Mémoire des recherches ſur le bdellium, eſpèce de réſine mal-à-propos confondue avec l'encens, & dont il a eu occaſion de découvrir l'origine à peu-près inconnue juſqu'ici. Tous ces Mémoires ſont le réſultat du voyage que M. Adanſon a fait au Sénégal en 1750, & l'on regrette en les liſant, d'en avoir été privé ſi long-temps.

OBSERVATION DE BOTANIQUE.

M. le Marquis de Courtivron a communiqué à l'Académie l'Obſervation ſuivante, ſur les effets de la *Bella-dona*.

« Le 27 Septembre 1777, au ſoir, pluſieurs enfans de » coupeurs de bois, barraqués en un lieu nommé *Combe-* » *lizardiere*, ſur le territoire de Compaſſeur-Créqui-Montfort, » bailliage de Dijon, ſe trouvèrent attaqués de vertiges; ils » avoient les yeux hagards, & ne pouvoient diſtinguer les objets; » le délire étoit continuel; ils étoient effrayés de ſpectres qu'ils » croyoient voir, & ils jetoient par intervalle, des cris perçans; » leur corps étoit dans une agitation continuelle, & ils ne » pouvoient ſe tenir debouts; leur pouls étoit convulſif,

petit & intermittent; leur bouche étoit sèche, la respiration « laborieuse ; le ventre étoit tendu & douloureux. Je fis « avertir le plus promptement qu'il fût possible, M. Perrenet, « Chirurgien de l'Hôpital d'Issurtille, distant de deux lieues « du village de Compasseur-Créqui-Montfort; il ne put arriver « que le lendemain matin : ayant appris que ces enfans avoient « mangé dans le bois des fruits qu'ils ne connoissoient pas, « & dont les parens représentèrent quelques-uns, il les « reconnut pour des baies de *bella-dona ;* mais avant qu'on « eût pu administrer des secours aux quatre malades, & avant « l'arrivée du Chirurgien, il y en avoit un mort : on donna « aux trois autres de l'émétique, qui leur fit rejeter les fruits « qu'ils avoient mangés; des lavemens & une médecine douce « leur fit évacuer par le bas beaucoup de matières noirâtres : « on leur donna une boisson abondante de lait d'amande. Vers « trois heures après midi, que le mieux s'annonça, les malades « s'endormirent; à leur réveil leur peau fut couverte d'une « moiteur considérable; ils étoient comme stupides & étonnés : « le sur-lendemain ils parurent guéris, & reprirent peu-à-peu « leurs habitudes ordinaires. «

Ayant questionné ces enfans depuis leur guérison, ils « m'ont assuré qu'ils n'avoient mangé chacun que peu de ces « baies de *bella-dona*, & ils m'ont dit que celui qui étoit « mort, n'en avoit pas mangé plus qu'eux, sans doute plus « délicat que les autres, car l'âge des quatre enfans n'étoit pas « fort différent, il succomba plus tôt sous l'effet du poison qui, « sans les secours administrés, les auroit emportés comme lui. »





MINÉRALOGIE.

EXTRAIT D'UN VOYAGE FAIT DANS LES VOSGES.

V. les Mém. p. 433.

M.RS GUETTARD & LAVOISIER ont parcouru en Naturalistes & en Physiciens, plusieurs de nos Provinces, où ils ont recueilli une longue suite d'Observations intéressantes pour l'Histoire Naturelle & pour les Arts. Ces deux Mémoires en sont partie.

Dans le premier, ils décrivent un banc de terre argileuse blanche, qui peut seule, sans addition, sans même avoir été lavée, donner, en la cuisant au feu, de beau biscuit de porcelaine; ce qui prouve que cette terre n'est pas une argile pure, mais de l'argile mêlée avec une terre fusible: au-dessous est un banc d'une terre de même nature à peu-près, d'une teinte verte; la terre de ce banc est propre à faire de la poterie solide, mais grossière. Ces bancs se trouvent auprès de Plombières, dans un pays où le bois est commun, en sorte qu'on pourroit y établir, avec avantage, une Manufacture de porcelaine: cette vaisselle, quoique fragile, peut par son inaltérabilité au feu & dans les différens menstrues, devenir un jour d'une très-grande utilité, soit pour les Arts, soit pour l'usage de la vie; mais il faudroit pour cela qu'elle cessât d'être un objet de luxe, & que les Manufactures de ce genre, encouragées par la liberté, se multipliassent dans les provinces éloignées de la capitale. Les Manufactures de luxe ne sont en effet un objet important & digne des

encouragemens du Gouvernement & des regards des Philosophes, que lorsqu'elles servent en exerçant des ouvriers habiles, en excitant l'émulation parmi les hommes qui étudient les Arts, à étendre, à diversifier, à perfectionner les Manufactures d'un usage commun.

Le second Mémoire renferme la description de deux mines de charbon de terre, situées sur les confins de l'Alsace & de la Franche-Comté: l'analyse de ces deux charbons de terre ne donne point d'alkali volatil, comme on en retire communément de ces substances. M. Rouelle l'aîné avoit observé le même phénomène dans le charbon de terre de Balleroy en Normandie. Ces différences entre les principes des charbons de terre, en indiquent une essentielle dans leur origine, dans la nature des corps qui ont servi à leur formation, ou dans l'espèce de changemens que ces corps ont subis. Mais quelle est cette différence? V. les Mém. p. 435.

A l'une de ces mines, à celle de Ronchamps, on avoit établi en 1757, lorsque les savans Voyageurs l'examinèrent, une Manufacture de noir de fumée: le toit de cette même mine est un schite alumineux, qu'on commençoit aussi alors à exploiter pour en retirer de l'alun. Depuis que l'Histoire Naturelle & la Chimie ont fait des progrès, on commence à savoir que l'alun n'est pas une substance rare en France, & qu'il est également possible ou d'en retirer de beaucoup de terres, ou d'en former artificiellement.

SUR LA MINE ROUGE DE CUIVRE.

ON connoît trois espèces de mines rouges de cuivre; elles paroissent ne différer que par leur forme, & le plus ou le moins de régularité dans leur cristallisation. P. 210.

M. Sage a observé une teinture approchante de celle de cette mine sur du cuivre recouvert par une rouille verte que l'on appelle *patine.* Enfin, dans les cavités de plusieurs morceaux de statues de bronze trouvées après un long séjour

dans l'eau ou dans la terre, on a trouvé de la mine rouge de cuivre bien cristallisée.

De ces faits M. Sage conclut que la mine rouge de cuivre n'est qu'une chaux de cuivre, n'est que le métal même privé de son phlogistique : aussi cette mine réduite donne soixante-dix livres de métal par quintal, & se dissout en entier dans l'alkali volatil, à qui elle fait prendre une couleur bleue ; & ces résultats chimiques confirment ce que l'observation avoit indiquée.

SUR L'EAU DU LAC ASPHALTIDE.

V. les Mém. p. 69.

L'EAU du lac Asphaltide n'étoit connue que par son amertume, qu'on attribuoit mal-à-propos au bitume, & par sa pesanteur. On voit nager sur sa surface le bitume de Judée, qui se précipite au fond de l'eau.

C'est ici la première fois qu'on a pu analyser cette eau, grâce au zèle de M. le Chevalier Tolés, qui en a fait parvenir deux bouteilles à M. Guettard : elle est saturée au point qu'il y avoit au fond de ces bouteilles, du sel cristallisé ; examinée avec l'aréomètre, sa pesanteur est à celle de l'eau distillée comme 5 a 4, pesanteur prodigieuse dont aucune eau salée ne donne d'exemple.

Un quintal de cette eau contient près de 45 livres de sel, dont 6 $\frac{1}{2}$ de sel marin ordinaire, 16 $\frac{1}{2}$ de sel marin à base calcaire, & 22 de sel marin à base de terre magnésienne. C'est uniquement à ces sels que cette eau & celle de la mer doivent leur amertume. Le bitume qui nage sur l'eau du lac Asphaltide, & qui sort de ses bords ou du fond, ne lui communique aucune qualité.





CHIMIE.

SUR LA NATURE DES ACIDES.

LES Chimiſtes entendent par élémens, non les corps ſimples par leur nature, puiſque nous ne pourrons jamais aſſurer d'aucun corps, qu'il ſoit dans cet état de ſimplicité abſolue; mais ſeulement les corps que nous ne pouvons décompoſer, & qui par conſéquent ſont pour nous de véritables élémens. Comme pluſieurs de ces ſubſtances, indécompoſables pour nous, nous montrent des indices d'une première formation faite par la Nature, ou d'une décompoſition exécutée par des moyens que nous ne pouvons ni connoître ni imiter, on les exclut avec raiſon du nombre des élémens; mais on les regarde comme des principes au-delà deſquels on ne cherche point à pouſſer l'analyſe des corps qui en ſont compoſés. V. les Mém. p. 535.

Cependant l'analyſe de ces ſubſtances elle-même eſt un des objets les plus piquans de la Chimie; elle offre des problèmes difficiles à réſoudre, & dont l'obſervation de la Nature a prouvé que la ſolution étoit poſſible; auſſi à chaque époque où la Chimie s'enrichit de nouveaux moyens d'analyſe, pluſieurs ſubſtances regardées comme des principes, ſont excluеs de cette claſſe & rentrent dans l'ordre des compoſés.

Les acides, du moins pluſieurs d'entr'eux, ſont regardés, non comme des élémens; parce que l'on ſait il y a long-temps qu'ils ſe forment ou ſe détruiſent, mais comme des principes très-ſimples au-delà deſquels l'analyſe ne remonte point.

La théorie des airs nous a donné, depuis quelques années, l'eſpérance de faire un pas de plus : en effet, puiſqu'on a trouvé les moyens de raſſembler, de diſtinguer, de ſoumettre aux expériences les fluides aëriformes qui s'échappent des corps, il en réſulte que celles de ces ſubſtances qui ſe dégagent dans la décompoſition d'un acide, peuvent être connues & ſoumiſes à l'examen des Chimiſtes.

L'acide nitreux a été celui ſur lequel on ait fait les premiers eſſais ; en diſſolvant dans cet acide certains métaux, il ſe dégage de l'air, & cet air qu'on a nommé *air nitreux*, mêlé avec l'air vital, c'eſt-à-dire, préciſément avec celui qui ſe combine avec les métaux pendant leur calcination, reproduit l'acide nitreux. Il paroît donc que l'acide nitreux eſt compoſé de ces deux airs, & que le métal le décompoſe en ſe combinant avec l'air vital qui en étoit une des parties.

Comme l'acidité eſt une propriété commune à toutes les eſpèces d'acides, qui produit dans tous des phénomènes analogues, il eſt naturel du moment où on ne les regarde plus ni comme des corps ſimples, ni comme un même acide eſſentiel différemment modifié, de ſuppoſer à tous un principe commun, principe auquel ils doivent leur qualité d'acide, & qu'on peut appeler le principe *acidifiant* ou *oxigine.*

C'eſt dans l'une des ſubſtances qui forment l'acide nitreux ou qui du moins entrent dans ſa compoſition, que M. Lavoiſier cherche ce nouveau principe, & il penſe que c'eſt l'air vital ou plutôt un des principes qui forment l'air vital. Ce principe, combiné avec les matières charbonneuſes, produit l'air gazeux ou l'acide aërien ; avec le ſoufre, il produit l'acide vitriolique ; avec le phoſphore, l'acide phoſphorique ; avec le ſucre, l'acide du ſucre.

Les Mémoires donnés par M. Lavoiſier dans les Volumes précédens, contiennent une partie des preuves de ces différentes opinions, excepté de celle qui regarde l'acide du ſucre : l'examen des circonſtances qui accompagnent la formation de cet acide, & ſa décompoſition ſont l'objet particulier de ce Mémoire.

Si

Si on verse de l'acide nitreux sur du sucre, & qu'on distille à feu nu, il passe de l'air nitreux, de l'air inflammable, de l'air gazeux, enfin une portion d'acide nitreux qui n'a pas souffert de décomposition. Et l'acide du sucre reste dans la cornue : ainsi l'air vital qui s'est séparé de l'air nitreux, s'est combiné avec le sucre, & a formé l'acide saccarin ; mais l'air gazeux & l'air inflammable qui ont passé, sont dûs à la décomposition de l'acide du sucre : aussi cet acide poussé à la distillation, se réduit-il en air gazeux & en air inflammable, en laissant un résidu charbonneux. Comme l'air gazeux est, suivant l'opinion de M. Lavoisier, une combinaison du principe acidifiant avec la matière charbonneuse, il résulte de cette dernière analyse, que le sucre n'est qu'un composé de la matière charbonneuse toute formée, & d'un air inflammable.

M. Lavoisier termine ce Mémoire par l'annonce d'une suite d'analyses végétales faites par la même méthode que celle du sucre, & d'après les mêmes principes.

Il ne donne pas, au reste, cette théorie comme rigoureusement prouvée, mais comme un système dont les parties lui paroissent assez bien liées entr'elles, & qui est appuyé sur un assez grand nombre d'expériences, confirmé par un assez grand nombre d'observations pour mériter l'attention & l'examen des Chimistes.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DES SELS VITRIOLIQUES.

M. Baumé a prouvé il y a déjà un grand nombre d'années, que l'acide nitreux décompose le tartre vitriolé & le sel de Glauber, tandis que l'acide vitriolique décompose aussi le nitre prismatique & le nitre quadrangulaire, espèce de paradoxe qui semble détruire ou du moins qui oblige de modifier la doctrine des affinités.

V. les Mém. pag. 44 & 333.

M. Baumé essaya de décomposer les mêmes sels par l'acide

marin, mais ce fut ſans ſuccès ou du moins avec un ſuccès équivoque.

M. Margraff, de ſon côté, étoit parvenu à décompoſer par l'acide marin les deux nitres à baſe d'alkali fixe, & même le tartre vitriolé & le ſel de Glauber, ce qui faiſoit du paradoxe obſervé par M. Baumé, une ſorte de règle générale.

M. Cornette s'eſt propoſé d'étendre les expériences des deux Chimiſtes qui l'ont précédé, d'éclaircir ce qui paroiſſoit encore incertain, & de concilier ce qui ſembloit contradictoire dans leurs réſultats, & il a embraſſé dans ſon travail les ſels à baſe terreuſe ou à baſe métallique.

Son premier Mémoire n'a pour objet que la décompoſition par l'acide marin des ſels vitrioliques & nitreux à baſe d'alkali fixe végétal ou minéral, & à baſe d'alkali volatil.

Il a toujours employé de l'acide marin fumant & très-pur; il met dans l'état de ſiccité les ſels qu'il veut décompoſer. Avec cette précaution, chacun de ces ſels a été décompoſé, mais avec des circonſtances différentes: la décompoſition eſt plus facile pour les ſels ammoniacaux; ceux à baſe d'alkali minéral viennent enſuite, & enfin les ſels à baſe d'alkali végétal réſiſtent le plus à la décompoſition.

Lorſqu'on verſe l'acide marin fumant ſur les ſels nitreux, l'acide nitreux qui ſe ſépare, ſe mêle avec l'acide marin & forme de l'eau régale: cette obſervation peut être utile dans le cas où un Chimiſte qui voudroit faire de l'eau régale, n'auroit dans ſon Laboratoire que des ſels nitreux & de l'acide marin. Le ſel ammoniac, produit par la décompoſition du nitre ammoniacal, prend une couleur aſſez foncée, que des diſſolutions & des criſtalliſations répétées ne peuvent lui ôter, mais que M. Cornette lui a fait perdre en le ſublimant ſur de la terre d'alun, qu'il faut avoir la précaution de laver avec ſoin.

Après avoir déterminé l'effet des acides nitreux & marins ſur les ſels vitrioliques à baſe alkaline, M. Cornette examine dans un ſecond Mémoire, l'effet des mêmes acides ſur les

ſels vitrioliques à baſe terreuſe : ici les phénomènes ſont différens.

Aucun des ſels vitrioliques à baſe terreuſe n'eſt décompoſé par les autres acides minéraux ; mais les ſels nitreux ou marins à baſe terreuſe décompoſent les ſels vitrioliques à baſe d'alkali : le ſel marin à baſe terreuſe calcaire décompoſe le vitriol à baſe de magnéſie. Tels ſont les principaux phénomènes obſervés par M. Cornette : ces phénomènes ne détruiſent pas la théorie générale des affinités, mais ils détruiſent les loix particulières d'affinité qu'on s'étoit trop preſſé d'adopter ; ils en indiquent d'autres qu'il faut y ſubſtituer. Si des Chimiſtes d'une grande réputation ont donné trop de généralité aux loix qu'ils ont obſervées, il ne faut pas en conclure que les faits chimiques ne ſont point aſſujettis à des loix fixes & générales : on s'expoſe également à ſe tromper en généraliſant trop ou en ne généraliſant pas aſſez. Ce dernier inconvénient eſt ſans doute moindre en lui-même, puiſque l'ignorance & le doute valent mieux que des erreurs ; mais la pareſſe qui fait reſter dans l'ignorance & dans le doute, eſt peut-être auſſi nuiſible au progrès des Sciences que la hardieſſe qui s'égare, mais qui ne s'égare que quelquefois.

Gardons-nous cependant de croire que ces erreurs viennent d'avoir trop combiné ſes idées, trop raiſonné ſur les faits : elles viennent le plus ſouvent d'avoir mal obſervé, de n'avoir vu les faits ni en aſſez grand nombre, ni avec aſſez de détails. C'eſt la précipitation & l'ignorance, & non l'imagination ou le génie qui nous font commettre des erreurs, car le génie conſiſte non à généraliſer des faits particuliers, mais à ſaiſir dans la ſuite des faits obſervés l'enſemble qu'elle préſente.

Le travail de M. Cornette ſur les ſels à baſe terreuſe, le conduiſent à rechercher l'origine de la ſélénite qui ſe trouve dans les eaux & celle des carrières de gypſe. Comme le mélange du ſel marin à baſe terreuſe & du ſel de Glauber produit de la ſélénite, que ces ſels ſont diſſolubles dans l'eau, & que la ſélénite l'eſt très-peu, il paroît probable à M. Cornette que c'eſt au mélange d'eaux chargées de ces deux ſels qu'eſt

dûe la présence de la sélénite dans l'eau, & même la formation des carrières de gypse. Il observe en effet que des Eaux qui contiennent du sel de Glauber & du sel marin à base terreuse, peuvent rester limpides quelque temps & sans que la sélénite s'y forme : elle se précipite ensuite par l'évaporation & en plus grande quantité qu'une masse égale d'eau n'eût pu tenir en dissolution de sélénite toute formée. Il est donc possible que des Eaux minérales qui donnent de la sélénite par l'analyse, ne renferment réellement, du moins lorsqu'elles n'ont pas été gardées long-temps, que du sel marin à base terreuse & du sel de Glauber : remarque qui est importante pour l'usage de ces Eaux dans la Médecine.

SUR

DIFFÉRENTES COMBINAISONS DU FER.

V. les Mém. p. 1.

RIEN n'est plus facile dans les Sciences fondées sur l'expérience, que de multiplier les faits particuliers; mais ces faits ne sont dignes d'attention que lorsqu'ils servent à conduire à des vérités générales, ou que présentant, au contraire, des singularités nouvelles & imprévues, ils deviennent un objet de recherches. Les faits observés par M. de Lassone, & dont il rend compte dans ce Mémoire, sont de cette dernière classe.

Si on mêle de la limaille de fer & de la crême de tartre, qu'on imbibe ce mélange d'eau & qu'on lui fasse subir une longue digestion, il se fait une combinaison dont le résultat est dissoluble dans l'eau froide; si on mêle la décoction de noix de galle à cette dissolution, il se forme de l'encre; mais l'alkali phlogistiqué n'en précipite point de bleu de Prusse: cependant il suffit de faire bouillir la liqueur pour lui donner cette propriété.

Quelle est la cause de ce phénomène? On n'ajoute rien à la liqueur; elle est claire avant comme après l'ébullition; elle contient, avant comme après, du fer & de la crême

de tartre; quel changement a-t-elle donc ſubi? Si le fer étoit diſſous avant l'ébullition, pourquoi n'eſt-il pas précipité par l'alkali? S'il n'étoit pas diſſous, comment la liqueur où il eſt ſuſpendu, reſte-t-elle tranſparente? Nous ne ſuivrons pas M. de Laſſone dans la ſavante explication qu'il donne de ce phénomène.

M. de Laſſone conclut de cette obſervation, que les boules de fer produites par la digeſtion, ne ſont point du tout identiques avec celles qui ſe forment à l'aide de l'ébullition, & il conſeille de préférer la première préparation dans l'uſage de la Médecine.

Il remarque enſuite, que puiſque la noix de galle précipite en noir le fer diſſous par la crème de tartre, on peut ſe procurer une teinture noire ſans employer le vitriol, procédé qui peut être d'un grand avantage, puiſque les teintures noires formées avec le vitriol martial, attaquent juſqu'à un certain point les ſubſtances auxquelles on les applique.

Le ſecond fait qu'a obſervé M. de Laſſone n'eſt pas moins remarquable. On ſait que le fer ſe diſſout dans l'alkali, mais ſi l'on emploie l'alkali fixe, la diſſolution n'a lieu que lorſque ce ſel eſt dans l'état de cauſticité; ſi au contraire on emploie l'alkali volatil, il n'agit que lorſque combiné avec l'air gazeux, il a perdu ſa cauſticité; & ce qui eſt encore une ſingularité, la diſſolution du fer par l'alkali volatil ne ſe fait qu'avec un dégagement d'air conſidérable, & par conſéquent c'eſt avec l'alkali cauſtique, avec l'alkali qui n'auroit point agi ſur le fer, quoique préſenté dans ſon plus grand état de pureté & d'activité, que cependant le fer ſe trouve réellement combiné après la diſſolution.

SUR L'ART DES ESSAIS D'OR.

L'ART des Eſſais eſt un de ceux où les hommes ont porté le plus loin l'exactitude, & où la pratique peut le moins méconnoître ce qu'elle doit à la théorie. Mais c'eſt ſur-tout V. les Mém. p. 505.

dans ces derniers temps que cet Art a fait le plus de progrès, & on en a l'obligation au zèle de M. Tillet, pour un travail qu'il a regardé comme un devoir, & auquel il a sacrifié un temps qu'il eût pu employer à des travaux plus brillans, aussi utiles peut-être, mais sur lesquels le devoir n'eût pas déterminé son choix. L'art des essais se réduit à deux opérations; l'une est la séparation des métaux imparfaits, unis à l'or & à l'argent; l'autre la séparation de l'or de l'argent.

La première se fait par la coupellation: M. Tillet a perfectionné cette méthode dans plusieurs Mémoires insérés parmi ceux de l'Académie, au point de ne plus rien laisser à desirer. En effet, dans toute opération de ce genre, il y a deux objets à considérer; l'un est l'exactitude physique qui ne s'arrête qu'à des quantités imperceptibles pour nos sens ou pour nos instrumens, & qui n'a de bornes que celle de leur perfectibilité; l'autre est l'exactitude de l'art-pratique, qui a pour limite le point où une exactitude plus grande devient plus coûteuse qu'elle n'est utile. Or M. Tillet a donné les moyens de s'assurer, malgré la petite portion d'argent, toujours ou presque toujours contenue dans le plomb, malgré la partie de fin entraînée dans les coupelles, de la quantité de fin que contenoit une matière soumise à l'essai, avec une exactitude dont l'erreur échapperoit aux instrumens connus, & qui pourroit être poussée plus loin, si ces instrumens se perfectionnoient encore; & il a prouvé en même temps comment, par des moyens aussi sûrs que simples, on peut parvenir à une exactitude aussi grande que l'intérêt public ou celui des particuliers peuvent l'exiger, aussi grande qu'on peut l'attendre de ceux à qui ces opérations sont confiées.

La seconde opération est celle du départ, & elle consiste à séparer l'or de l'argent, en mettant dans plusieurs eaux-fortes, bien purgées d'eau régale, & prises successivement à différens degrés de concentration, le métal qu'on veut essayer, & auquel on a soin d'ajouter de l'argent, jusqu'à ce que la quantité de ce métal y soit à peu-près double de celle de l'or. Cette opération avoit déjà été l'objet des recherches de M. Tillet, &

il avoit trouvé par ses expériences, qu'il arrive quelquefois qu'en y procédant, même avec toutes les précautions qu'il a prescrites, il peut rester encore, lorsqu'on la croit finie, une petite partie d'argent unie à l'or, ce qui rend le titre déterminé par l'essai, supérieur au titre réel: il avoit observé aussi que les manipulations de cette opération sont très-délicates, & peuvent exposer à des accidens qui rendent l'opération ou incertaine ou fautive. En effet, pour qu'elle réussisse bien, on est obligé de réduire en lame mince le morceau de métal qu'on veut essayer, afin qu'il présente plus de surface à l'acide, & qu'il en soit pénétré plus aisément: on roule ensuite la lame en cornet, pour qu'elle conserve sa forme, & qu'elle ne se brise point par l'action de l'eau-forte, par les mouvemens qu'on donne au vase, par celle des nouvelles eaux-fortes qu'on y ajoute; ce cornet métallique est fragile après l'opération; il faut cependant le faire passer dans un creuset, où par le recuit il prend assez de consistance pour être pesé. Quelque précaution que l'on prenne durant ces opérations, le cornet peut se briser, le matras peut sauter, & alors il faut recommencer l'opération; il peut même (ce qui est plus fâcheux) se détacher du cornet quelques parties qui échappent à l'opérateur, & alors l'essai donneroit un titre au-dessous du vrai.

Voici maintenant la méthode que M. Tillet a imaginée pour obvier à ces deux inconvéniens, & qu'il expose dans ce Mémoire; il place dans un cylindre d'un métal inaltérable dans l'eau-forte, le cornet qu'il veut essayer; les deux bases de son cylindre sont fermées par deux viroles percées d'un trou, & le cylindre lui-même, formé par une lame qui fait ressort, & qui n'est pas soudée, a une fente longitudinale par laquelle l'eau-forte peut pénétrer. Lorsque le départ est terminé, on fait recuire le cornet dans son étui, & l'opération s'achève sans risque: si le matras casse, on remet l'étui dans de nouvelle eau-forte, & on reprend l'opération au point où elle étoit avant l'accident. On a soin de placer dans le même matras un autre cornet formé d'un

alliage d'or & d'argent, dont on connoît le titre; on le soumet aux mêmes opérations que le cornet d'essai; lorsque l'on croit l'opération finie, on retire du matras l'étui qui contient ce cornet d'expérience, à l'aide d'un fil d'or qui y est attaché; on le fait recuire, on pèse ce cornet, & s'il a exactement le poids qu'il doit avoir, on est sûr de la bonté de l'essai, sinon, on remet le cornet d'essai sur le feu avec de nouvelle eau-forte, & on achève l'opération.

Il ne pouvoit y avoir contre cette méthode que deux difficultés.

1.° Le cornet d'essai ou d'épreuve pourroit s'attacher à l'étui pendant le recuit, & cet inconvénient feroit perdre une partie des avantages de la nouvelle méthode, puisqu'il faudroit alors tirer le cornet de l'étui avant de recuire, & que dans cette manipulation on pourroit ou le briser, ou en laisser égarer quelque petite partie; mais cet accident qui auroit lieu si on se servoit de cornets d'or pur ou allié d'argent ou de cuivre, cesse d'être à craindre si on se sert d'or gris, c'est-à-dire d'or allié de fer dans certaines proportions: à la vérité, après quelques opérations, le fer est un peu attaqué, la surface de l'étui reprend la couleur d'or, & l'adhérence pourroit avoir lieu; mais en se servant d'étuis de platine pure, on évitera cet inconvénient, qui obligeroit à changer d'étui, & qui pourroit peut-être faire craindre qu'il ne se collât au cornet quelques parties de chaux de fer. La platine est inaltérable dans l'eau-forte, & M. le Comte de Sikingen nous a instruits des moyens de la forger & de la laminer. M. le Comte de Milli, qui est aussi parvenu au même but, a donné à M. Tillet des étuis de platine qui ont parfaitement réussi.

2.° On pourroit craindre que l'eau-forte n'eût pas assez d'action sur les cornets renfermés dans les étuis; cette crainte est peu fondée: M. Tillet a fait un grand nombre d'expériences par lesquelles, au moyen d'un cornet d'épreuve, il s'est assuré que cette circonstance ne retarde pas même d'une manière sensible l'effet de l'eau-forte.

Ce

Ce ne ſont point-là tous les avantages de la nouvelle méthode, elle en a encore un bien précieux; c'eſt qu'en ayant un certain nombre d'étuis numérotés, on peut y enfermer tel nombre de cornets d'eſſai qu'on voudra, & faire l'opération à la fois dans un même matras. Cet avantage eſt très-important pour les eſſais d'orſévrerie : on ne peut les faire en grand nombre par la méthode ordinaire que dans des matras ſéparés, devant chacun deſquels il faut placer le numéro de l'eſſai & le creuſet deſtiné au recuit, & avoir à chaque mouvement, à chaque opération l'attention de faire ſuivre ces trois objets; aſſujettiſſement très-pénible, & qui ne met pas encore à l'abri des diſtractions dont il eſt impoſſible de ſe défendre, & difficile de s'apercevoir dans des opérations qu'une longue habitude rend pour ainſi dire machinales.

Cette méthode peut être regardée comme le complément de l'art des Eſſais, & ce dernier travail de M. Tillet ſemble ne plus rien laiſſer à deſirer pour l'exactitude pratique de cet Art : l'on voit en même temps comment en multipliant les cornets d'épreuves, on peut porter cette même méthode à l'exactitude phyſique la plus complète.

RAPPORT FAIT À L'ACADÉMIE SUR L'OR QU'ON PEUT RETIRER DES TERRES OU DES CENDRES VÉGÉTALES.

PLUSIEURS Chimiſtes du dernier ſiècle avoient obſervé que la plupart des terres qui ſe trouvent à la ſurface du globe, & même les végétaux, contiennent une petite quantité d'or. V. les Mém. p. 548.

M. Sage a lû à l'Académie, le 23 Mai 1778, un Mémoire qui renfermoit de nouvelles expériences ſur cet objet, deſquelles il réſultoit que la terre végétale de jardin calcinée, lui avoit donné 2 onces 44 grains d'or par quintal, & le terreau calciné 1 gros 56 grains. Nous nous bornons à citer ici les deux points extrêmes des produits que différentes terres

calcinées ou les cendres de divers végétaux lui avoient donnés. Cette conclusion devoit étonner; il ne s'agissoit plus d'atomes d'or répandus par-tout sur la terre, phénomène qui ne prouve que la divisibilité prodigieuse & l'indestructibilité de ce métal: il s'agissoit d'une quantité assez considérable pour que l'on pût exploiter comme mines d'or une grande partie des terres de la surface du globe: d'ailleurs, une quantité d'or aussi grande ne pouvoit plus être regardée comme accidentelle, il falloit que ce métal fût une partie très-sensible de toutes les terres, ou le produit de la végétation, conséquence aussi importante dans la Physique, que la première pouvoit l'être dans l'ordre des sociétés. En effet, de quelle utilité ne seroit pas pour les Arts, si jamais il pouvoit devenir très-commun, un métal inaltérable, ductile, de la plus parfaite homogénéité, capable de se combiner avec les métaux plus durs, de leur communiquer une partie de ses avantages, & de faire avec eux un composé solide & élastique. L'or, en cessant d'être le plus précieux des métaux, deviendroit le plus utile.

M. le Comte de Lauraguais répéta les expériences de M. Sage, & trouva des résultats fort différens; fortifié par le suffrage de deux savans Chimistes, dont les expériences s'accordèrent avec les siennes, il en fit part à l'Académie par une lettre du 8 Août 1778, & la pria de nommer des Commissaires pour constater un fait d'autant plus important, que l'espérance de trouver de l'or pouvoit frapper fortement les têtes, & causer la ruine de ceux qui s'y livreroient inconsidérément.

L'Académie chargea la classe de Chimie de vérifier les faits contradictoires avancés par M. le Comte de Lauraguais & par M. Sage; & c'est le Rapport qui lui a été fait par cette Classe, le 21 Août 1779, que vu l'importance de l'objet, elle a cru devoir publier dans ce Volume.

Il résulte des expériences que les Commissaires ont faites en grand nombre & avec beaucoup de soin, 1.° que, si de la quantité de fin que donne le minium employé à retirer des

cendres ou des terres l'or ou l'argent qu'elles peuvent contenir, on retranche la quantité de fin que le minium ſeul contenoit avant l'opération, & qu'on détermine par des expériences correſpondantes; la différence de ces quantités, c'eſt-à-dire la quantité d'or & d'argent contenu dans les cendres ou les terres eſt très-petite, tandis que la quantité totale de fin que donne le minium uni aux cendres eſt aſſez conſidérable, ſans cependant approcher de celle que les expériences de M. Sage lui ont donnée.

2.° Que ce bouton de fin eſt de l'argent preſque pur; en ſorte que la partie de la petite minicule d'or retirée de ces expériences, qu'il eſt poſſible de regarder comme extraite des cendres ou des terres, eſt inappréciable, & ſe réduit à quelques fractions de grain par quintal.

On peut ſe tromper ſur la quantité de fin contenue dans les terres, ſi l'on n'a pas la précaution de donner au minium, qu'on revivifie ſeul, le même degré de feu qu'au minium traité avec les terres. Cette remarque, qu'ont fait les Commiſſaires, eſt de la plus grande importance dans les opérations docimaſtiques.

On voit auſſi, d'après tout ce que nous venons de dire, combien il eſt néceſſaire de n'employer dans les opérations que du minium dont on eſt ſûr, ou bien de faire à chaque fois des expériences correſpondantes pour déterminer la partie de fin qui ſe trouve dans le minium. C'eſt au défaut de cette précaution, que les Commiſſaires de l'Académie ont cru devoir attribuer la différence entre les réſultats de M. Sage & ceux de leurs expériences, dont on ne peut révoquer en doute ni la certitude ni la préciſion. Au reſte, cette précaution n'eſt qu'une application de cette règle très-générale de la Chimie qui preſcrit, pour bien juger des produits d'un mélange qu'on ſoumet à l'action du feu, & des phénomènes que préſentent les expériences, de s'aſſurer auparavant de l'effet que le même degré de feu auroit produit ſéparément ſur les ſubſtances dont le mélange eſt compoſé.



ASTRONOMIE.

SUITE DES MÉTHODES ANALYTIQUES
Pour résoudre les Problèmes d'Astronomie.

V. les Mém. p. 73.

M. DU SÉJOUR avoit appliqué jusqu'ici ses Méthodes analytiques aux Problèmes qui ont pour objet la détermination des mouvemens céleſtes. Il les emploie dans ce treizième Mémoire, à résoudre des Problèmes d'un autre genre, ceux qui regardent la figure de la Terre, considérée astronomiquement.

On s'est assuré que la Terre n'est pas une sphère parfaite; on sait même qu'elle est un sphéroïde aplati vers les pôles; enfin il paroît qu'on peut la regarder comme un solide formé par la révolution d'une ellipse. C'est sous ce point de vue que M. du Séjour la considère, après avoir montré que les formules générales qu'il emploie, peuvent s'étendre à toute autre hypothèse, c'est-à-dire, à la figure, quelle qu'elle puisse être, que des observations plus multipliées doivent faire connoître un jour, pourvu que cette figure soit peu différente d'une sphère.

Il donne d'abord l'équation de la perpendiculaire à une méridienne donnée, en regardant cette perpendiculaire comme celle de toutes les lignes tracées sur la sphère, & passant par deux points donnés, qui est la plus courte: la direction de cette ligne à un point donné, tient dans ce cas lieu de deux points, & détermine les arbitraires de l'équation intégrale. Il prouve ensuite que cette ligne la plus courte, assujettie à cette condition, est la perpendiculaire à la Méridienne. Enfin il donne une méthode directe & indépendante de cette propriété pour trouver l'équation de la même courbe.

M. du Séjour compare enſuite le ſphéroïde à la ſphère inſcrite & qui a le petit axe du ſphéroïde pour rayon ; il exprime la latitude, la longitude d'un lieu, ſa diſtance en toiſes à un Méridien donné, diſtance priſe ſur la perpendiculaire, ſa diſtance en toiſes de point où cette perpendiculaire coupe le Méridien à un point donné ſur ce Méridien, en fonctions des quantités correſpondantes priſes ſur la ſphère inſcrite, quantités qu'il appelle *latitude, longitude, &c. corrigées.*

Ces conſidérations le conduiſent à réſoudre d'une manière très-ſimple ce Problème général. Deux de ces quatre choſes étant données, la longitude, la latitude, la diſtance en toiſes d'un lieu donné ſur la perpendiculaire au Méridien, & la diſtance en toiſes du point où cette perpendiculaire coupe le Méridien à un point ſur ce Méridien dont la latitude eſt connue; trouver les deux autres. D'après la ſolution de ce Problème général, on pourra toujours comparer les meſures géodéſiques aux Obſervations aſtronomiques; corriger ou vérifier les unes par les autres ; & dans le cas où elles ne s'accorderoient pas avec l'hypothèſe qu'on auroit choiſie pour le rapport des axes de la Terre, déterminer celui qu'il faudroit y ſubſtituer.

Comme la ſolution de ces Problèmes n'eſt pas toujours rigoureuſe, M. du Séjour, par un moyen dont nous avons déjà rendu compte en parlant de ſes autres Mémoires, détermine l'erreur de ſa méthode, qui ſe trouve plus petite que l'erreur des inſtrumens ou des meſures, & le moyen d'approcher davantage des vraies valeurs, ſi plus de perfection dans les inſtrumens ou dans la manière de meſurer permettent un jour d'exiger une plus grande préciſion. Il donne auſſi des Tables au moyen deſquelles, par une méthode qu'il indique, la ſolution de chaque Problème particulier devient très-ſimple, & n'exige que des calculs peu compliqués.

Ainſi ce Mémoire eſt une théorie analytique très-complète de la figure de la Terre, conſidérée aſtronomiquement; & c'eſt une nouvelle preuve de la ſûreté & en même temps de la facilité des Méthodes analytiques pour la ſolution des Queſtions aſtronomiques.

SUR L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.

V. les Mém. p. 484.

LES progrès de l'Aſtronomie dépendent du temps, de la perfection des méthodes mathématiques & de celle des inſtrumens. Lorſque la conſtruction des inſtrumens fait des progrès rapides, il arrive ſouvent que des obſervations faites avec une grande exactitude pendant un petit nombre d'années l'emportent ſur pluſieurs ſiècles d'obſervations inexactes; d'ailleurs les réſultats qu'on ne doit qu'au temps, ne peuvent être utiles que pour les phénomènes dont la marche eſt uniforme; ſi elle ne l'eſt pas, ces réſultats ne donnent la loi des phénomènes qu'à peu-près, ſans tenir compte de leurs inégalités; ainſi la longue durée des obſervations ne remédie qu'en partie au défaut d'exactitude.

M. Caſſini, en appliquant ces principes à la détermination de l'obliquité de l'écliptique & de ſes variations, a préféré d'employer des obſervations faites depuis 1739 juſqu'en 1778, avec des inſtrumens exacts & qu'il a vérifiés, plutôt qu'une ſuite d'obſervations plus étendues, mais dont l'exactitude étoit moindre. Celles dont il ſe ſert ſont, 1.° des obſervations immédiates de la hauteur méridienne du Soleil; 2.° des obſervations de la diſtance du Soleil au ſolſtice d'été à l'étoile β d'Hercule, qu'on peut regarder comme n'ayant point de mouvement propre; 3.° des obſervations de la diſtance du Soleil à *Arcturus*, Étoile qui a un mouvement propre, mais aſſez bien connu pour qu'on puiſſe corriger les obſervations d'après cet élément.

M. Caſſini, après avoir dreſſé une Table des obſervations de la première claſſe, où il a ſoin de marquer toutes les circonſtances de chacune, y joint le nombre des Obſervateurs qui l'ont faite, & la différence entre leurs réſultats; il choiſit enſuite parmi ces obſervations celles où le nombre des ſecondes qui marque la plus grande diſtance entre les réſultats, eſt plus petit que celui des Obſervateurs, il en forme une Table à part; & c'eſt d'après cette Table qu'il donne ſon réſultat.

M. Caſſini n'a pu faire le même choix entre les obſervations de l'étoile β & celles d'*Arcturus,* parce que ces obſervations étoient en trop petit nombre.

Il termine ſon Mémoire par une Table qui contient les réſultats comparés de ces trois eſpèces d'obſervations. L'obliquité vraie de l'écliptique en 1778, eſt fixée ici à 23d 27′ 55″,2, d'après un réſultat moyen entre ceux de huit Obſervateurs, la différence entre les deux réſultats extrêmes étant de 4″,2.

Le changement de l'obliquité de l'écliptique le plus probable qu'on puiſſe déduire de la Table de M. Caſſini, eſt une diminution d'environ 60 ſecondes par ſiècle.

Toutes les obſervations indiquent que cette diminution a lieu, & paroiſſent prouver qu'elle n'eſt pas uniforme. Les obſervations d'*Arcturus* la donnent de 31 ſecondes en trente-quatre ans, depuis 1743 juſqu'en 1778, c'eſt-à-dire 88 minutes par ſiècle; les obſervations correſpondantes du ſolſtice d'été la donnent de 83; les obſervations de l'étoile β d'Hercule & celle du ſolſtice d'été la donnent de 14 minutes pour vingt-trois ans, depuis 1755 juſqu'en 1778, c'eſt-à-dire 60 ſecondes par ſiècle; & cette dernière détermination paroît devoir mériter la préférence, ſoit à cauſe de l'accord des réſultats de ces obſervations entr'eux, & avec le réſultat que donnent les obſervations de β d'Hercule, depuis 1689 juſqu'en 1778, & qui n'en diffère que d'une ſeconde, ſoit parce qu'on eſt en droit de ſuppoſer en général aux obſervations les plus récentes une exactitude plus grande; d'ailleurs cette détermination s'approche davantage de la théorie qui donne pour l'époque actuelle une diminution de 56 ſecondes en cent ans, d'après la ſavante méthode que M. de la Grange a donnée pour calculer les mouvemens des orbites des Planètes, dans les Mémoires de l'Académie pour l'*année 1774*.

Ce Mémoire de M. Caſſini eſt tiré d'un grand Ouvrage qu'il a entrepris, & qui doit renfermer l'hiſtoire, le calcul & la diſcuſſion des Obſervations aſtronomiques faites depuis la fondation de l'Obſervatoire. Cet Ouvrage ne peut être terminé que dans pluſieurs années, & M. Caſſini ſe propoſe

d'en extraire les résultats les plus intéressans, & de les présenter au Public dans nos Mémoires.

SUR LES TACHES DU SOLEIL.

V. les Mém. p. 393.

CE Mémoire est la suite de celui que M. de la Lande a donné en 1776, sur la nature des Taches du Soleil & l'usage des observations de ces taches pour déterminer la position de l'axe de cet Astre & la durée de sa rotation. La première partie renferme des détails historiques sur les premiers Astronomes qui ont observé les taches du Soleil. Il paroît, d'après un passage de Fabricius, cité par M. de la Lande, que cet Auteur vit les taches du Soleil en 1611 : c'est aussi dans cette année que Galilée & Scheiner les aperçurent; mais Scheiner se trompa sur la cause de ces apparences; Fabricius n'en eut qu'une idée vague; Galilée seul démêla ce qu'elles étoient, & indiqua comment on pourroit les employer à déterminer la durée de la rotation du Soleil & la position de son axe.

Jordanus Brunus, & ensuite Képler, avoient soupçonné que le Soleil avoit un mouvement de rotation; mais on ne parloit alors qu'avec précaution de tous les phénomènes qui tenoient au système du monde, & sur-tout aux vérités découvertes par Copernic & proscrites dans les Écoles. Scheiner n'osa se nommer en parlant des taches du Soleil, qu'il regardoit comme des Planètes; Galilée garda quelque temps le secret de leur découverte entre lui & quelques-uns de ses amis. Il est certain que le sort du Dominicain Jordanus Brunus, brûlé à Rome en 1600, n'étoit pas propre à rassurer ceux qui renouveloient une de ses opinions, même parmi celles qui auroient dû paroître les plus indifférentes.

En effet on regardoit alors comme dangereux tout ce qui contredisoit la doctrine reçue en Philosophie, tout ce qui attaquoit les opinions qui étoient ou qu'on croyoit celles d'Aristote: on s'imaginoit que les opinions nouvelles en physique pouvoient troubler la paix, parce qu'en blessant la vanité

de

de quelques Docteurs & les prétentions de quelques ambitieux, elles excitoient leurs clameurs, dont une longue expérience avoit, en d'autres genres à la vérité, appris à redouter les funestes conséquences.

Dans la suite de son Mémoire, M. de la Lande rapporte & discute un grand nombre d'observations des taches du Soleil, les unes antérieures, les autres postérieures à son premier Mémoire; plusieurs de ces observations s'accordent avec la période de 25 jours & 10 heures qu'il a fixée pour la révolution du Soleil sur son axe; quelques autres paroissent s'en écarter. M. de la Lande attribue cette différence aux changemens de position ou de figure de ces taches, changemens qui sont à la vérité une objection contre son opinion sur les causes des taches du Soleil; mais il n'a garde de la dissimuler: il rapporte également ce qui, dans les observations dont il rend compte, paroît ou favorable ou contraire à l'hypothèse de M. Wilson.

Il ne faut qu'un petit nombre d'observations d'une tache pour déterminer la position de l'axe du Soleil, & la durée de sa rotation, ainsi l'on peut être étonné qu'après tant d'observations & de recherches, il reste quelque incertitude; mais il faut remarquer que le diamètre du Soleil n'a que 30 minutes environ, & que c'est sur cet espace que nous devons juger des variations d'angles qui ont 180 degrés d'étendue.

Quand cette question sera décidée, il en restera d'autres dont la solution est réservée aux siècles suivans. La position de l'axe du Soleil est-elle constante; & si elle varie, quelles sont les loix de ses mouvemens?

OBSERVATIONS DE L'ÉCLIPSE DU 24 JUIN.

IL n'a pas été possible de voir le commencement de cette Éclipse.

M. Messier a déterminé les distances des cornes dans plusieurs instans avec un micromètre; il a également observé V. les Mém. p. 36.

l'immerſion de deux taches du Soleil, après avoir eu l'attention de déterminer exactement la poſition des différentes taches ſur le diſque du Soleil, par des obſervations faites le jour & le lendemain de l'Éclipſe.

V. les Mém. p. 39.

M. Jeaurat a employé; avec ſuccès, pour cette même obſervation, la lunette diplantidienne, dont il publiera la conſtruction & les uſages dans les Mémoires pour l'année 1779.

Page 62.

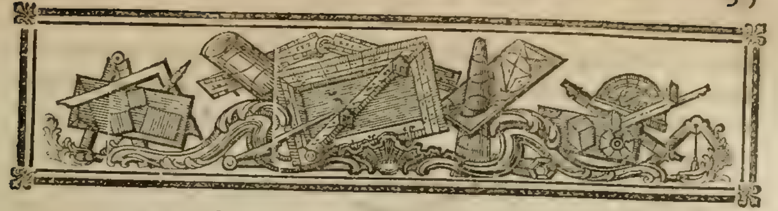
M. le Monnier a joint à ſon obſervation de l'Éclipſe, la diſcuſſion des obſervations faites en mer, à environ cent lieues de diſtance du cap Saint-Vincent, par M. d'Ulloa; à Salé, par M. Deſoteux; enfin, à Cadiz; ainſi que le détail des phénomènes obſervés dans différens lieux de la côte occidentale de l'Afrique.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES À SARON EN 1778.

Page 193.

LE Mémoire de M. Meſſier renferme l'obſervation de pluſieurs Occultations d'Étoiles par la Lune, de quelques éclipſes des ſatellites de Jupiter, & celle de l'éclipſe de Lune du 4 Décembre 1778.

Il y donne auſſi la poſition exacte du château de Saron, d'après les obſervations aſtronomiques. Le zèle éclairé de M. de Saron pour l'Aſtronomie, l'exactitude avec laquelle il obſerve, lorſque ſes devoirs lui permettent de ſe livrer à ſon goût pour les Sciences, la bonté des inſtrumens qu'il a fait placer dans ſon obſervatoire, & la réputation des Aſtronomes qui y ſont des obſervations, rendent la connoiſſance de la poſition de ce lieu importante pour tous ceux qui s'intéreſſent aux progrès de l'Aſtronomie.



MÉCANIQUE.

SUR LE MOUVEMENT D'UN PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE.

M. L'ABBÉ BOSSUT considère dans ce Mémoire le mouvement d'un corps qui oscille en vertu de la force de la pesanteur, tandis que le fil qui le soutient se raccourcit suivant une loi quelconque : après avoir donné d'abord les équations générales du Problème, il suppose que le fil qu'il imagine passé sur une poulie, est tiré par un cylindre, autour duquel il s'enveloppe uniformément ; dans ce cas, on a une équation différentielle du second ordre, entre la distance du corps au point de suspension & le cosinus de l'angle que fait le fil avec la verticale. V. les Mém. p. 199.

Cette équation n'est pas intégrable, en général, par les méthodes connues, & même si on suppose les oscillations infiniment petites, elle se réduit à un cas non intégrable de l'équation de *Ricati*.

Dans cette hypothèse, il est aisé de voir que, pour que le fil s'enveloppe uniformément, la force qui fait tourner le cylindre doit être variable, puisque celle avec laquelle le poids tend à alonger le fil n'est pas constante.

Si on suppose au contraire, que la force qui fait tourner le cylindre est constante, alors il ne tourne pas uniformément, l'équation du Problème change de forme, mais dans le cas des oscillations infiniment petites, elle retombe, comme la première, dans l'équation de *Ricati*.

Si le fil, au lieu de s'envelopper autour d'un cylindre, eſt tiré verticalement par un poids, on a une autre équation, qui, dans le cas des oſcillations infiniment petites, retombe encore dans l'équation de *Ricati.*

Enfin ſi au lieu de conſidérer un corps peſant, on ſuppoſe que le corps décrit un arc-de-cercle ſur un plan, ſans éprouver de frottement, en vertu d'une impulſion une fois donnée; alors, dans les mêmes circonſtances, on n'eſt plus conduit à l'équation de *Ricati,* mais à des équations intégrables, du moins par les quadratures.

SUR UNE NOUVELLE BOUSSOLE.

V. les Mém. p. 66.

CETTE Bouſſole, deſtinée à former une ſuite d'obſervations préciſes de la déclinaiſon de l'Aiguille aimantée, eſt formée par un chaſſis, ſur lequel on place une lunette qui fait avec l'axe de l'aiguille (lorſque ſes deux extrémités répondent au point zéro de chacun des limbes de la bouſſole) un angle à peu-près égal à celui que la direction de l'aiguille aimantée, qu'on ſuppoſe à peu-près connue, fait avec celle d'une mire éloignée, dont on a déterminé la poſition : on obſerve cette mire avec la lunette, dont le centre eſt marqué par l'interſection de deux fils. Par ce moyen, le nombre de degrés, dont l'aiguille s'éloigne de ce point de zéro, eſt la quantité qu'il faut ajouter ou retrancher de l'angle que forme la lunette avec la ligne qui paſſe par les deux points zéro, pour avoir la vraie déclinaiſon.

L'aiguille eſt ſuſpendue ſur un pivot, elle a une chape d'agate, & eſt percée d'un trou pour la recevoir : M. le Monnier a obſervé, que malgré ce trou elle conſervoit aſſez de force magnétique, puiſqu'elle fait encore ſes oſcillations en 10 ſecondes & demie.

On n'a employé dans la conſtruction de tout l'appareil, que du bois, du cuivre pur ou de l'argent.

L'aiguille a 15 pouces de long, & pèſe 146 grains.

Par ce moyen, on peut s'aſſurer, avec une très-grande exactitude, de la direction de la lunette, & par conſéquent, regardant comme nulle l'erreur pour la détermination du vrai Nord, on connoîtra la déclinaiſon de l'aiguille avec toute l'exactitude qu'on peut attendre d'un inſtrument de 7 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, dont on obſerve les diviſions avec une loupe.





HYDRODYNAMIQUE.

NOUVELLES EXPÉRIENCES SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

V. les Mém. p. 353.

LES expériences que M. l'abbé Boſſut a faites en 1775, ont confirmé les loix connues de la réſiſtance directe des fluides, & celles qu'il a tentées dans le même temps pour connoître la loi de la réſiſtance qu'éprouve un plan mu ſous un angle donné, avoient ſuffi, quoiqu'en petit nombre, pour lui montrer que la loi donnée par la théorie s'écarte dans ce cas de l'expérience. Son but, dans ces nouvelles recherches, a été de déterminer quelle loi il falloit ſubſtituer à celle qui établit, que dans les chocs indirects les réſiſtances ſont en raiſon des carrés des ſinus de l'angle d'inclinaiſon.

Pour remplir cet objet, il a fait une ſuite d'expéri nces avec des bateaux dont les proues étoient formées par deux plans, faiſant entr'eux différens angles depuis 12 degrés juſqu'à 180; la différence entre ces angles étoit conſtante & de 12 degrés. On ſait que lorſqu'il s'agit de chercher les loix des phénomènes, d'après des expériences, il eſt utile, pour faciliter le calcul, de faire en ſorte que les quantités qu'on doit regarder comme connues ſoient en progreſſion arithmétique.

En comparant les réſiſtances données par ces expériences avec celles que donneroit la loi ſuppoſée, on trouve que la différence eſt très-grande : la réſiſtance que donne l'expérience eſt conſtamment plus forte, & dans un rapport d'autant plus grand, que l'angle d'incidence eſt plus petit; en ſorte que

pour l'angle de 12 degrés l'expérience indique une résistance trente fois plus forte qu'on n'auroit dû la supposer d'après la théorie. Ce résultat a fait naître à M. l'abbé Bossut l'idée de supposer cette différence égale à une puissance du complément de l'angle d'incidence, multipliée par un coëfficient constant, & cette hypothèse a réussi : il a trouvé qu'on satisfaisoit aux expériences en supposant le rapport de la résistance directe à la résistance sous un angle donné, exprimé par deux termes, l'un proportionnel au carré du sinus de cet angle, l'autre proportionnel à la puissance $3\frac{1}{4}$ de son complément. Cette expression est assez exacte, mais elle commence à s'écarter très-sensiblement de l'expérience, lorsque l'angle approche de 12 degrés, en sorte que pour que la loi convienne exactement à de petits angles même d'environ 12 degrés, il faudroit y ajouter un troisième terme.

Après avoir déterminé la loi des résistances pour des plans mus dans un fluide, suivant différens angles, il étoit essentiel d'examiner si cette loi est d'accord avec l'expérience pour le mouvement des surfaces courbes. Mais il résulte des expériences faites par M. l'abbé Bossut, que les résistances sont moindres pour les surfaces courbes que ne les donneroit la loi établie, d'après la théorie ordinaire; conséquence que M. le Chevalier de Borda avoit tirée, il y a déjà plusieurs années, de ses propres expériences: ainsi, comme les nouvelles expériences prouvent que la résistance est plus grande pour les mouvemens indirects que cette même loi ne la donne, il en résulte, que quand même on connoîtroit avec la plus grande précision, la loi pour un plan mu, suivant un angle quelconque, cette loi ne pourroit servir à calculer la résistance d'une surface courbe.

M. l'abbé Bossut examine aussi la résistance directe qu'éprouve une surface plane, dont une partie est recouverte par une proue angulaire, & il trouve cette résistance plus grande qu'elle ne le seroit, en supposant que la partie qui reçoit le choc direct & la proue angulaire, éprouvent chacune la résistance qu'elles auroient éprouvée, si elles

avoient été ſéparées, & en calculant cette réſiſtance, d'après les expériences précédentes.

Enfin, l'Auteur ſe propoſe les deux queſtions ſuivantes ; la longueur des bateaux parallélipipèdes influe-t-elle ſur la vîteſſe du ſillage? Une poupe triangulaire ajoutée à un bateau augmente-t-elle ſa vîteſſe? Et il trouve 1.° que la réſiſtance varie avec le rapport entre la largeur & la longueur du parallélipipède, qu'il y a une valeur de ce rapport pour lequel la réſiſtance eſt un *minimum*, & que ce *minimum* a lieu à peu-près, lorſque la longueur eſt triple de la largeur, mais que l'on peut prendre une longueur beaucoup plus grande, ſans augmenter beaucoup la réſiſtance, au lieu qu'elle augmente rapidement ſi on diminue la longueur.

L'addition d'une proue triangulaire diminue également la réſiſtance.

Ces trois dernières concluſions prouvent, ainſi que les précédentes, que la réſiſtance qu'éprouve une figure quelconque, formée de lignes, ne dépend point uniquement de celle qu'éprouve chaque ligne en particulier, mais auſſi de la ſituation de ces lignes entr'elles : on peut appliquer aux courbes les mêmes principes, ce qui rend les loix de la réſiſtance pour des figures diſſemblables très-difficiles à connoître, tandis que pour les figures ſemblables, elles ſont d'accord avec la théorie ordinaire. Il reſte donc à faire une nouvelle ſuite d'expériences beaucoup plus délicates que les précédentes, & qu'il ſera plus difficile de diſpoſer de manière à pouvoir conduire à une loi générale; mais s'il eſt quelqu'un de qui on puiſſe attendre la découverte de cette loi, c'eſt du Géomètre qui s'eſt déjà occupé de ces recherches avec tant de ſuite & de ſuccès.

SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

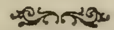
V. les Mém. p. 597.

NOUS venons de voir que la réſiſtance des fluides n'eſt pas telle que la donne la théorie lorſque la direction du mouvement

mouvement n'est pas perpendiculaire à la surface. M. Euler, dont l'âge, les infirmités & les longs travaux n'ont pu ni affoiblir le génie, ni ralentir l'activité, s'est occupé des moyens de concilier la théorie avec l'expérience, & celui qu'il emploie dans ce Mémoire, est de faire entrer dans le calcul de la résistance le frottement que les côtés de la proue éprouvent dans le fluide. Il donne l'expression de la résistance dans ce cas, pour une proue d'une figure quelconque, & applique sa formule au cas particulier d'une proue triangulaire ou pyramidale.

La loi de la résistance pour une proue triangulaire est, dans ce cas, composée de quatre termes, l'un proportionnel au carré du sinus de l'angle d'incidence, & indépendante du frottement; des trois autres, le premier est proportionnel au produit du sinus du même angle par son cosinus; le deuxième au cosinus; le troisième au sinus: ces trois derniers termes sont multipliés par une quantité qui exprime le rapport du frottement à la pression. Il reste à déterminer ce rapport par l'expérience, & M. Euler en donne un moyen ingénieux & susceptible d'une assez grande précision.

Le frottement n'est peut-être pas ici la seule cause de la différence que l'on trouve entre les résultats de la théorie & ceux de l'expérience: une partie de cette différence peut tenir à la vîtesse avec laquelle le fluide en mouvement coule le long du corps. Cette vîtesse peut être différente le long des parois du corps de ce qu'elle est dans le fluide qui en est à une certaine distance, & elle peut dépendre des angles successifs que forment entr'eux les côtés du corps, angles qui, comme nous l'avons vu par les expériences de M. l'abbé Bossut, changent très-sensiblement la résistance, & doivent par conséquent entrer dans la loi qui la détermine. C'est à la recherche de cette vîtesse le long des parois du corps, qu'il faudroit chercher maintenant à appliquer le calcul & l'expérience.





ANALYSE.

THÉORÈMES ANALYTIQUES.

V. les Mém. p. 603 & 606.

CES deux Théorèmes ont été proposés & démontrés par M. Euler, l'un donne pour une valeur déterminée, l'expression de l'intégrale de plusieurs fonctions dont on ne peut connoître l'intégrale pour une valeur quelconque. Quoiqu'il ne soit ici question que de deux fonctions, il est aisé de voir que ce ne sont que des exemples d'une méthode plus générale qui embrasse une classe de fonctions très-étendue. Le second théorème donne en un seul produit de facteurs, l'expression de la somme des carrés des coëfficiens de la formule du binome élevé à une puissance quelconque. La démonstration de M. Euler est beaucoup plus générale que l'énoncé du théorème, puisqu'elle donne une expression semblable pour la somme des coëfficiens d'une puissance du binome, multipliée par les coëfficiens successifs d'une autre puissance quelconque.

On a joint à ce Mémoire une autre démonstration des mêmes Théorèmes, trouvée avant de connoître celle de M. Euler: l'Auteur de cette démonstration a espéré qu'on ne le soupçonneroit pas de la présomption d'avoir voulu comparer son travail à celui d'un grand homme, dont il s'honore d'être l'admirateur & le disciple.

MÉTHODE DE CALCUL INTÉGRAL.

P. 442.

CETTE Méthode, qui s'étend à tous les ordres d'équations différentielles, est développée ici pour le second & pour le

troisième ordres. M. Cousin réduit la solution de l'équation différentielle proposée à celle d'une équation aux différences partielles, ce qui paroît d'abord devoir compliquer les Problèmes; mais il suffit d'avoir une solution de cette nouvelle équation qui renferme une arbitraire, pour connoître une des intégrales de la proposée; & c'est moins la solution générale que la recherche de différens cas d'intégrabilité, qui est l'objet de l'Auteur dans ce Mémoire: d'ailleurs dans cette partie de l'Analyse, on a vu plus d'une fois résoudre par des méthodes qui semblent très-indirectes, des questions qui n'auroient pu l'être avec les méthodes par lesquelles on devoit naturellement en chercher la solution. Celle que donne ici M. Cousin peut encore conduire à un moyen nouveau de résoudre, d'une manière approchée, les équations différentielles: moyen que l'Auteur se propose de développer dans un autre Mémoire.

SUR LES PROBABILITÉS.

TOUTES les questions du Calcul des Probabilités peuvent se réduire à une seule hypothèse, à celle d'une certaine quantité de boules de différentes couleurs mêlées ensemble, dont on suppose qu'on tire au hasard différentes boules dans un certain ordre ou dans certaines proportions. Si on suppose connu le nombre de boules de chaque espèce, on a le calcul ordinaire des probabilités tel que les Géomètres du dernier siècle l'ont considéré: mais si l'on suppose le nombre de boules de chaque espèce inconnu, & que par le nombre de boules de chaque espèce qu'on a tirées, on veuille juger ou de la proportion du nombre de ces boules, ou de la probabilité de les tirer dans la suite suivant certaines loix, on a une nouvelle classe de problèmes. Ces questions dont il paroît que M.rs Bernoulli & Moivre avoient eu l'idée, ont été examinées depuis par M.rs Bayes & Price; mais ils se sont bornés à exposer les principes qui peuvent servir à les résoudre. M. de la Place les a considérées avec plus d'étendue, & il y a appliqué

V. les Mém. p. 227.

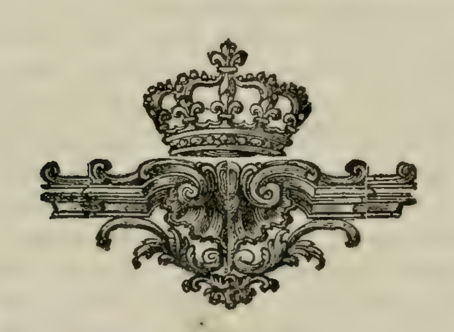
l'analyſe. On peut ſuppoſer le nombre des boules fini ou infini; s'il eſt fini, les queſtions dépendent du calcul intégral aux différences finies; s'il eſt infini, on n'a beſoin que du calcul intégral proprement dit. Le cas du nombre infini eſt celui qui a lieu lorſqu'on applique les queſtions aux évènemens naturels : en effet, il eſt aiſé de voir qu'alors elles embraſſent l'immenſité des temps, & que le nombre des combinaiſons eſt infini.

Suppoſons qu'on ait tiré un certain nombre de boules noires & un certain nombre de boules blanches, on peut demander combien y a-t-il à parier que dans un nombre de coups donné, on tirera plus de boules blanches que de boules noires, ou en général quelle ſera la probabilité des différens évènemens qu'on peut imaginer devoir arriver? Si on applique enſuite ce que la théorie apprend ſur ces queſtions abſtraites à des évènemens naturels, comme à la proportion entre le nombre des naiſſances des garçons & des filles: on partira d'abord d'un fait; par exemple, qu'il eſt prouvé, par une longue ſuite d'obſervations, qu'il naît à Paris un plus grand nombre de garçons que de filles & dans une certaine proportion. On peut demander alors quelle eſt la probabilité que, dans l'avenir, le nombre des garçons ſurpaſſera celui des filles, & cette probabilité eſt la même que celle de l'exiſtence d'une cauſe déterminante à laquelle il faut attribuer ce phénomène, dont par conſéquent il eſt raiſonnable de rechercher les cauſes phyſiques? On peut demander enſuite avec quel avantage on peut parier que, dans un nombre de naiſſances donné qui exprime celui des naiſſances d'une année, par exemple, la loi commune ſera obſervée, combien il faudra d'années pour parier à jeu égal, qu'il arrivera une fois que la même loi ne ſoit pas obſervée? Enfin ſi l'on a pour deux lieux différens, un nombre différent d'expériences & un rapport différent entre le nombre des naiſſances de garçons & de filles, on peut demander quelle eſt la probabilité que la loi ſera obſervée dans un de ces lieux plutôt que dans l'autre? Ainſi M. de la Place trouve qu'il y a une probabilité très-grande & preſqu'équivalente à une certitude morale, que l'excès

du nombre des naiſſances des garçons a une cauſe phyſique pour Paris; qu'il y a 259 à parier contre 1 que dans l'année prochaine le nombre des filles n'excédera pas celui des garçons; qu'on peut parier à jeu égal que cet évènement arrivera d'ici à cent ſoixante-dix-neuf ans; que la certitude que cet effet a une cauſe phyſique régulière, eſt incomparablement plus grande pour Londres que pour Paris.

Au lieu de ſuppoſer que toutes les proportions entre le nombre des boules de différentes couleurs ſont poſſibles, on peut ſuppoſer que ces proportions ſoient renfermées entre certaines limites; par exemple, ſi on fait entrer dans des Problèmes ſur les jeux de commerce, l'habileté inconnue des joueurs, on doit ſuppoſer que cette ſupériorité d'habileté a des bornes; il en eſt de même ſi on veut chercher les erreurs qui ont pu arriver dans une ſuite d'obſervations aſtronomiques. On peut auſſi ſuppoſer que toutes les proportions poſſibles entre le nombre des boules de différentes couleurs le ſont ou également, ou avec plus ou moins de probabilité, ſuivant une loi connue, ou rechercher même la loi ſuivant laquelle elles ſont plus ou moins poſſibles; il réſulte de-là autant de claſſes de Problèmes, dont les ſolutions ſont applicables & aux erreurs des obſervations aſtronomiques & à l'inégalité d'habileté entre des joueurs. Telles ſont les différentes queſtions que M. de la Place s'eſt propoſées: preſque toutes dépendent d'intégrations pour des valeurs déterminées, & il ſuffit, dans un grand nombre de cas, d'avoir des intégrations approchées. L'Auteur s'eſt livré ſur ces deux objets, à des recherches analytiques très-étendues; il donne une méthode d'approximation pour les intégrations aux différences, ſoit finies, ſoit infiniment petites, très-commode pour les queſtions qu'il ſe propoſe & qui peut s'appliquer avec avantage à des Problèmes d'un autre genre: il détermine également pour des valeurs particulières, les intégrales rigoureuſes de fonctions non intégrables en général, par une méthode particulière très-ingénieuſe. Les applications de cette partie du calcul des probabilités, ſont beaucoup plus

étendues & plus utiles que celles du calcul ordinaire; en effet, toutes nos connoiſſances phyſiques & morales ſe réduiſent à des probabilités de ce genre; c'eſt parce qu'un évènement eſt arrivé conſtamment, que nous jugeons qu'il doit arriver encore; c'eſt parce que deux phénomènes ont toujours co-exiſté, que nous jugeons que l'un eſt la cauſe de l'autre, c'eſt parce qu'une ſuite prodigieuſe d'obſervations nous ont appris que les loix de la Nature ſont conſtantes, que quelques expériences répétées ſuffiſent pour nous faire croire la vérité d'un fait: en ſorte qu'il n'exiſte réellement pour nous qu'une certitude abſolue, qui n'a lieu que pour les Sciences abſtraites, ou dans les autres Sciences pour la légitimité des conſéquences qu'on tire d'un principe ſuppoſé donné, & cette probabilité, plus ou moins grande, mais toujours du même genre, ſeule eſpèce de certitude qu'on puiſſe chercher dans les Sciences naturelles, comme dans la conduite de la vie.





OUVRAGES
PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit propofé pour l'année 1778, un Prix double:

Sur la Théorie des perturbations que les Comètes peuvent éprouver par l'action des Planètes.

Elle a trouvé dans la Pièce qui a pour devife:

Non jam prima peto Mneftheus nec vincere certo,

des recherches ingénieufes & utiles à la folution de la queftion propofée. En conféquence elle a cru devoir accorder à l'Auteur de cette pièce un Prix fimple; mais comme en même temps elle n'a pas trouvé dans cet Ouvrage une folution du problème auffi complète que l'état actuel de l'analyfe la mettoient en droit de l'exiger, elle a propofé de nouveau la même queftion pour l'année 1780, avec un Prix double, en exigeant des Auteurs l'application de leur méthode à la Comète qui a été obfervée en 1532 & en 1661, & dont on attend le retour vers les années 1789 & 1790; de manière que l'on puiffe appliquer immédiatement à leurs formules le calcul arithmétique.

L'Auteur de la pièce couronnée eft M. Fuff, de l'Académie de Péterfbourg, Élève de M. Léonard Euler. M. Fuff, en fe faifant connoître à l'Académie, a fait hommage de fon

travail à ſon illuſtre Maître. C'eſt ainſi que pendant long-temps le nom de Galilée décora les ouvrages des Géomètres de Florence. M. Euler étoit digne de voir renouveler pour lui l'exemple d'une ſi noble reconnoiſſance qui prouve peut-être encore plus les vertus du Maître que celles de ſes Diſciples.

ARTS.

L'ACADÉMIE a publié en 1778:

1.° La quatrième partie de l'Art du Facteur d'Orgues, par feu Dom Bedos de Celles, Correſpondant de l'Académie.

L'Auteur traite dans cette partie des orgues de concert grands ou petits, de la manière d'adapter des jeux d'orgues à des inſtrumens à clavier & à cordes, tels que le piano, le clavecin, les vielles, les orgues à cylindre ou ſerinettes. On ſait que ces derniers inſtrumens ſont des machines où des dents diſpoſées ſur un cylindre qu'on fait tourner, ſont mouvoir les touches d'un clavier, de manière à jouer pluſieurs airs, ſuivant les changemens de poſition qu'on donne au cylindre. Dom Bedos donne les moyens d'appliquer les cylindres à un grand orgue, en ſorte qu'on puiſſe à volonté ou jouer des airs en tournant le cylindre, ou employer la main d'un Organiſte. L'Art de noter les cylindres eſt un Art particulier dont on trouve ici les détails; ils ont été communiqués à Dom Bedos par le P. Langremelle, Religieux Auguſtin, qui a pouſſé cet Art à un grand degré de perfection, & qui cultive avec ſuccès la Mécanique & l'Hiſtoire Naturelle.

2.° *L'Art de la Mâture, par M. Rome, Profeſſeur de Mathématiques à Rochefort, & Correſpondant de l'Académie.* L'Art de la mâture conſiſte à déterminer le nombre, les dimenſions, la poſition des mâts qu'il convient de placer ſur un Vaiſſeau, pour qu'il réuniſſe la rapidité de la marche, la facilité de maneuvrer, l'avantage de recevoir dans un plus grand nombre de directions l'impulſion du vent, avec la plus

plus grande ſtabilité, & le moins de mouvemens de tangage ou roulis qu'il eſt poſſible.

La théorie a donné quelques principes généraux pour cet Art, mais on ſent que les problèmes que l'Art ſe propoſe ſont trop compliqués, pour que la théorie ſeule puiſſe éclairer la pratique. C'eſt à l'expérience & à l'obſervation qu'elle doit la plus grande partie des règles qu'elle ſuit; & c'eſt principalement aux détails de cette pratique qu'eſt conſacré l'ouvrage de M. Rome; il l'a fait ſous les yeux de M. Perrain, maître Mâteur à Rocheſort.

3.° *La troiſième diviſion de la première partie de l'Art de fabriquer les étoffes de Soie, par M. Paulet.* Cette diviſion eſt une ſuite de la ſeptième ſection de cet Art immenſe dans ſes détails; elle contient l'art de la fabrique des Satins unis, & de celle des Étoffes qui ſe façonnent avec la marche, des Cirſakas, des Canelés, des Pruſſiennes, des Amboiſiennes, des Muſulmanes, étoffe nouvelle dont l'invention appartient à l'Auteur.

M. Bordenave a publié cette année la troiſième édition de ſa *Phyſiologie*, en deux volumes *in-12*. Cet Ouvrage, deſtiné pour les Écoles de Chirurgie, où l'Auteur profeſſe cette Science depuis un grand nombre d'années, renferme dans un très-petit eſpace les principes de Phyſiologie les plus ſimples, les plus uſuels, expoſés avec méthode & avec clarté. L'Auteur a cru devoir entrer dans quelques détails ſur les hypothèſes que leur accord avec les phénomènes, les idées ingénieuſes qu'elles renferment, ou le nom de ceux qui les ont ou propoſées ou ſoutenues, ne permettent pas d'ignorer.

Dans un Livre élémentaire, le talent conſiſte à faire uſage des connoiſſances approfondies qu'on a pu acquérir ſans les montrer, à préſenter les objets qui ont exigé des diſcuſſions difficiles, ſans laiſſer voir les difficultés qu'on a eues à vaincre, à s'oublier pour ne ſonger qu'à ſes élèves, à faire dire en

un mot aux Lecteurs que l'ouvrage eſt bon, en laiſſant à deviner à ceux qui liſent avec attention, combien l'Auteur a eu beſoin pour le bien faire, de connoiſſances & d'habileté. Tel eſt le but que M. Bordenave s'eſt propoſé : il a voulu de plus que ſon Ouvrage, par ſon volume comme par la manière dont les objets y ſont préſentés, fût à la portée des jeunes gens qui ſe deſtinent à l'art de guérir, & ſur-tout de ceux qui doivent l'exercer dans les campagnes, & dont on ne peut exiger ni une intelligence ſupérieure, ni des études très-approfondies.

LES Leçons de Calcul intégral que M. Couſin a publiées, ſont un Recueil des principales méthodes de calcul intégral, ſoit ordinaires, ſoit aux différences finies, ſoit aux différences partielles. Le but de l'Auteur a été de raſſembler toutes ces méthodes dans un Ouvrage peu volumineux, dans un ordre ſyſtématique & ſous une forme qui rendît cette collection utile à l'enſeignement public.

Cet Ouvrage, en deux volumes in-8.° eſt deſtiné à ſervir de baſe aux Leçons que l'Auteur donne dans le Collége Royal, établiſſement célèbre en Europe dans le temps de ſa première inſtitution, & qui, ſous le dernier règne, a repris un nouveau luſtre. En France, vers la fin du ſiècle dernier, & dans le commencement de celui-ci, il s'étoit élevé une ſorte d'oppoſition entre ceux qui s'occupoient de reculer les bornes des Sciences, & ceux qui étoient chargés de les enſeigner; les uns vouloient établir une philoſophie nouvelle que Deſcartes avoit fait naître en Europe, & que les grands hommes, qui lui ont ſuccédé, ont étendue & perfectionnée, en corrigeant ſes erreurs; les autres ne paroiſſoient occupés que de défendre, juſqu'à la dernière extrémité, les reſtes de l'ancienne Philoſophie, & d'en conſerver du moins la forme, lorſqu'ils étoient forcés d'en abandonner les opinions. Les progrès des lumières ont fait diſparoître

cette opposition, qui n'a existé, du moins d'une manière durable, dans aucune autre Nation éclairée, & qui tenoit moins à l'esprit de la Nation françoise qu'à la forme des établissemens d'instruction publique. Depuis le renouvellement du Collége Royal, les Écoles de Paris disputent aux plus célèbres Écoles de l'Europe l'honneur d'attirer les Étrangers, & de former des Savans dans tous les genres.

M. VANDERMONDE a lû à l'Académie dans ses Assemblées publiques du 14 novembre 1778 & du 15 novembre 1780, deux Mémoires sur un Système d'Harmonie, applicable à l'état actuel de la Musique.

L'objet principal de l'Auteur est de réduire à un petit nombre de loix fondamentales, les règles que les Compositeurs de Musique suivent dans leurs Ouvrages, & même ce qu'ils regardent comme des exceptions à ces règles.

Ce n'est point dans la théorie qu'il cherche ces loix, mais dans l'observation de ce que les plus célèbres Musiciens ont fait, & de ce que l'expérience a prouvé être agréable à l'oreille, quelle que soit la cause de ce plaisir.

Ce sont des espèces de loix empyriques, comme celles que cherchent les Géomètres & les Physiciens, pour des phénomènes dont ils n'ont pu trouver ou calculer la cause d'après les loix générales de la Nature; & l'Auteur est persuadé qu'il n'y a point de vraie théorie de l'harmonie qui soit applicable à l'état actuel de la Musique.

Nous allons exposer en peu de mots les principes de ce nouveau système.

Il doit y avoir une raison simple du plaisir que procure par elle-même, à des oreilles exercées, la succession des accords: la voici selon l'Auteur. Les gammes des différens modes deviennent très-familières à l'oreille, & un accord n'étant qu'un ensemble de sons simultanés, pris entre les

ſept, qui forment chacune de ces gammes, le plaiſir attaché particulièrement à la pratique des accords, dépend de la facilité plus ou moins grande que procure leur ſucceſſion, pour reconnoître les gammes dont ils font partie.

Il y a dans chaque accord, comme dans chaque gamme, une note principale; pour chaque gamme, c'eſt la *note du ton;* & pour chaque accord, c'eſt quelquefois la note du ton & quelquefois *ſa quinte:* l'une de ces deux notes eſt toujours cenſée faire partie de tout accord complet, compoſé d'un certain nombre des ſons de cette gamme.

Dans les accords, cette note principale ſe nomme *baſe d'harmonie.* Pour bien ſaiſir la ſignification de ce mot, il faut ſavoir qu'on ne peut terminer un ſens, ou parvenir au repos en harmonie, que ſur un accord parfait, c'eſt-à dire ſur un accord dont les élémens ſont la note principale, ſa tierce majeure ou mineure & ſa quinte juſte: toute autre note entendue en même temps, & qui ne ſeroit point une octave de l'une de ces trois, ſeroit donc *diſſonante,* c'eſt-à-dire qu'il faudroit néceſſairement ceſſer de la chanter pour parvenir à ce repos. La baſe d'harmonie eſt cette note principale par rapport à laquelle toutes celles d'un accord ſont ou conſonantes ou diſſonantes: entre une note & ſa quarte, par exemple, il n'y a pas diſſonance, puiſque deux parties peuvent faire la quarte entr'elles dans un accord parfait; & cependant la quarte de la baſe d'harmonie eſt une note diſſonante, puiſqu'il faut néceſſairement ceſſer de la chanter pour arriver au repos: entre une note & ſa ſeconde, au contraire, il y a diſſonance, puiſque dans un accord parfait deux parties ne peuvent pas chanter à la ſeconde l'une de l'autre; mais pour ſavoir laquelle des deux notes eſt la note diſſonante, celle qu'il faut ceſſer de chanter, il faut connoître la baſe d'harmonie de l'accord.

Cette baſe d'harmonie eſt toujours, comme nous l'avons dit, ou la note du ton dans lequel on eſt au moment où l'accord s'exécute, ou la quinte de ce ton; & ce ſera celle

des deux qui, ſe conformant d'ailleurs aux loix de l'harmonie, ſuppoſera l'accord le plus ſimple, le moins diſſonant.

Il y a quatre eſpèces de notes diſſonantes ſur la baſe d'harmonie, les *ſeptièmes*, les *neuvièmes*, les *quartes* & *les ſixtes*. Toutes les fois que le Muſicien a employé l'une de ces notes diſſonantes, il faut raiſonner dans l'application des loix de l'harmonie, comme s'il avoit employé en effet toutes celles qui la précèdent dans l'ordre où nous venons de les nommer : il faut auſſi reſtituer la baſe d'harmonie, ſi elle a été ſupprimée, c'eſt-à-dire enfin que ces loix ſuppoſent les accords auſſi complets qu'ils peuvent l'être.

L'Auteur admet, dans chacun des douze tons, un mode majeur, & cinq eſpèces de mode mineur : le mode eſt la manière dont doivent être affectés ou non, de dièſes ou de bémols, les ſept noms des degrés de l'échelle ou de la gamme d'un certain ton.

Les cinq eſpèces de mode mineur ſont, 1.° le mode mineur tel qu'on le ſuppoſe à la clef, ou le *mode mineur en deſcendant :* la tierce, la ſixte & la ſeptième du ton y ſont mineures; 2.° le *mode mineur proprement dit*, dans lequel la ſeptième du ton eſt majeure, c'eſt celui qui eſt cenſé régner toutes les fois que l'on n'emploie pas les cordes particulières aux autres eſpèces; 3.° celui où la ſixte du ton eſt auſſi majeure, on l'appelle *mode mineur en montant.* Dans les deux autres eſpèces, la quarte du ton eſt ſuperflue, la ſeptième étant toujours majeure; ce qui fournit 4.° le *mode mineur avec ſenſible de quinte*, dont la pratique de l'accord appelé *de ſixte ſuperflue*, démontre la néceſſité ; & 5.° le *mode mineur en montant, avec ſenſible de quinte*, dans lequel la ſixte du ton eſt majeure.

C'eſt en introduiſant dans ces ſix différens modes, ſur la note du ton & ſur la quinte les différentes notes diſſonantes dont nous venons de parler, que l'on forme tous les accords complets, praticables dans l'harmonie.

Cela poſé, la loi générale qui doit être obſervée de

proche en proche entre deux accords conſécutifs, durant tout le cours d'un morceau de muſique, eſt très-ſimple à énoncer.

Il faut, ou que la baſe d'harmonie ſoit commune, ou que toutes les notes du premier des deux accords ſuppoſé complet, appartiennent à la gamme où le ſecond ſe trouve placé.

Si l'on ajoute à cela, qu'il n'eſt jamais permis d'altérer à la fois deux notes entre leſquelles il y auroit diſſonance; & ſi l'on ſe rappelle que toute note qui a été ſuppoſée diſſonante dans le premier accord, ne peut pas devenir conſonante dans le ſecond, on aura tout ce qu'il eſt eſſentiel de ſavoir ſur la ſucceſſion des accords.

Il reſte à parler de l'arrangement des parties, c'eſt-à-dire, connoiſſant quelle eſt la note du premier accord qu'exécute chacun des concertans, à déterminer quelles ſont les notes du ſecond qu'il convient à chacun d'exécuter : l'Auteur énonce comme il ſuit la loi générale ſur l'arrangement des parties.

Il ne faut conſidérer pour cet arrangement que la baſe d'harmonie du *ſecond* des deux accords conſécutifs : il faut la ſuppoſer commune aux deux, parce qu'elle l'eſt en effet ou qu'elle peut toujours l'être. Alors *toute note du premier accord qui ſe trouvera diſſonante ſur cette baſe d'harmonie, doit ou tenir, ou paſſer chromatiquement ſur une note de même nom, ou aller diatoniquement ſur une note conſonante, en obſervant, lorſqu'il y a deux routes, que le repos abſolu exige qu'on deſcende.*

Il faut ajouter qu'il eſt toujours permis de parcourir les différentes notes d'un même accord, celles qui ſe ſuivroient par ce moyen, fuſſent-elles diſſonantes l'une & l'autre ſur la baſe d'harmonie commune; & qu'il n'eſt permis d'employer la marche même des baſes d'harmonie, quand elles diffèrent en effet, que lorſque celle du ſecond accord ne peut pas être méconnue pour telle.

On voit que ces loix ſont en petit nombre & très-ſimples; elles n'exigent pour être entendues, que des connoiſſances en muſique très-élémentaires.

L'Auteur ſe propoſe de les développer dans un Ouvrage particulier, & il a joint à ſes deux Mémoires, qui ont été imprimés dans le Journal des Savans, cahier ſecond de Décembre 1778, cahiers de Janvier & de Février 1781, des exemples notés, propres à faire ſentir l'étendue des applications de ce ſyſtème à la pratique de l'harmonie.

Les Mémoires préſentés à l'Académie en 1778, & deſtinés à l'impreſſion, ſont au nombre de dix-ſept:

Sur la formation du Souſre par la voie humide : Par M. le Veillard.

Sur l'Acide ſulfureux : Par M. Bertholet.

Sur l'action des Acides vitriolique & marin ſur les Huiles : Par M. Cornette.

Sur l'Huile de vitriol glaciale : Par le même.

Sur le Paſtel : Par M. Quatremère.

Sur les Précipitations par les Alkalis cauſtiques ou non cauſtiques : Par M. de Fourcroy.

Obſervations d'Aurores boréales : Par M. Wan Swinden, Correſpondant de l'Académie.

Sur le Mercure doux : Par M. Cornette.

Sur l'Air ſulfureux : Par M. Bertholet.

Sur l'Or fulminant : Par le même.

Sur la combinaiſon des Huiles avec différentes ſubſtances : Par le même.

Sur la décompoſition de l'Acide nitreux : Par le même.

Sur la décompoſition du Sel ammoniac par les intermèdes alkalins : Par M. Cornette.

Sur l'Éclipſe du Soleil du 24 Juin : Par M. Tondu.

Sur les Volcans éteints de Briſgau : Par M. le Baron Diétrick, Correſpondant de l'Académie.

Sur des Foſſiles trouvés dans les Pyrénées : Par M. le Baron de la Peyrouze, Correſpondant de l'Académie.

Sur une nouvelle Lunette : Par M. Navaïre.

Les Machines approuvées par l'Académie, & deſtinées à être inſérées dans le Recueil des Machines, ſont au nombre de trois :

Une nouvelle Pendule : Par M. Robin.

Une Serrure de combinaiſon : Par M. l'Abbé Boiſſier.

Un Pantographe : Par M. Sikes.



ÉLOGE



ÉLOGE
DE M. MALOUIN.

PAUL-JACQUES MALOUIN, Penſionnaire-Chimiſte de l'Académie Royale des Sciences, Profeſſeur de Médecine au Collége Royal, Médecin ordinaire de la feue Reine; naquit à Caen en 1701, de N. Malouin, Conſeiller au Préſidial de cette ville & de N. Poupart.

Le père de M. Malouin, qui le deſtinoit à remplir ſa Charge, l'envoya ſuivre à Paris les études de Droit; mais le jeune homme ſans en rien dire, & ſans prendre conſeil que de lui-même, étudia la Médecine au lieu de la Juriſprudence, en ſorte qu'à ſon retour dans ſa patrie en 1730, ſon père à qui on avoit rendu les meilleurs témoignages de ſa bonne conduite, & qui croyoit le revoir Licentié en Droit, apprit avec ſurpriſe qu'il étoit Docteur en Médecine : il fallut céder à une inclination ſi décidée.

L'oncle & le grand-père de M. Malouin avoient exercé à Caen la même profeſſion; ſa famille, qui s'eſt éteinte avec lui, y étoit une des plus anciennes & des plus conſidérées de la bourgeoiſie : elle avoit produit depuis pluſieurs ſiècles, des hommes diſtingués dans la Médecine & dans la Théologie.

M. Malouin reſta trois ans dans ſa patrie, il revint enſuite à Paris; ſon nom y étoit déjà connu parmi les Médecins : M. Geoffroi, Profeſſeur au Collége Royal, obligé d'interrompre une leçon de Chimie, avoit chargé de l'achever M. Malouin ſon diſciple, alors ſimple Bachelier en Médecine. Quoique le jeune Chimiſte ne ſe fût pas préparé à cette épreuve, il s'acquitta d'une commiſſion ſi honorable

& ſi haſardeuſe, de manière à mériter que M. Geoffroi le choisît déſormais pour le remplacer en ſon abſence, & le déſignât en quelque ſorte pour ſon ſucceſſeur; mais M. Malouin étoit abſent lorſque M. Geoffroi mourut, & ce ne fut qu'en 1767 qu'il remplaça M. Aſtruc, ſucceſſeur de M. Geoffroi.

A ſon retour à Paris en 1734, il ſe livra à la pratique de la Médecine, & fut le Médecin d'un grand nombre d'hommes célèbres dans la Littérature & dans les Sciences: il devoit leur confiance & la réputation que cette confiance lui donna bien-tôt, à M. de Fontenelle dont il étoit le parent, & dont il devint l'ami. M. Malouin eut pluſieurs autres obligations à ce Philoſophe célèbre, & il ſe plaiſoit à publier quelle nobleſſe, quelle ſimplicité, M. de Fontenelle ſavoit mettre dans les ſervices qu'il rendoit, ſouvent ſans attendre qu'on les ſollicitât. Il ſortoit pour les autres de cette négligence, de cette pareſſe qu'il ſe croyoit permis d'avoir pour ſes propres intérêts; ſon amitié étoit vraie & même active; aucun genre de ſenſibilité ne lui étoit étranger; il en connoiſſoit ſur-tout les peines, & il avoua à M. Malouin, qu'elles étoient les plus cruelles qu'il eût éprouvées, quoique les injuſtices qu'il avoit ſi long-temps eſſuyées dans la carrière des Lettres, euſſent fait ſentir bien vivement les peines de l'amour-propre à un homme qui auroit été moins Philoſophe ou plus perſonnel. Il ſavoit, diſoit avec plaiſir M. Malouin, obliger ſes amis à leur inſu, & leur laiſſer croire qu'ils ne devoient qu'à eux-mêmes ce qu'ils tenoient de ſon crédit & de la juſte conſidération qu'il avoit obtenue. Ce deſir d'obliger ne l'abandonna pas dans les dernières années de ſa vie, & ſurvécut même à l'affoibliſſement de ſa mémoire & de ſes organes. Un de ſes amis lui parloit un jour d'une affaire qu'il lui avoit recommandée: *je vous demande pardon*, lui dit M. de Fontenelle, *de n'avoir pas fait ce que je vous ai promis. Vous l'avez fait*, répondit ſon ami; *vous avez réuſſi, & je viens vous remercier. Eh! bien*, dit M. de Fontenelle, *je n'ai point oublié de faire votre affaire; mais j'avois oublié que je l'euſſe*

faite. Cependant on a cru M. de Fontenelle insensible parce que sachant maîtriser les mouvemens de son ame, il se conduisoit d'après son esprit, toujours juste & toujours sage; d'ailleurs il avoit consenti sans peine à conserver cette réputation d'insensibilité; il avoit souffert les plaisanteries de ses sociétés sur sa froideur, sans chercher à les détromper, parce que bien sûr que ses vrais amis n'en seroient pas la dupe, il voyoit dans cette réputation un moyen commode de se délivrer des indifférens sans blesser leur amour-propre.

Le Public nous pardonnera de nous être un peu étendus sur la tendre reconnoissance de M. Malouin pour M. de Fontenelle, reconnoissance que plusieurs de nos Confrères partageoient avec lui; nous avons cru devoir rendre ce témoignage aux vertus d'un Sage, dont l'envie n'a point respecté les cendres, parce qu'uniquement occupée de l'intérêt de blesser les vivans, elle se plaît également, selon que cet intérêt l'exige, à déchirer les morts ou à les accabler de louanges exagérées. L'Académie nous pardonnera plus volontiers encore cette courte digression sur un Philosophe illustre, dont la mémoire lui est chère, qui a été si longtemps le digne organe de cette Compagnie, & qu'elle a lieu maintenant de regretter plus que jamais.

M. Malouin trouvoit parmi les Savans & les Gens de Lettres, des malades souvent peu disposés à croire à la certitude de la Médecine; & peu de Médecins en ont été aussi persuadés que lui. Son enthousiasme excessif pour son Art, qui eût paru un ridicule dans un Médecin ignorant, devenoit une singularité piquante dans un Médecin éclairé: la franchise, vertu qu'il portoit au plus haut degré, ne lui permettoit pas de rien dissimuler de cet enthousiasme. Un Philosophe célèbre s'étoit trouvé guéri d'une maladie singulière, après avoir pris assidûment pendant quatre ans un remède ordonné par M. Malouin, il vint le remercier: *vous êtes digne d'être malade,* lui dit M. Malouin. Il ne pouvoit pardonner à ceux qui, ayant été guéris par des Médecins, continuoient à faire des plaisanteries sur la Médecine; cette conduite lui paroissoit

une véritable ingratitude, & il rompit avec un grand Écrivain qu'il avoit traité avec ſuccès, & qui depuis dans ſes Ouvrages, avoit attaqué la Médecine & ſur-tout les Médecins.

Mais le deſir d'être utile l'emportoit en lui ſur ſon humeur contre les détracteurs de la Science qu'il profeſſoit. Dans une diſpute aſſez vive qu'il avoit eue avec l'un d'eux, il avoit répondu ſérieuſement, & même avec humeur, à quelques-unes de ces plaiſanteries ſur la Médecine, qui même ne prouvent pas toujours l'incrédulité de ceux qui les font: ce prétendu incrédule tomba malade quelque temps après; M. Malouin vint le trouver, *je ſais que vous êtes malade*, lui dit-il, *& qu'on vous traite mal, je ſuis venu, je vous hais, je vous guérirai, & je ne vous verrai plus:* il tint parole ſur tous les points.

Il regardoit la confiance dans les Médecins comme une preuve de la juſteſſe & de la ſupériorité de l'eſprit, & l'on étoit étonné quelquefois de l'entendre ajouter aux juſtes éloges qu'il donnoit à M.rs de Fontenelle & de Voltaire, que dans leurs écrits, ces deux hommes illuſtres avoient conſtamment reſpecté la Médecine. On oppoſoit un jour à cette opinion l'exemple de Molière, à qui perſonne ne pouvoit refuſer ni un grand génie, ni une raiſon ſupérieure: *voyez auſſi comme il eſt mort*, répondit M. Malouin; mot d'autant plus plaiſant qu'il eſt vrai, & ſans doute le Médecin de Molière (car on ſait qu'il en avoit un) auroit pu lui dire avec raiſon: *faites des Comédies contre nous, ſi vous voulez, mais la Médecine vous défend de les jouer, ſous peine de la vie.*

On pourroit demander lequel doit inſpirer le plus de défiance à un malade, ou d'un Médecin trop perſuadé de la certitude de ſon Art, ou d'un Médecin pyrrhonien qui traite une maladie qu'il n'eſt pas ſûr de connoître, & donne des remèdes dont l'effet lui paroît douteux à lui-même? Cette queſtion n'eſt peut-être pas facile à décider: le doute ſemble caractériſer un eſprit plus ſage; mais il eſt ſi facile

& ſi commode de douter de tout, on acquiert ſi aiſément par ce moyen la réputation d'un bon eſprit, que la charlatanerie & l'ignorance ont auſſi appris à douter. La bonne ſoi de M. Malouin étoit ſi connue, que l'excès de ſa confiance ne lui fit rien perdre de celle de ſes malades.

Il entra comme Chimiſte à l'Académie en 1742; il s'étoit fait connoître auparavant par ſa Chimie médicale, Ouvrage utile dans un temps où les remèdes chimiques étoient vantés par quelques Médecins avec un enthouſiaſme auſſi ridicule que dangereux, & rejetés entièrement par les autres, d'après un préjugé abſurde qui les regardoit comme moins naturels que les remèdes tirés du Règne végétal. On ne ſongeoit pas que c'eſt la même Nature qui produit les mixtes des laboratoires & ceux des jardins.

M. Malouin nous a donné pluſieurs Mémoires de Chimie; on y remarque une vaſte érudition, beaucoup de ſcrupule & d'exactitude dans les expériences; mais nous ne pouvons diſſimuler qu'on en tireroit peu de vérités nouvelles.

La Chimie doit à Stahl l'heureuſe révolution qui en a fait une branche, ou plutôt une des baſes de la Phyſique, & cet illuſtre Chimiſte étoit encore peu connu en France, lorſque M. Malouin s'étoit appliqué à l'étude des Sciences. Les Ouvrages de Stahl, malheureuſement trop obſcurs, avoient beſoin qu'un homme né avec le génie de la Chimie, nous apprît à les entendre, & c'eſt une des obligations que nous avons eues à M. Rouelle; mais lorſque M. Rouelle commença ſes Cours, M. Malouin ſe livroit à d'autres études. Nous ſommes donc contraints d'avouer qu'il n'a point contribué aux progrès rapides que la Chimie a faits en France, dans ces derniers temps, & nous l'avouerons, avec d'autant moins de peine, que la Nature lui avoit accordé dans un autre genre des talens diſtingués.

Auſſi renonça-t-il bientôt à la Chimie pour ſe donner tout entier à la Médecine: obligé quelquefois, malgré ſon enthouſiaſme, de reconnoître l'incertitude de ſon Art, il regardoit cette incertitude comme une ſuite des mauvaiſes méthodes,

& non comme un défaut attaché à la Science. Il avoit vu qu'au milieu de ces révolutions, qui ont changé vingt fois la Physique systématique, & rangé successivement les Philosophes sous vingt drapeaux différens, la doctrine d'Hippocrate subsistoit encore entière sur les ruines de tant de systèmes; que si on en excepte les Ouvrages des Géomètres, des Astronomes grecs, & le Livre des animaux d'Aristote, Hippocrate est presque le seul des Anciens où l'on puisse trouver des vérités; qu'enfin, comme les Mathématiques & l'Histoire Naturelle ont fait plus de progrès réels que la Médecine, les Livres d'Hippocrate sont les seuls livres de l'Antiquité où les Modernes puissent apprendre quelque chose, & que même, tandis que les autres Ouvrages ne sont plus pour nous que des monumens de l'histoire de l'esprit humain, ceux d'Hippocrate sont encore une source inépuisable d'instruction. D'après cette considération, qui étoit le plus fort argument que M. Malouin employât pour prouver la certitude de la Médecine, il crut que pour en accélérer les progrès, & la rendre plus certaine, il falloit suivre la méthode d'Hippocrate, multiplier les observations, rapprocher des symptômes des maladies, toutes les circonstances qui peuvent influer sur la santé des hommes, l'air, ses variations, sa température, l'humidité, la position des lieux, la nourriture, la manière de vivre de chaque pays & de chaque état de la société. M. Malouin, fixé à Paris, exécuta pour cette capitale & ses environs, ce plan qu'il seroit à desirer que l'on embrassât pour tous les lieux qui peuvent fournir des observateurs, & il continua son travail pendant dix années, jusqu'au moment où il renonça à une pratique étendue.

C'est d'après les Mémoires qu'il a donnés sur ce sujet, qu'il faut apprécier son talent; c'est-là qu'on reconnoît un Observateur exact, timide quand il faut juger, mais hardi dans ses vues, habile à saisir des rapports, sachant les présenter d'une manière frappante, rassemblant tout ce que les Médecins ont écrit, mais discutant leurs opinions, & ne les adoptant que lorsqu'elles sont d'accord avec la Nature,

A la mort de M. Dumoulin, il devint un des Médecins les plus employés de Paris : cette vogue dura vingt-deux mois, au bout desquels il se trouva assez riche pour ne songer qu'au repos ; il acheta une charge de Médecin du Grand-Commun à Versailles. *Je veux me retirer à la Cour,* disoit-il, expression singulière, & qui peut-être ne peut convenir qu'à un Médecin de Paris très-employé. Cette prompte retraite d'un homme qui aimoit à faire le bien, prouve qu'il étoit réellement plus persuadé de la certitude de la Médecine que de ses propres talens.

Ce fut alors qu'il cessa de donner ses Mémoires sur les maladies qui règnent à Paris; ouvrage utile dont jusqu'ici personne ne s'étoit chargé à sa place : heureusement ce travail, étendu même à la France entière & suivi sur un plan plus vaste & plus régulier, va devenir une des principales occupations d'une Société nouvelle dont l'établissement dut faire espérer à M. Malouin la prompte conversion des détracteurs de la Médecine; car il étoit trop persuadé pour craindre que des expériences plus répétées, faites plus en grand & d'une manière plus suivie, ne pussent aboutir qu'à augmenter l'endurcissement des incrédules.

Comme il ne vouloit pas malgré son absence rester inutile à l'Académie, il se chargea de décrire l'Art du Boulanger, Art important, peu connu & qui précisément, parce qu'il est de tous les Arts le plus nécessaire au Peuple, est aussi celui de tous sur lequel des préjugés qui s'étendent depuis les procédés mécaniques jusqu'aux soins de la Législation, sont les plus nombreux, les plus absurdes, les plus funestes & peut-être les plus difficiles à déraciner. Les objets qui nous intéressent le plus, sont en général ceux sur lesquels nous raisonnons le plus mal, & il faut savoir ne rien craindre pour voir la vérité aussi-bien que pour la dire.

Cet Art tient à la fois à la Médecine & à la Chimie; c'étoit pour M. Malouin une double raison de s'en occuper: aussi l'embrassa-t-il dans toute son étendue ; les moyens de conserver le blé, d'en connoître les différentes qualités, de le

réduire en farine, les diverses espèces de farines, leur degré de bonté, l'analyse du blé, l'histoire naturelle des Plantes, qui, dans les différens climats, fournissent, soit de la farine, soit une nourriture journalière qui remplace le pain, la description de la méthode de former avec les substances farineuses du pain de toute espèce, ou des pâtes sèches & non fermentées, la manière de préparer des alimens avec toutes les farines & tous les mucilages qu'on a cru jusqu'ici pouvoir servir de nourriture, le plus ou le moins de salubrité de tous ces alimens, les effets qu'ils produisent sur la constitution de l'homme, soit comme nourriture habituelle, soit comme régime convenable dans l'état de maladie, tous ces objets sont traités avec détail dans l'Ouvrage de M. Malouin, & s'il s'y trouve des erreurs, ce sont pour la plupart des opinions qui régnoient encore dans le temps où il a publié son Ouvrage, & qui n'ont été détruites que par des expériences plus récentes.

M. Parmentier vient de donner sur l'Art de la Boulangerie, un Traité, auquel l'Académie a accordé son suffrage, du moins sur la partie physique, la seule qui soit de notre ressort: il a combattu dans cet Ouvrage quelques opinions de notre Académicien, en rendant justice au mérite de ses recherches, & il a joint aux travaux de M. Malouin, un usage heureux des vérités nouvelles, qu'une analyse plus parfaite des substances farineuses a fait découvrir.

M. Parmentier avoit lû, à une séance de l'Académie, cette partie de son Ouvrage, où quelques idées de M. Malouin sont attaquées: celui-ci étoit présent à la séance; M. Parmentier craignoit ses regards, sachant à quel point l'amour-propre est facile à blesser, & ignorant combien M. Malouin étoit supérieur à ses foiblesses; il fut bientôt rassuré; à peine sa lecture est-elle finie, que M. Malouin vient à lui, l'embrasse: *recevez mon compliment*, dit-il; *vous avez mieux vu que moi.*

M. Malouin étoit d'un caractère franc, & assez franc pour paroître dur quelquefois; mais cette dureté n'étoit que dans son ton ou dans son humeur; elle n'alloit pas plus loin: il pouvoit

pouvoit choquer ceux qui combattoient ſes opinions, & ſur-tout ſon reſpect pour la Médecine, mais on voyoit aiſément qu'il eût été fâché de les bleſſer.

Comme il croyoit très-ſincèrement à ſon Art, il l'employoit pour lui-même; & ſur-tout pendant les dernières années de ſa vie, toutes les heures de ſa journée étoient ſcrupuleuſement réglées, d'après un régime qu'il s'étoit impoſé; ce régime différoit beaucoup de la vie commune, & par conſéquent le ſéparoit preſqu'entièrement de la Société; mais il étoit ſoigneuſement calculé ſur les changemens que, ſelon M. Malouin, l'âge produit dans l'économie animale.

S'il n'a voulu, par ce régime, que ſe procurer une vieilleſſe ſaine & robuſte, terminée par une mort prompte & ſans douleurs, il ne s'eſt point trompé; il mourut à Verſailles d'une attaque d'apoplexie, le 3 Janvier 1778.

La mort en ſurprenant M. Malouin, n'a point prévenu l'éxecution d'un projet qu'il avoit formé pour contribuer aux progrès de la Médecine; témoin depuis long-temps des travaux de la Faculté, il voyoit avec douleur ces travaux enſevelis dans ſes Regiſtres, ne ſervir qu'à l'inſtruction de ſes Membres, & le dépôt immenſe des faits que la Faculté raſſemble être perdu pour les Sciences & pour l'Humanité.

Il a fondé pour cette Compagnie une Aſſemblée publique, où chaque année on prononcera l'éloge des Membres que la Faculté a perdus, & où elle rendra compte des travaux de l'année. Jaloux de déſabuſer le Public, qu'il avoit trouvé ſouvent ſi injuſte envers les Médecins, il a cru que pour lui apprendre à les eſtimer, il ne falloit que lui apprendre à les mieux connoître.

Sa place de Penſionnaire-Chimiſte, a été remplie par M. Lavoiſier, déjà Aſſocié dans la même Claſſe.





ÉLOGE

DE M. DE LINNÉ.

M. J. A. N. C. de Condorcet

CHARLES DE LINNÉ, plus connu ſous le nom de Linnæus, Chevalier de l'Ordre de l'Étoile polaire, premier Médecin du Roi de Suède, Profeſſeur de Médecine & de Botanique dans l'Univerſité d'Upſal, un des huit Aſſociés-Étrangers de l'Académie des Sciences, de la Société Royale de Médecine de Paris, de la Société Royale de Londres, des Académies de Berlin, de Péterſbourg, de Stockolm, d'Upſal, de Bologne, d'Édimbourg & de Philadelphie, naquit dans la Province de Smolande en Suède, le 23 Mai 1707.

« De tous ces titres académiques (dont nous n'avons donné
» ici qu'une liſte très incomplète), aucun ne l'a autant flatté
» que celui d'Aſſocié-Étranger de l'Académie des Sciences,
» dont il a été revêtu le premier de ſa Nation, & juſqu'à préſent le ſeul. »

Ce ſont les propres termes de M. de Linné, dans un Mémoire qui nous a été envoyé de ſa part: telle étoit l'expreſſion de ſa reconnoiſſance pour l'Académie, peu de temps avant ſa mort, dans ces momens où l'homme ceſſant d'être ſenſible aux diſtinctions frivoles de la vanité, peut l'être encore aux honneurs de la gloire.

Cet hommage rendu à l'Académie par un Savant illuſtre que l'Europe avoit comblé de titres Littéraires, honore à la fois cette Compagnie & la Nation; il prouve ſur-tout combien eſt ſage la loi qui fixe à huit ſeulement le nombre de nos Aſſociés-Étrangers: en effet, quel homme de génie ne

ſeroit flatté de voir ſon nom inſcrit dans une liſte ſi courte, entre le Czar Pierre & Newton?

Le père de M. de Linné, qui exerçoit les fonctions de Miniſtre dans le village de Stenbrohult, s'amuſoit à cultiver des Plantes; & ſon fils apprit dès l'enfance à les aimer & à les étudier. Il avoit reçu de la Nature cette activité d'eſprit qui ne permet point de repos tant qu'il reſte quelque choſe à voir ou à découvrir; ce coup-d'œil prompt & juſte qui ſaiſit tout ce qui mérite d'être obſervé, & qui ne voit les objets que tels qu'ils ſont; cette force de tête néceſſaire pour raſſembler des faits épars, & ne former qu'une grande vérité d'une foule de vérités iſolées. Ainſi en offrant des Plantes aux premiers regards de M. de Linné, en déterminant par-là ſur quels objets ſon eſprit devoit s'exercer, le haſard le fit Botaniſte: mais déjà la Nature avoit préparé un grand homme.

A l'âge de vingt-un ans, il ſe rendit à Upſal, qu'on pouvoit alors regarder comme la Capitale littéraire de la Suède. Olaüs Celſius, qui étoit à la fois un Érudit très-profond & un Naturaliſte habile, ſentit le mérite du jeune Linné & devina ſon génie; il lui ſervit de père, & lui procura toutes les inſtructions, tous les encouragemens que ſes connoiſſances & ſon crédit le mettoient en état de donner à ce jeune homme, qui croiſſoit pour changer la face de la Botanique.

M. de Linné obtint à vingt-cinq ans, dans l'Univerſité d'Upſal, la Chaire que le ſavant Botaniſte Rudbeck, accablé d'années & de travaux, étoit obligé d'abandonner: mais cette place ne ſuffiſoit pas à l'activité du nouveau Profeſſeur, & il quitta bien-tôt Upſal, mais en conſervant ſa Chaire & par les ordres même de l'Univerſité, qui préféra ſagement le bien des Sciences & ſa propre gloire à l'obſervation de ſes règlemens.

D'abord il parcourut la Lapponie, la Dalécarlie, la plupart des provinces de la Suède, étendant ſes obſervations à tout ce qui peut intéreſſer un Philoſophe, occupé en même temps d'acquérir des lumières & d'en faire des applications utiles, enrichiſſant la Botanique ou de vues nouvelles, ou de Plantes

inconnues, & apprenant aux Suédois, ſoit à connoître les productions de leur ſol, ſoit à en profiter. Soumis dans ces voyages à toutes les privations, expoſé, dans des pays inhabités, aux rigueurs d'un climat terrible, tantôt graviſſant entre des rochers, tantôt s'enfonçant dans des mines profondes, obligé de braver des dangers de toute eſpèce, & de longues fatigues plus difficiles encore à ſupporter que les dangers, M. de Linné ne ſe repoſoit du travail de la journée que par un autre, celui de recueillir ſes obſervations & de préparer les objets qu'il avoit ramaſſés.

Après ces voyages, il en fit de plus lointains & de moins pénibles: il parcourut le Danemarck, l'Allemagne, une partie de la France: il s'arrêta long-temps en Hollande & en Angleterre, étudiant dans des Herbiers ou dans des Jardins, les Plantes que la Nature a refuſées à l'Europe; conſultant les Botaniſtes les plus célèbres; Dillen à Londres, Juſſieu à Paris, & ſe rendant leur diſciple pour ſe montrer bien-tôt digne d'être leur rival.

Plus il étudioit la Botanique, plus il ſentoit que cette Science devenue immenſe dans ſes détails, avoit beſoin qu'une main réformatrice vînt y produire une de ces grandes révolutions qui attachent le nom de leurs Auteurs à l'hiſtoire de l'eſprit humain.

Tournefort avoit donné le premier une méthode vraiment ſyſtématique de claſſer les Plantes, & M. de Linné aſpiroit à être dans ſon ſiècle ce que Tournefort avoit été dans le ſien; ſachant bien que dans les Sciences on peut aller plus loin que ſes prédéceſſeurs, ſans néanmoins s'élever au-deſſus d'eux, & qu'il eſt un degré de talent où l'on ne peut plus apercevoir entre deux hommes livrés aux mêmes recherches, d'autre différence que celle de leur ſiècle. M. de Linné chercha les caractères fondamentaux de ſon ſyſtème dans les parties des Plantes qui ſervent à leur reproduction. Les Botaniſtes Allemands ont prétendu qu'il devoit la première idée de ce ſyſtème à Burkard; & dans les mêmes Ouvrages, ils revendiquoient, en faveur de Camérarius, la méthode de Tournefort;

ils ſoutenoient que Jungius, & un autre Camérarius, avoient été les guides de Vaillant, à qui M. de Linné accordoit le mérite d'avoir bien décrit le premier les étamines & les piſtils, & connu leur uſage pour la fécondation des Plantes. Ces prétentions peuvent être fondées; mais les conſéquences qu'on a voulu en tirer pour diminuer le mérite de M. de Linné & des deux Botaniſtes françois, nous paroiſſent injuſtes. Trouveroit-on dans l'hiſtoire des Sciences une grande théorie dont les premières idées, les détails & les preuves appartiennent à un ſeul homme? Et n'eſt-il pas juſte d'accorder plutôt la gloire d'une découverte à celui à qui on en doit le développement & les preuves, à celui qui avec autant de génie a été vraiment utile; qu'à l'auteur d'une première idée toujours vague, ſouvent équivoque, & dans laquelle on n'aperçoit quelquefois le germe d'une découverte que parce qu'un autre l'a déjà développée?

La fécondation s'opère dans les Plantes, lorſque les pouſſières des étamines s'arrêtent ſur le ſtigmate des piſtils, ſtigmate qui, dans la ſaiſon de la fécondation, eſt ou garni d'un velouté ou humecté d'une liqueur gluante; mais les grains de cette pouſſière ne ſont pas encore ce qui doit féconder le germe de la Plante; le ſtigmate eſt ſouvent ſéparé de ce germe par un long ſtilet, creux à la vérité, mais à travers lequel les pouſſières, toutes petites qu'elles ſont, ne pourroient pénétrer. La Nature y a remédié, en faiſant de chaque pouſſière un corps organique, doué d'élaſticité; imprégné de l'humidité qu'il rencontre ſur le ſtigmate, il ſe briſe, & lance, ſoit une pouſſière plus fine encore, ſoit une liqueur très-tenue, qui pénètre à travers le ſtilet, & va féconder le germe. Cette dernière obſervation eſt dûe à M. de Juſſieu, comme nous l'avons dit dans ſon éloge; M. Needham l'a développée depuis, & l'a confirmée par des recherches plus étendues; & il ſemble qu'il ne puiſſe être donné aux Obſervateurs de rien voir au-delà dans les merveilles de la reproduction des êtres organiſés.

Le nombre des étamines ou des parties mâles des Plantes,

celui des parties femelles ou des piſtils, la poſition de ces étamines & de ces piſtils ſur les différentes parties de la fleur, ou leur diſtribution dans des fleurs ou ſur des individus ſéparés, tous ces caractères varient dans les différentes eſpèces de Plantes.

Dans les eſpèces les plus communes, les deux ſexes ſont réunis ſur une même fleur, à laquelle on a donné le nom de *fleur hermaphrodite ;* dans d'autres eſpèces ils ſont réunis ſur le même individu, mais ſur des fleurs différentes, tandis que dans quelques-unes, les fleurs mâles & les fleurs femelles ſont ſur des Plantes ſéparées. Quelquefois un individu porte à la fois des fleurs hermaphrodites & des fleurs femelles; dans quelques-unes de ces eſpèces de Plantes, il arrive que les étamines & les piſtils des fleurs hermaphrodites ne parviennent pas en même temps à l'état de perfection, ou même que leurs piſtils n'y parviennent jamais, & alors le concours des autres fleurs eſt néceſſaire à la fécondation: dans d'autres eſpèces, les fleurs hermaphrodites ſuffiroient ſeules à la production; ainſi on aperçoit également dans les deux cas, un luxe de la Nature, qui, occupée de perpétuer les eſpèces, ſemble en avoir multiplié les moyens, même au point d'en préparer d'inutiles.

Lorſque les parties mâles & les parties femelles, les étamines & les piſtils ſe trouvent dans une même fleur, leur diſpoſition paroît quelquefois s'oppoſer à la reproduction; mais ſi le piſtil eſt plus élevé que le ſommet des étamines, alors l'anthère des étamines, c'eſt-à-dire la véſicule qui les termine, & qui renferme la pouſſière fécondante, lance avec force cette pouſſière qui s'élève juſqu'au piſtil, ou bien le piſtil ſe courbe pour ſe joindre aux anthères: ſi les fleurs ſont diſpoſées ſoit en grappes, ſoit en épis, les fleurs inférieures ſont fécondées par celles qui ſont au-deſſus; quelquefois les fleurs penchées vers la terre, & dont alors les étamines ſe trouvent au-deſſous du piſtil, ſe relèvent dans le temps de la fécondation, pour donner à ces organes la diſpoſition néceſſaire à la reproduction de la Plante.

Dans les eſpèces où ces parties ſont placées ſur des fleurs différentes, mais ſur le même individu, le vent ébranlant les branches des Plantes, fait tomber des étamines une pluie de pouſſière, qui eſt reçue par les piſtils.

Enfin, ſi les individus eux-mêmes ſont ſéparés, les pouſſières emportées au loin par le vent, répandues dans tout l'eſpace, & agitées en tout ſens, parviennent enfin juſqu'aux fleurs femelles : dans quelques eſpèces même, des inſectes conformés de manière que les fleurs des deux individus ſont néceſſaires à leur exiſtence, portent, d'une Plante à l'autre, cette pouſſière fécondante ; tel eſt ſelon M. de Linné, le véritable ſecret de cette opération merveilleuſe, décrite par Tournefort, & uſitée dans les îles de l'Archipel, où les habitans, pour ſe procurer des figues plus groſſes, portent ſur les figuiers femelles certains inſectes, qu'ils ont auparavant fait éclore ſur les figuiers mâles. On diroit que la Nature n'a mis à l'accompliſſement de ſes deſſeins, des obſtacles, en apparence inſurmontables, que pour déployer, avec plus de grandeur, ſa puiſſance & ſes reſſources dans les moyens employés à les ſurmonter.

Ce fut dans ces parties, conſtruites par la Nature avec tant de ſoin, & deſtinées par elle à la perpétuité des eſpèces, que M. de Linné crut devoir chercher les caractères de la claſſification des Plantes.

Les étamines lui ſervirent pour former les premières grandes diviſions, & il tira des piſtils les caractères de ſes diviſions ſecondaires : pour déterminer enſuite les genres, il employa les autres parties de la fructification, comme le nombre & la forme des ſemences, la nature des corps deſtinés à les recevoir & à les protéger, le nombre, l'arrangement des pétales, la forme des fleurs, la ſtructure du calice, qui, tantôt enveloppe le fruit après la chute des pétales, tantôt tombe avec elles. A l'égard des eſpèces, M. de Linné emploie pour les diſtinguer, la manière dont les fleurs ſont diſpoſées ſur la Plante, & naiſſent de ſes branches ; les parties de ſtructure différente qui enveloppent les fleurs

naiſſantes ou qui les défendent; les vrilles qui ſoutiennent la Plante; la forme de ſes racines, de ſa tige, de ſes feuilles; la ſtructure des boutons deſtinés à former de nouvelles branches; la manière dont les feuilles nouvelles y ſont pliées.

Après avoir formé ce plan, M. de Linné n'avoit fait encore qu'une très-petite partie du grand ouvrage qu'il méditoit: il s'en falloit de beaucoup que toutes les parties des Plantes euſſent été exactement décrites par les Botaniſtes; il falloit donc faire une étude plus approfondie de toutes les Plantes, en examiner toutes les parties, les ſuivre dans le cours entier de la durée de la Plante, obſerver les diverſes formes qu'elles ont dans les différentes eſpèces, les changemens qu'elles éprouvent dans chacune, afin de pouvoir diſtinguer ce qui n'eſt qu'accidentel à l'âge de la Plante, au climat ou à la culture, d'avec ce qui eſt eſſentiel à l'eſpèce: il falloit parmi ces caractères eſſentiels, choiſir les plus frappans, les plus faciles à obſerver, les plus propres à diſtinguer chaque eſpèce de l'eſpèce voiſine; il falloit enfin, pour ces objets nouveaux, créer une langue nouvelle. Tel étoit le travail qu'impoſoit à M. de Linné l'exécution de ſa méthode.

On ſe diſpenſe trop ſouvent d'eſtimer ces travaux immenſes, en diſant qu'ils ne demandent que de la patience & du temps; mais la vie de ceux qui exécutent ces grandes entrepriſes eſt-elle plus longue que celle des autres hommes? M. de Linné n'avoit pas trente ans, & déjà ſon Ouvrage étoit preſque terminé: quel étoit donc pour lui ce ſecret de doubler la durée du temps? N'étoit-ce pas quelque choſe de plus que de l'aſſiduité & de la patience? & ſi ce talent de porter rapidement ſon attention ſur une foule d'objets, de les bien voir, de les voir tout entiers, n'eſt pas le génie de l'obſervation, c'eſt du moins une qualité très-rare, très-précieuſe, & ſans laquelle ce génie ne peut exiſter.

Ce ſyſtème fit une révolution dans la Botanique; la plupart des Écoles de l'Europe s'empreſsèrent de le ſuivre, & de publier les Catalogues de leurs Plantes, rangées d'après la méthode de Linnæus. La nomenclature des Plantes aſſujettie

à un

à un ordre facile à ſaiſir, l'art de les connoître, réduit à un petit nombre de principes généraux, rendirent l'étude de la Botanique moins pénible & moins rebutante: les nouvelles merveilles que M. de Linné avoit découvertes dans les Plantes excitèrent un nouvel enthouſiaſme pour une Science, qui, déjà ſi ſéduiſante, parce que l'étude y a preſque toujours l'air d'un délaſſement, l'eſt ſur-tout dans l'âge où l'on ſe choiſit un objet d'étude. Elle ſatisfait à la fois l'activité de l'eſprit & celle du corps, le beſoin du mouvement & celui de l'occupation; elle offre à un âge avide de jouir des plaiſirs toujours variés, & chaque jour offrant quelque objet nouveau, le travail de chaque jour ne manque preſque jamais d'avoir ſa récompenſe: les jouiſſances ſont ſans doute moins vives que dans les Sciences, où la vérité eſt le prix d'une méditation longue & profonde, mais elles ſont plus fréquentes, & elles coûtent moins de peine. Nous ne parlons pas ici de l'utilité plus ou moins grande des différens genres de Sciences, & de la gloire plus ou moins brillante qu'elles procurent: ſans doute ces motifs animent & ſoutiennent puiſſamment tous les hommes nés pour de grandes choſes; mais quand il s'agit de ſe livrer à des occupations où le plaiſir du travail en eſt la première récompenſe, ce n'eſt jamais que l'attrait de ce plaiſir qui détermine notre choix.

Les jeunes Botaniſtes accoururent en foule chercher des inſtructions auprès de M. de Linné; il les pénétra de ſon zèle, & bientôt la terre entière fut couverte de ſes Diſciples: la Nature fut interrogée à la fois au nom d'un ſeul homme, de la cime des montagnes de la Norwège aux ſommets des Cordillères & de l'Atlas, des rives du Miſſiſſipi aux rives du Gange, des glaces du Groënland aux glaces de l'hémiſphère auſtral. Tous ces voyages, qui paroîtroient demander qu'un grand Roi voulût déployer en faveur des Sciences ſa magnificence & ſon pouvoir, un ſimple particulier les fit entreprendre, ſans autre force que l'empire du génie ſur des ames également avides d'inſtruction & de gloire, & ſans autre récompenſe pour ſes Élèves que l'honneur de rapporter

aux pieds de leur Maître les richeſſes qu'ils enlevoient à la Nature.

Trois de ces Savans, Haſſelquiſt, Forskahl & Lœfling, ſuccombèrent à leurs fatigues; ils moururent éloignés de leur patrie, au milieu de peuples incapables de ſentir combien cette mort étoit glorieuſe & touchante, ne remportant d'autre prix d'une vie ſacrifiée à l'étude de la vérité, que l'eſpérance incertaine qu'un jour le fruit de leurs travaux ſeroit remis à M. de Linné, & que leur nom réuni au ſien, n'échapperoit point à la renommée. M. de Linné, en recevant ces reſtes précieux, pleura ſes Diſciples : il revit leurs Ouvrages, les donna au Public; & cet honneur funèbre leur fit naître des ſucceſſeurs, que l'exemple de leur mort ne put rebuter.

Le ſyſtème de Linnæus a ſans doute quelques endroits foibles; mais juſqu'ici aucune autre méthode n'a réuni autant d'avantages; peut-être même les défauts qu'on reproche à ce ſyſtème ſont-ils inévitables dans toute méthode artificielle : faut-il pour cela les proſcrire, & ſe condamner à marcher à tâtons, parce que le flambeau qu'on nous préſente peut s'éteindre quelquefois?

Pluſieurs Botaniſtes ont relevé des fautes dans les détails de la méthode de M. de Linné. Quand il a trouvé leurs remarques juſtes, il s'eſt corrigé; lorſqu'elles lui ont paru mal fondées, il a fait comme s'il les eût ignorées. « Toutes les diſcuſſions » dans les Sciences naturelles, du moins lorſqu'elles ont un » objet réel, ſe réduiſent toujours, dit M. de Linné, à des » faits bien ou mal obſervés, & alors les efforts réunis de tous » les Savans ne peuvent ni établir une erreur, ni ébranler une vérité ». Il n'eût donc combattu que pour ſon amour-propre; mais le temps qu'il eût conſacré à défendre ſa gloire, il aimoit mieux l'employer à l'accroître par de nouveaux Ouvrages.

On a reproché enfin à M. de Linné d'avoir rendu la nomenclature de la Botanique trop facile, & d'avoir par-là donné lieu à une foule d'ouvrages médiocres. Cette objection nous paroît prouver ſeulement les progrès que la Botanique a faits entre ſes mains. Rien ne montre mieux peut-être

combien une Science eſt avancée, que la facilité de faire ſur cette Science des livres médiocres, & la difficulté d'en faire qui contiennent des choſes nouvelles.

M. de Linné a publié une longue ſuite d'Obſervations ſur les végétaux & les animaux comparés enſemble. Les végétaux naiſſent, vivent & meurent comme les animaux; ils ſe nourriſſent, croiſſent & dépériſſent comme eux; ils ont, comme eux, un principe interne de mouvement. M. de Linné obſerva de plus que les Plantes ont des inſtans de mouvement & de repos, de ſommeil & de veille; qu'elles ſubiſſent ces alternatives dans des ſerres où l'on entretient jour & nuit une chaleur égale, & qu'ainſi ces phénomènes ne ſont pas l'effet de la chaleur plus ou moins grande, mais de la préſence ou de l'abſence de la lumière; qu'enfin les feuilles dans quelques Plantes, & les anthères des étamines dans un plus grand nombre, donnent des ſignes d'irritabilité. La ſenſibilité, & le mouvement ſpontané qui en eſt la ſuite, paroiſſent ſeuls diſtinguer la vie des Plantes & celle des Animaux.

On obſerve des rapports encore plus frappans entre l'œuf d'un animal & la ſemence d'une Plante, dans la manière dont les germes ſont fécondés, ou dans les loix de leur développement. Enfin la reproduction par bouture, cette manière de multiplier & d'éterniſer l'exiſtence d'un même individu, exiſte dans les deux règnes, & forme une ſorte d'analogie entre les Plantes les plus parfaites & les Animaux les plus imparfaits. Auſſi quand on obſerve la chaîne de tous les genres d'animaux, depuis les quadrupèdes juſqu'aux polypes, on voit l'organiſation ſe ſimplifier, le mouvement ſpontané & la ſenſibilité s'affoiblir, & en même temps les organes deſtinés à recevoir la nourriture, ſe multiplier, le principe de la vie, au lieu d'appartenir ſeulement à l'individu, ſe trouver tout entier dans pluſieurs de ſes parties, & l'Animal ſe rapprocher de la Plante juſqu'à n'en être plus ſéparé que par des nuances imperceptibles.

Ces rapprochemens ne ſont pas les ſeuls que M. de Linné

ait cru trouver entre les deux règnes; il en a saisi de très-singuliers entre les substances dont les plantes & les animaux sont composés : nous n'entrerons dans aucun détail sur ces idées ingénieuses, mais trop systématiques. Ceux qui n'ont vu dans M. de Linné qu'un simple Nomenclateur, & qui font consister le talent d'un Naturaliste moins dans l'art de bien voir & de bien lier les faits, que dans celui de former des conjectures hardies & de hasarder des vues générales, ne pourront du moins s'empêcher d'estimer M. de Linné en lisant cette partie de ses Ouvrages.

La Botanique, quelque immense qu'elle soit dans ses détails, ne suffisoit pas à son activité ; il osa former le projet de décrire & de classer tous les êtres de la Nature: il choisit pour les caractères du règne animal, les parties destinées aux fonctions les plus importantes de la vie; le cerveau ou l'organe, d'où partent les nerfs; le cœur, ou en général les viscères dans lesquels réside la force qui fait circuler les liqueurs; les organes de la respiration ; les mamelles, le nombre & la forme des dents ou la figure du bec ; le nombre & la forme des parties qui servent au mouvement progressif: il savoit par ses observations qu'une grande ressemblance dans ces parties essentielles, annonce nécessairement entre des espèces un grand nombre d'autres rapports. Il auroit pu sans doute étendre aux Animaux la méthode qu'il avoit employée pour les Plantes, mais il craignoit que, malgré toute la modestie & la gravité qu'il pourroit mettre dans ses Leçons ou dans ses Ouvrages, cette méthode n'offrît trop souvent à ses Élèves des images que les Naturalistes même n'ont pas toujours le privilége de pouvoir contempler avec une entière indifférence ; il écarta même parmi les organes nécessaires aux autres fonctions de la vie, ceux qu'on ne pouvoit observer sans des recherches anatomiques ; il ne vouloit pas qu'on se crût obligé de déchirer les animaux pour parvenir à les connoître ; ainsi la pureté de ses mœurs & son humanité ont nui peut-être à la perfection, & sur-tout à l'unité de son système. M. de Linné classa les minéraux presque uniquement d'après leurs formes extérieures :

les Chimistes ont fait contre cette méthode des objections, auxquelles il paroît bien difficile de répondre, mais les Naturalistes, ou du moins les Disciples de M. de Linné en auroient pu faire d'aussi fortes contre un système dont l'analyse chimique auroit fourni les premiers caractères; d'ailleurs, lorsque M. de Linné a publié sa méthode, l'analyse des substances minérales étoit bien éloignée du degré de perfection, où l'un de ses compatriotes, le célèbre Bergman, l'a portée depuis. Toute méthode de nomenclature est nécessairement dépendante de l'état des Sciences, à l'époque où elle a été proposée, & ce n'est qu'en la comparant avec leurs progrès, qu'on peut l'apprécier avec justice. Mais en convenant des défauts attachés à toutes les méthodes artificielles, on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'il faut, pour les former, joindre une vaste étendue de connoissances au talent de faire des combinaisons & de saisir des rapports; que ces systèmes utiles, nécessaires même pour suivre, sans s'égarer, les détails immenses de l'Histoire naturelle, servent encore à faciliter la recherche des vérités générales; & qu'enfin, s'il y a peu de philosophie à prendre ces arrangemens méthodiques pour la Science elle-même, il y en a bien moins encore à les mépriser.

M. de Linné avoit formé dès sa première jeunesse le projet de son système général, & il s'en occupa toute sa vie. Aucun Naturaliste n'avoit jusqu'à lui conçu un plan si vaste, & si on peut dans l'exécution lui reprocher quelques défauts, c'est encore un prodige qu'un seul homme ait pu la porter à ce point de perfection.

Son système de la Nature eut douze éditions en trente ans; dans chacune il profitoit de ses nouvelles observations, des travaux de ses Disciples, des objections de ses critiques: c'étoit aux Sciences plutôt qu'à sa gloire qu'il vouloit élever un monument: aussi ne doit-on juger ce grand ouvrage que sur sa dernière édition, & regarder les autres comme des esquisses que l'Auteur soumettoit au jugement des Naturalistes.

M. de Linné ne voulut pas que l'Histoire Naturelle fût

entre ſes mains une Science ſtérile : en l'appliquant à des choſes d'un uſage commun, il étoit utile à ſes concitoyens, & il ſervoit en même temps la Science qu'il aimoit, puiſqu'il la rendoit plus importante aux yeux de ceux dont le ſecours pouvoit en accélérer les progrès. Ses Ouvrages contiennent un Traité complet de matière médicale; des diſſertations ſur les Plantes de Suède, qui peuvent être utiles dans la Médecine, & remplacer les Plantes étrangères, ſur celles qui peuvent fournir aux hommes une nourriture ſaine & agréable, ou qui ſont employées dans les Arts; ſur les végétaux qui conviennent le mieux à chacune des eſpèces d'animaux domeſtiques; ſur la manière de juger de la vertu des Plantes, ſoit par les genres où elles ſont rangées dans ſa méthode, ſoit par leur ſaveur ou par leur odeur; ſur les terreins qui conviennent à chaque eſpèce; ſur des Plantes, qui, ſemées dans des ſables mobiles, peuvent les fixer, préſerver le pays des dangers auxquels ces ſables l'expoſent, & les changer à la longue en des terres fertiles; ſur le rapport de la végétation de chaque Plante, avec les différentes ſaiſons de l'année; ſur l'origine de pluſieurs ſubſtances, comme le baume de Tolu, la ſarcocolle, la gomme gutte qu'on employoit depuis long-temps, ſans ſavoir quel arbre les avoit produits, & quelles préparations on leur avoit fait ſubir.

Le ſuffrage de la plupart des Compagnies ſavantes de l'Europe, l'adoption preſque générale du ſyſtème de Botanique de Linnæus, avoit appris à la Suède à le regarder comme un Savant qui faiſoit honneur à ſon pays: ſes travaux dirigés vers le bien public le montroient à ſes compatriotes comme un citoyen utile; l'envie fut réprimée cette fois par l'enthouſiaſme national. M. de Linné fut le premier homme de Lettres décoré de l'Ordre de l'Étoile polaire, & cette nouveauté fit peut-être moins d'honneur au Savant qui le reçut, qu'aux lumières du Gouvernement de Suède: en accordant cette diſtinction à M. de Linné, il montroit que l'emploi d'éclairer les hommes étoit à ſes yeux une fonction publique, & avoit droit aux mêmes récompenſes.

M. de Linné obtint quelques années après un rang dans la Nobleſſe ſuédoiſe; il retrancha alors de ſon nom la terminaiſon latine qu'il y avoit ajoutée, ſuivant l'uſage de ſon pays : mais ce nom étoit déjà trop illuſtré pour qu'il fût en ſon pouvoir de le perdre; & le Chevalier Von Linné ne fut jamais que Linnæus pour l'Europe ſavante, comme le Baron de Vérulam n'a jamais été que Bâcon pour les Philoſophes. Les marques de l'eſtime perſonnelle des Princes ſont toujours flatteuſes pour un Savant qui aime la gloire; quel que ſoit le Prince qui les accorde, elles prouvent du moins une grande célébrité. Celles que M. de Linné reçut de ſes Souverains, devoient le flatter à d'autres titres : il fut traité par la Reine de Suède, ſœur du Roi de Pruſſe, avec cette familiarité noble qui honore les Souverains, parce qu'elle prouve qu'en ſe trouvant avec des hommes d'un mérite ſupérieur, ils ſentent qu'ils ont droit de ſe croire avec leurs égaux.

Le crédit que M. de Linné ne devoit qu'aux Sciences, il le fit ſervir tout entier à l'avancement des Sciences; l'établiſſement de l'Académie de Stockolm fut en partie ſon ouvrage; le jardin d'Upſal, remis dans un meilleur ordre, augmenté de vaſtes ſerres conſtruites ſelon ſes vues, devint digne du Démonſtrateur qui, de toutes les parties de l'Europe, y attiroit des Diſciples.

L'hommage de quelques Plantes qui manquoient à ce jardin ſi riche, étoit un tribut que tous les amateurs de Botanique croyoient devoir à M. de Linné; & lorſque le Roi de Suède vint en France, le feu Roi le chargea de remettre à l'illuſtre Profeſſeur d'Upſal, des graines rares qu'il avoit recueillies dans ſon jardin de Trianon.

Si nous ajoutons à ce que nous avons dit de M. de Linné, qu'il remplit pendant pluſieurs années les fonctions de Secrétaire de l'Académie d'Upſal, qu'il donnoit exactement des Leçons de Botanique & de Médecine, enfin, qu'il publia une foule de Diſſertations ſur des objets particuliers d'Hiſtoire naturelle, de Botanique, de Médecine, qui toutes renferment des vues toujours ingénieuſes & quelquefois profondes,

nous aurons donné une idée de la vie de cet Homme célèbre. Elle fut heureuse jusqu'à soixante ans; sa santé ne fut altérée, avant cette époque, que par une violente attaque de goutte, dont il prévint les retours par l'usage des fraises. Il avoit fait un mariage heureux qui lui a donné trois filles & un fils digne de lui succéder. Il passa des jours tranquilles, glorieux, occupés, au milieu de ses Disciples, qui étoient ses amis, jouissant de sa gloire, que chaque jour il augmentoit encore, de la reconnoissance de son pays, & de cette considération publique que la célébrité & le talent ne peuvent donner, à moins qu'ils ne soient unis à un caractère qui force l'envie au respect. Sensible avec ses amis, aimable & gai dans la société intime, noble avec les Grands, simple & bon avec ses inférieurs, on ne le vit jamais acheter par des bassesses le droit de faire éprouver des hauteurs; d'autant moins jaloux d'affecter une supériorité précaire qu'il étoit plus sûr d'en avoir une réelle. Riche des bienfaits de la Cour, il ne quitta jamais cette simplicité de vie dont on ne peut s'écarter sans en être puni par le ridicule & par l'ennui.

Il employa pour sa Nation ce qu'il avoit reçu d'elle: son seul luxe étoit un *Musæum* immense, monument glorieux pour la Suède, puisqu'il étoit la collection des tributs que les Naturalistes du Nord avoient consacrés à celui que, d'une voix unanime, ils avoient nommé leur Chef & leur Maître.

Frappé, au mois d'Août 1776, d'une apoplexie qui détruisit ses forces, affoiblit sa mémoire, & le conduisit au tombeau par un dépérissement lent & insensible, ce *Musæum* étoit encore sa consolation; chaque jour, la reconnoissance de ses Disciples lui présentoit de nouvelles merveilles produites par la Nature aux extrémités du globe: on eût cru voir des enfans occupés de consoler les derniers jours d'un père chéri. Devenu enfin incapable d'agir & de penser, il goûtoit encore quelque plaisir, en parcourant de ses yeux éteints les Plantes nouvelles que son Disciple Thunberg venoit de lui envoyer des extrémités de l'Asie.

Très-peu de temps après son attaque d'apoplexie, il dressa

dreſſa lui-même une courte notice de ſa vie, & il voulut qu'elle fût envoyée à l'Académie pour ſervir de matériaux à ſon Éloge: c'eſt avec une égale ſimplicité qu'il y parle de ſes travaux, de ſes découvertes, ou qu'il convient de ſes défauts. Il avoue qu'il fut peut-être trop facile à s'émouvoir, ou à s'irriter; que lent à embraſſer une opinion, il tenoit peut-être avec trop d'opiniâtreté à celles qu'il avoit une fois adoptées; qu'il ne ſouffrit avec aſſez de modération, ni les critiques qui s'élevèrent contre lui, ni les contradictions qu'il éprouva de la part de ſes rivaux. Ces aveux prouvent ſeulement que M. de Linné eut pour la gloire une paſſion véritable, & que cette paſſion a comme toutes les autres, ſes excès & ſes foibleſſes; mais combien peu d'hommes ont comme lui le courage d'avouer ces foibleſſes, & ſur-tout le courage plus rare d'en ſouffrir ſeuls & dans le ſecret? Car en jugeant M. de Linné, d'après ſa conduite, perſonne ne l'eût ſoupçonné de ces défauts, & pour qu'ils fuſſent connus, il a fallu qu'il les révélât.

Ainſi ce ſoin de s'occuper de ſon Éloge, qui dans un autre eût été peut-être l'effet d'un vain amour-propre, ne fut chez lui qu'une nouvelle marque de ſon amour pour la vérité. Après avoir combattu toute ſa vie contre les erreurs, il ne voulut pas laiſſer ſubſiſter celles que l'admiration ou l'envie auroient pu accréditer pour ou contre lui.

L'extrême laconiſme des Ouvrages de M. de Linné, l'uſage peut-être trop fréquent de termes techniques ſouvent tirés du Grec, ſa manière de tout réduire en Tables, en rendent la lecture difficile; il faut les étudier plutôt que les lire: à la vérité, on en eſt dedommagé par la préciſion des idées, & par l'avantage de voir d'un coup-d'œil un plus grand nombre de réſultats. M. de Linné trouvoit ſans doute que plus la vérité eſt nue, plus elle eſt belle; & que les ornemens dont on cherche à la parer, ne ſont que la cacher; il ſongeoit à former des Naturaliſtes, plus qu'à amuſer des Amateurs; il vouloit des Diſciples, & dédaignoit de chercher des Prôneurs.

Il n'ignoroit pas néanmoins combien il eſt utile de répandre le goût des véritables Sciences dans toutes les claſſes d'hommes qui peuvent avoir ſur le bonheur des Nations, une influence plus ou moins grande; il ſavoit qu'après avoir obtenu la gloire de reculer les bornes des Sciences, il reſtoit au Philoſophe l'obligation de les rendre utiles, & qu'elles n'étoient utiles qu'autant qu'elles devenoient populaires : mais pour faire goûter les Sciences à des hommes diſſipés, avides de plaiſir, ennemis du travail, moins jaloux de ſavoir que de ſe faire honneur de ce qu'ils ſavent, il faut avoir l'art de s'emparer de leur imagination par des peintures ſéduiſantes, de ſoutenir leur attention par des traits ingénieux ou brillans, de réduire la Science à des réſultats piquans & faciles à ſaiſir. M. de Linné ſentit que cet art lui manquoit, & peut-être même eût-il l'injuſtice de le mépriſer, comme le talent de ceux que la Nature a formés pour publier & non pour découvrir ſes ſecrets.

Ce n'eſt pas que dans les Ouvrages qu'il a donnés en ſa langue naturelle, ſes Compatriotes n'aient trouvé un ſtyle élégant & agréable, & le genre d'éloquence le plus rare de tous; le ſeul auſſi peut-être qui convienne vraiment à des Ouvrages philoſophiques, & qui conſiſte à renfermer beaucoup d'idées en peu de mots, & à exprimer dans un ſtyle noble & ſimple des vérités neuves & importantes : mais cette éloquence n'eſt pas celle qui frappe le grand nombre, & comme c'eſt aux paſſions des hommes qu'il faut parler, ſi l'on veut les conduire, c'eſt à leur imagination qu'il faut s'adreſſer, ſi l'on aſpire à régner ſur leurs goûts ou ſur leurs opinions.

On voit dominer dans tous les Ouvrages de M. de Linné, un grand reſpect pour la Providence, une vive admiration de la grandeur, de la ſageſſe de ſes vues, une tendre reconnoiſſance pour ſes bienfaits; ce ſentiment n'étoit point en lui une croyance inſpirée par l'éducation; ce n'étoit pas même cette conviction que l'on conſerve après avoir examiné & diſcuté une fois dans ſa vie les preuves d'une opinion. Il

croyoit à la Providence, parce que chaque jour, de nouvelles observations sur la Nature lui en fournissoient de nouvelles preuves : il y croyoit, parce que chaque jour, il la voyoit agir sous ses yeux. « L'homme physique qui use de la Nature, est, disoit-il, comme un Roi qui a droit d'exiger de ses « Sujets ce qui est nécessaire à ses besoins, & qui les fait servir « à l'accomplissement de ses desseins; s'il abuse de son pouvoir, « il apprend bientôt par la résistance de ses Sujets même, « que les Rois ont été établis pour les Peuples, & non les Peuples « pour les Rois, & qu'il n'a reçu l'empire sur la Nature que « pour servir à conserver dans l'Univers l'ordre que la Provi- « dence y a établi. Ainsi tandis que les végétaux fournissent « à tous les animaux leur nourriture, une retraite, un abri pour « les générations naissantes, ces mêmes animaux, quelquefois « nécessaires à la reproduction des Plantes, servent encore par « la destruction même qu'ils font des végétaux, à maintenir « entre les différentes espèces, un équilibre qui en assure la « perpétuité; l'on peut dire en un sens que les animaux ont « été formés pour les plantes, comme les plantes pour les « animaux : ou plutôt toutes les parties de la Nature subor- « données entr'elles, mais nécessaires l'une à l'autre, forment « un ensemble aussi frappant par l'unité du plan que par la « sagesse des vues de son Auteur ».

L'existence des poisons n'étoit même pour M. de Linné, qu'une raison de plus d'admirer les soins de la Providence pour l'espèce humaine. « La Nature, disoit-il, n'a préparé des poisons dans l'ordre physique, que pour assurer à l'homme « des remèdes contre les maladies rebelles & invétérées ; « comme dans l'ordre moral, elle abandonne quelquefois les « Peuples à des tyrans qui deviennent entre ses mains des « moyens violens, mais efficaces de rappeler à la vie des « Nations engourdies & corrompues ».

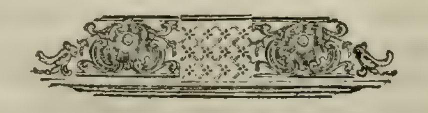
M. de Linné, préparé depuis long-temps à la mort par l'affoiblissement de ses organes, la reçut comme un doux sommeil qui délivre d'un état de langueur & d'angoisses. Il mourut vers la fin du mois de Janvier 1778, regretté

de ſa famille & de ſes Diſciples, qui le chériſſoient comme un père, parce qu'ils en avoient trouvé en lui la tendreſſe vive & déſintéreſſée ; honoré des regrets d'une Nation généreuſe, paſſionnée pour toutes les eſpèces de gloire, capable d'enthouſiaſme, parce qu'elle l'eſt d'héroïſme, & qui n'attend point pour rendre hommage à ſes Grands hommes, qu'ils ne puiſſent plus jouir des honneurs qu'elle leur décerne.

Après la mort de M. de Linné, le Roi de Suède lui a fait élever un monument à côté de celui que le même Prince a conſacré à ce Deſcartes, qui, négligé dans ſa patrie après ſa mort comme pendant ſa vie, attend encore de ſes compatriotes les honneurs que les Étrangers lui ont prodigués. Un Temple digne de la magnificence de Rome & du goût d'Athènes, a remplacé dans cette capitale l'égliſe modeſte où les cendres de Deſcartes avoient été dépoſées ; & la France peut eſpérer d'y voir enfin, ce qui ſeroit le plus bel ornement de ce Temple, un Mauſolée de Deſcartes qui acquittât envers lui la dette de la Nation.

Nous n'oublierons pas ici un autre monument qu'un des Diſciples de M. de Linné lui a conſacré dans l'égliſe d'Édimbourg, monument plus glorieux peut-être pour le ſavant Suédois, que celui qu'il a obtenu dans ſa patrie ; parce qu'érigé au milieu d'une Nation étrangère, il eſt l'hommage d'une admiration abſolument déſintéreſſée.

La place d'Aſſocié-Étranger que M. de Linné occupoit à l'Académie des Sciences, a été remplie par M. Pringle, premier Médecin de la Reine d'Angleterre, & ci-devant Préſident de la Société royale.



MÉMOIRES



MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXVIII.

OBSERVATIONS SUR QUELQUES COMBINAISONS SALINES DU FER.

Par M. DE LASSONE.

JE me propoſe dans ce Mémoire de rechercher & d'établir par une ſuite de faits & d'obſervations :

1.° De quelle manière le fer ſe combine, ſelon diverſes circonſtances, avec l'acide concret du tartre:

2.° Si la diſſolution immédiate du fer peut être opérée par les alkalis fixes & volatils, & quelle eſpèce d'union ce métal peut contracter avec eux:

3.° Quels phénomènes dérivent de ces combinaiſons ſalines, pour éclaircir certains points de la théorie chimique, & pour faire mieux connoître la nature de quelques médicamens.

Les Chimiſtes ſavent qu'on peut procéder de deux manières à l'union de l'acide concret du tartre avec le fer, c'eſt-à-dire qu'après avoir mêlé deux ou trois parties de crême de tartre en poudre avec une partie de limaille pure de fer, ſi ce mélange eſt ſucceſſivement humecté & digéré long-temps à froid ou à un foible degré de chaleur, en remuant ſouvent la matière, & y verſant de temps en temps de l'eau ſimple ou de l'eau-de-vie, on parvient enfin à former une maſſe homogène, noirâtre, tenace, viſqueuſe, dont on peut faire des boules martiales; ou bien le même mélange de limaille de fer & de tartre en poudre, étant ſoumis un temps ſuffiſant à une ébullition rapide dans l'eau, on obtient promptement une compoſition ſaline, qu'on ne croit pas différer de la précédente, par la manière dont l'acide tartareux y eſt combiné avec le fer; & comme elle eſt préparée par un procédé plus expéditif, on s'en ſert de préférence, ſoit qu'on veuille faire les boules martiales ou le tartre martial ſoluble: mais pluſieurs expériences, dont je vais expoſer les détails, m'ont appris, qu'il exiſte réellement une différence notable entre les deux combinaiſons ſalines du tartre & du fer précédemment décrites, c'eſt-à-dire que l'acide tartareux s'y trouve uni au métal, d'une manière abſolument différente.

I.re EXPÉRIENCE. Étant donnée la première combinaiſon de tartre & de fer, préparée, comme il a été dit, par une longue digeſtion, & miſe enſuite en boules martiales; je fais infuſer dans l'eau froide ou tiède, cette maſſe ſaline, pour en avoir une diſſolution ou teinture très-foncée. Sur une portion de cette liqueur filtrée par le papier, ſi je verſe la teinture de noix de gale,

j'obtiens ſur le champ de l'encre très-noire, preuve évidente que la liqueur ainſi éprouvée, contient du fer.

Sur une autre portion de la même teinture, ſi je verſe la liqueur alkaline ſaturée de la partie colorante du bleu de Pruſſe, il n'arrive nul changement de couleur. II.e EXPÉRIENCE.

Une portion de la même teinture martiale ayant été ſoumiſe à l'ébullition dans une fiole de verre, ſi, dans le temps qu'elle eſt encore chaude, ou après qu'elle eſt entièrement refroidie, ces deux circonſtances ne changent rien au réſultat, j'y verſe l'alkali Pruſſien; ſur le champ paroît le bleu : ce qui n'arrive point, comme on l'a vu, avant l'appropriation de la liqueur par l'ébullition. III.e EXPÉRIENCE.

On pourroit, d'après ces trois expériences, propoſer un Problème de Chimie, qu'on trouveroit ſans doute fort difficile à réſoudre, ſi l'on ignoroit les faits précédens, qui en donnent la ſolution complète. Il faudroit énoncer ainſi ce Problème :

Étant donnée la diſſolution d'une combinaiſon du fer avec un ſel acide, y développer à volonté ou ne pas y développer le bleu de Pruſſe, en y ajoutant l'alkali Pruſſien ſans mélange ultérieur d'aucune autre ſubſtance.

On vient de voir, qu'après avoir fait ſubir l'ébullition à la teinture ſaline de Mars, l'alkali Pruſſien, par ſon mélange, y développe enſuite le bleu de Pruſſe; mais il eſt poſſible, même dans ce cas, de ne point obtenir de bleu de Pruſſe : pour cela, il ne s'agira que de mêler d'abord l'alkali Pruſſien avec la teinture ſaline de fer, avant que de la ſoumettre à l'ébullition; car ſi l'on fait bouillir enſuite ces deux liqueurs déjà réunies, il ne ſe développe plus de bleu de Pruſſe; la liqueur ſe trouble & ne prend que la couleur de vert ſale, laquelle ſe ſoutient, à moins que l'on n'ajoute enſuite un acide quelconque, ſoit acéteux, ſoit minéral, qui dans l'inſtant avive & fait paroître le bleu de Pruſſe. IV.e EXPÉRIENCE.

Voilà des faits, que je crois d'autant plus remarquables

qu'ils ſemblent au premier coup-d'œil devoir faire une exception à la règle générale, établie pour la formation du bleu de Pruſſe. *Tout fluide*, a-t-on dit, *qui contient du fer diſſout par un acide quelconque, donnera du bleu de Pruſſe en y mêlant l'alkali Pruſſien ;* cependant je viens de faire obſerver, que l'on ne forme point ce bleu en verſant l'alkali Pruſſien en liqueur ſur la teinture bien chargée des boules martiales préparées par digeſtion, lorſque la diſſolution a d'abord été faite avec l'eau froide ou même chaude, pourvu que cette chaleur n'ait point été pouſſée juſqu'au degré de l'ébullition : or étant bien démontré par l'épreuve de la teinture de noix de gale, que cette diſſolution de boule martiale contient réellement le fer combiné avec le tartre, qui eſt un acide concret, on ſe croiroit, ce me ſemble, autoriſé par ce ſeul fait iſolé, à infirmer ou à modifier la règle propoſée d'une manière générale, & comme une eſpèce d'axiome ; mais cette première induction ne ſeroit qu'une erreur facile à découvrir, en conſidérant de plus près ce même fait, non pas ſimplement iſolé, mais revêtu des circonſtances qui l'accompagnent, & cet examen plus approfondi, indique encore des différences bien réelles entre les combinaiſons du tartre & du fer préparées, comme je l'ai dit, par ébullition ou par ſimple digeſtion.

Je vais donc eſſayer de développer actuellement la théorie & l'étiologie des divers phénomènes qui réſultent de ces combinaiſons ſalines du fer, & que je n'ai d'abord énoncées que d'une manière générale.

L'acide concret du tartre a dans ſa mixtion intrinſèque deux parties eſſentielles & bien diſtinctes, un principe huileux & un principe acide ; il agit ſur quelques corps, tantôt par l'une, tantôt par l'autre de ces ſubſtances, priſes ſéparément, tantôt par les deux à la fois : il y a des faits poſitifs qui le prouvent. Qu'il me ſoit permis de citer ce que j'en ai déjà dit dans mes Mémoires ſur le Zinc & ſur la Chaux vive.

Or le tartre étant un ſel acide concret, qui n'eſt ſoluble

& ne peut rester dissous & étendu que dans l'eau bouillante; & tout sel en général n'étant capable d'agir sur les autres corps que lorsqu'il est dans un état de fluidité, c'est-à-dire réduit par son extension dans un fluide à l'unité des molécules primitives, qui constituent son agrégation ; il s'ensuit que dans la composition des boules martiales, si l'on procède en mêlant la limaille de fer & le tartre en poudre, & en humectant peu-à-peu ce mélange soit avec de l'eau-de-vie pure, soit avec l'eau-de-vie & l'eau, soit avec l'eau seule, ayant l'attention de n'employer pour favoriser l'action réciproque qu'une simple digestion, le tartre ne sauroit alors attaquer le fer & s'y combiner par sa partie purement acide; mais puisque malgré cette impuissance de l'acide pur, il se fait une combinaison réelle du fer & du tartre, elle ne peut & ne doit s'opérer d'abord que par le *latus* huileux du tartre, qui se développe ici d'une manière si bien apparente.

Une telle dissolution de fer, dans laquelle il existe à la vérité un acide, mais qui ne tient au métal que par une autre substance interposée & intermédiaire, c'est-à-dire par le *latus* huileux, ne doit point former de bleu de Prusse, en y versant l'alkali Prussien, parce que cet alkali ne pouvant rompre ni détruire la combinaison préexistante du fer, il n'arrive ni précipitation du métal, ni séparation de la matière colorante; aussi ne résulte-t-il de ce mélange nul changement, nulle altération sensible.

Tout étant ainsi disposé, si l'on introduit dans ce premier mélange un acide tout-à-fait analogue, tel que l'acide acéteux pur & distillé, qui sans nulles entraves agisse immédiatement sur le fer & le dissolve; alors l'alkali Prussien reprend ses droits; il se fait entre lui & la nouvelle dissolution du fer, une double décomposition, & le bleu de Prusse se démontre aussitôt dans la liqueur.

Si en procédant par une autre voie, on n'ajoute point un nouvel acide végétal, mais que l'on approprie par le moyen de l'ébullition, la teinture bien chargée & faite d'abord à froid de la boule martiale, où le fer n'est encore combiné

avec le tartre que par le *latus* huileux de cet acide concret, on achève ainsi de combiner ce métal avec l'autre portion acide du tartre; & dès-lors cette dissolution complète réunit toutes les conditions requises pour que l'alkali Prussien intervenant, le bleu de Prusse soit bien développé.

Mais si sur la même teinture martiale, extraite par l'eau froide ou simplement tiède, je verse d'abord l'alkali Prussien, & que je fasse ensuite bouillir le mélange, il ne se forme point alors de bleu de Prusse; la liqueur se trouble & ne prend qu'une couleur sale verdâtre, parce que le mouvement rapide & violent de l'ébullition déterminant une action & réaction tumultueuses entre les principes qui ont une affinité réciproque, la précipitation de toutes les parties du fer se fait confusément, en même temps que la portion acide du tartre, brusquement saisie & arrêtée par l'alkali devenu libre, ne peut plus aviver le précipité en attaquant la partie dissoluble jaune du fer.

Il paroît donc par ces détails, que la théorie de la formation du bleu de Prusse, proposée par le savant Chimiste qui en est l'auteur, ne souffre réellement nulle exception de la part du fait singulier qui semble d'abord en être une: on y trouve au contraire de nouvelles preuves qui la confirment.

Il se présente ici de nouvelles remarques à faire.

1.° Le Docteur Willis, à qui doit être attribuée, je crois, la première composition des boules martiales, procédoit en humectant peu-à-peu le mélange du tartre & du fer, & favorisoit la combinaison par une simple digestion. L'opération par cette voie, sans être difficile ni embarrassante, est fort longue, car elle exige au moins trois mois; mais on obtient une masse bien homogène & assez visqueuse, pour que, sans le secours & l'intermède d'aucun mucilage étranger, on puisse former avec elle des boules capables de contracter d'elles-mêmes, en séchant doucement, une consistance bien ferme, & de conserver à leur surface un luisant inaltérable par la rouille: telle est la formule exacte, & telle devroit être toujours la composition des vraies boules martiales.

Or il paroît, par les obſervations précédentes, que dans les boules martiales ainſi préparées, le tartre n'eſt encore uni au fer que par ſon *latus* huileux; que par conſéquent le fer y exiſte dans un grand état de diviſion pur & entier, c'eſt-à-dire revêtu de tout ſon phlogiſtique, & de plus enduit & pénétré par la ſubſtance huileuſe du tartre, qui le préſerve de la rouille, & contribue à lui imprimer un caractère demi-ſalin.

2.° Ceux qui procédant pour la compoſition des boules martiales, par une voie différente de la précédente, ont l'intenſion de ſimplifier ou plutôt d'abréger beaucoup l'opération, en combinant rapidement le tartre & le fer, par l'ébullition dans l'eau, parviennent ſans doute à former cette combinaiſon; mais la maſſe qu'on obtient n'eſt pas à beaucoup près ſi viſqueuſe : il faut donc, ſi l'on veut en former des boules qui aient aſſez de liant & de ténacité pour ne pas être expoſées à s'entr'ouvrir, ſe fendre, s'égrainer, & à perdre le luiſant de leur ſurface, y mêler enſuite un mucilage épais, qui aglutine mieux les molécules, & forme ſur la ſurface une ſorte de vernis; de plus, il eſt évident, par les remarques précédentes, qu'ici le fer ſe trouve dans un état différent, puiſqu'il eſt entré en combinaiſon avec la portion acide du tartre, & qu'il doit ainſi avoir été privé d'une portion de ſon phlogiſtique, conformément à l'action ſemblable que tout acide exerce ſur ce métal. Je croirois donc la première combinaiſon préférable; & de-là, je conclus, que dans la vue de réformer, ou de ſimplifier, ou même de perfectionner certaines compoſitions médicinales, telles qu'on les a d'abord publiées, il faut en général beaucoup de réſerve & de circonſpection pour les changemens qu'on croit à propos & quelquefois utiles d'y faire, à moins qu'on ne ſoit bien aſſuré que ces changemens ſeront abſolument ſans conſéquence.

3.° Puiſqu'il exiſte certaines combinaiſons du fer avec une ſubſtance acide, ſans néanmoins qu'on puiſſe y démontrer la préſence de ce métal par l'action & le mélange de l'alkali

Pruſſien ; il faut en conclure, que ce même alkali ne doit point être admis, ſans exception, comme un ſûr indice du fer, c'eſt-à-dire comme un moyen aſſuré de le démontrer & de le rendre apparent dans toutes ces diſſolutions ſalines. Or, puiſque je viens de faire voir encore que la noix de gale décide la préſence du fer dans les circonſtances où l'alkali Pruſſien ne produit point cet effet, il en réſulte pareillement, que cette noix de gale paroît être une pierre de touche du fer, préférable dans preſque tous les cas, ou du moins, que dans toute opération de Chimie où il s'agira de rechercher ſi le fer exiſte dans quelque combinaiſon, il faudra toujours employer ces deux moyens, dont la réunion ne peut plus laiſſer de doute dans les réſultats qui doivent indiquer ou la préſence ou l'abſence du fer, ſur-tout en faiſant intervenir encore dans les eſſais l'addition d'un acide pur comme complément des épreuves.

4.° Puiſque l'acide concret du tartre s'unit avec le fer, tantôt par ſon *latus* huileux ſeulement, tantôt par ce même principe & par ſon *latus* acide, & que dans l'un & l'autre cas, le principe huileux du tartre ſe trouve également développé & atténué, il s'enſuit, qu'alors l'eſprit-de-vin digéré ſur le tartre martial ſoluble, pour en extraire une teinture foncée, ne ſe charge d'une aſſez bonne quantité de ce ſel métallique, qu'il tient en diſſolution, qu'à la faveur du principe huileux, qui paroît devoir être le moyen uniſſant entre les deux ſubſtances.

Mais peut-on admettre la même théorie pour la formation de la teinture martiale de Ludovic? On ſait que pour la préparer, on fait d'abord un mélange de l'acide concret du tartre avec le vitriol de Mars calciné à blancheur, c'eſt-à-dire dépouillé de ſon eau de criſtalliſation, & qu'enſuite après avoir fait bouillir long-temps dans l'eau ces deux matières pour opérer leur pénétration réciproque, & les réduire en conſiſtance d'extrait ſolide, on y verſe de bon eſprit-de-vin, qui par une ſimple digeſtion diſſout une portion de tout ce qui forme la maſſe métallique, c'eſt-à-dire,

du

du tartre & du vitriol; car il ſuffit de goûter cette teinture, pour y bien reconnoître la ſaveur âpre, auſtère & métallique du vitriol martial. Or, comme il eſt certain, que l'acide concret du tartre ſeul, & ſans avoir encore ſouffert d'altération, ni le vitriol de Mars calciné à blancheur ne ſont point ſéparément ſolubles dans l'eſprit-de-vin bien déphlegmé, & que de plus en réduiſant, par le moyen de l'ébullition, le mélange de tartre & de vitriol martial en une eſpèce de magma viſqueux & noir, & preſque ſemblable en tout au tartre martial ſoluble, on produit ici la même atténuation, le même développement du principe huileux; on peut en inférer, que le *latus* huileux du tartre ayant eu une action bien marquée ſur le vitriol martial avec lequel il s'eſt lié, devient encore ici le moyen uniſſant entre l'eſprit-de-vin & les deux autres ſubſtances, qui entrent dans la teinture martiale de Ludovic, & qui lui donnent pour l'uſage médicinal une propriété tonique bien ſupérieure, & plus efficace dans certains cas à celle des autres teintures martiales.

5.° Puiſque le tartre martial ſoluble, ſoit qu'il ait été préparé par une ébullition rapide, dans l'eau, ſoit par une digeſtion lente, peut former par ſon mélange avec la décoction de noix de gale, ou toute autre ſubſtance végétale, aſtringente, une encre noire; on a donc ici un moyen de faire une belle teinture noire ſans vitriol, & qui par cette raiſon auroit peut-être moins de cauſticité, & ſeroit moins ſujette à brûler les étoffes pénétrées de cette couleur. Quoi qu'il en ſoit, voici le procédé que j'ai ſuivi pour compoſer ſans vitriol une encre excellente très-promptement.

Je fais d'abord une décoction de noix de gale, que je rends légèrement glutineuſe, en ajoutant une petite quantité de racine de grande conſoude, qui, ſelon la remarque de Hellot, dans ſon *Traité des Teintures*, fournit le gluten le plus convenable pour cette compoſition. Dans la décoction ainſi préparée & encore chaude, je plonge une boule martiale ſuſpendue par un fil en forme de nouet; je préfère les boules martiales, faites après une longue digeſtion du tartre & du

fer, & ce qui a été dit ſur cette préparation fait aſſez ſentir les motifs qui déterminent cette préférence : je continue l'infuſion de la boule, en l'agitant ſouvent dans la liqueur, juſqu'à ce que j'aie obtenu une encre très-noire qui ſe conſerve bien.

Après cet examen des principales teintures martiales ſpiritueuſes, dont la théorie étoit obſcure, je vais donner des détails ſur quelques nouvelles teintures martiales alkalines, différentes de celles de Stahl, & qu'on peut mettre auſſi au rang des médicamens; ces expériences détermineront d'une manière poſitive, l'action immédiate & très-peu connue que peuvent exercer les alkali fixes & volatils par la voie humide ſur le ſer, avant qu'il ait éprouvé aucune altération.

Sur deux gros de limaille de fer très-pur, j'ai verſé dans une fiole de verre mince, deux onces d'alkali volatil en liqueur bien ſaturée, & nouvellement dégagée du ſel ammoniac par l'alkali fixe : ces deux circonſtances ſont toujours eſſentielles lorſqu'on veut bien juger de l'action de ce diſſolvant ſur les ſubſtances métalliques qu'il eſt capable d'attaquer. Le mélange ayant été placé ſur un bain de ſable à une chaleur très-tempérée, l'alkali volatil a agi ſur le fer avec une efferveſcence très-ſenſible, moins vive cependant & moins ſoutenue que celle qui a lieu dans la diſſolution complette du zinc *; l'effervеſcence ayant ceſſé, le degré de chaleur du bain de ſable a été augmenté de manière à tenir en ébullition l'alkali volatil; il n'y a point eu de nouvelle effervеſcence : après ſix jours de digeſtion, la liqueur a été profondément colorée, & la plus grande partie du fer eſt reſtée ſans être diſſoute.

La liqueur éprouvée avec la teinture de noix de gale ne devient point noire : ce mélange occaſionne une ſorte de décompoſition dans la teinture martiale; elle blanchit d'abord, & donne quelque temps après un précipité aſſez abondant,

* Voyez ce que j'en ai dit dans mon ſecond Mémoire ſur le Zinc, où je détaille ce phénomène.

de couleur purpurine; mais l'affusion d'un acide forme sur le champ de l'encre noire : l'alkali Prussien ne produit rien.

Cette nouvelle teinture alkaline de Mars pourroit être employée utilement en Médecine dans des cas particuliers, où il conviendroit d'user d'un remède stimulant, tonique & pénétrant.

L'alkali volatil caustique digéré long-temps sur le fer, n'a paru avoir absolument aucune action sur ce métal, qui a conservé tout son brillant métallique.

L'alkali fixe en liqueur très-saturée, ou étendue & affoiblie avec l'eau distillée, n'a pas plus agi; il est arrivé seulement, que par le progrès de la digestion, le fer est devenu aussi noir que l'éthiops martial; d'ailleurs, je me suis assuré par les épreuves nécessaires, que ces deux liqueurs alkalines ne tenoient pas en dissolution la moindre parcelle de fer.

Je fis digérer ensuite deux gros de limaille de fer bien pur, dans deux onces d'alkali fixe caustique ou lessive des Savonniers; après trois jours de digestion, la liqueur alkaline avoit pris une teinte rougeâtre : je l'examinai en cet état. L'alkali Prussien n'y produisit aucun changement; mais le mélange de la teinture de noix de gale développa une couleur d'un beau cramoisi foncé : quoique la limaille de fer, restée au fond du vaisseau de verre, conservât son brillant métallique, elle paroissoit bien plus noire; je remis le tout au bain de sable, & continuai encore la digestion six jours de suite; après avoir affoibli la lessive des Savonniers avec quatre onces d'eau distillée; la liqueur prit une couleur beaucoup plus foncée; alors éprouvée de nouveau avec la noix de gale, sur le champ elle devint noire; mais avec l'alkali Prussien, la couleur bleue ne parut qu'après l'affusion d'un acide.

C'est ici une autre teinture martiale alkaline assez semblable à celle de Stahl.

Il est donc certain par ces expériences, que l'alkali volatil dégagé par l'alkali fixe, & que l'alkali fixe caustique sont les seuls dissolvans alkalins du fer par la voie humide : j'ai

démontré ailleurs, que ces deux mêmes diſſolvans ſont auſſi les ſeuls qui agiſſent ſur le zinc, mais d'une manière beaucoup plus marquée; cependant il exiſte ici, à l'égard du fer, une différence notable, c'eſt que l'alkali volatil en liqueur dégagé par l'alkali fixe, qui diſſout preſque en un inſtant la chaux du zinc, comme je l'ai fait connoître, n'a pas la moindre action ſur la chaux du fer, ſoit qu'elle ait été préparée par la calcination, ſoit qu'elle ait été ſéparée par précipitation du vitriol martial, & enſuite bien édulcorée.

Mais malgré cette diſparité, on voit par l'enſemble des faits précédens, une ſorte de ſimilitude entre les deux ſubſtances métalliques; & ſi c'étoit ici le lieu de diſcuter plus particulièrement cette analogie, déjà ſi fort ſoutenue par Henckel, pluſieurs autres faits, que je pourrois produire, ſeroient capables de l'établir d'une manière encore plus frappante.



OBSERVATION
AU SUJET DE DEUX ANIMAUX, DONT LE MÂLE ACCOUCHE LA FEMELLE.

Par M. DEMOURS.

LES Naturalistes sont intarissables sur les éloges qu'ils prodiguent à l'industrie des Animaux; ils prétendent que c'est d'eux que les Hommes ont appris les Arts les plus utiles, & il en est qui outrent la matière jusqu'à dire que nous leur avons obligation des Sciences même les plus abstraites *(a)*. La Médecine, au rapport de Pline & de plusieurs autres Naturalistes, doit à l'hippopotame l'usage de la saignée; celui des lavemens à cette espèce de cigogne, qui, à raison de son utilité, fut autrefois adorée des Égyptiens, sous le nom d'*Ibis* : l'ours & le chien, selon ces mêmes Naturalistes, lui ont indiqué l'utilité du vomissement, que ces animaux se procurent selon leurs besoins; *le premier*, disent-ils, *en avalant des fourmis, & le second en mangeant des feuilles de chiendent*. Heureusement pour la Médecine, le fait dont il s'agit dans ce Mémoire n'a pas été connu de ces Naturalistes; ils n'auroient pas manqué de dire aussi qu'elle doit l'art des accouchemens à l'animal qui fait le sujet de cette observation.

Lû le 21 Janvier 1778.

Dans les grands jours d'été, je rencontrai sur le soir, proche de quelques marches qui étoient autrefois auprès du grand bassin du Jardin du Roi, où j'occupois alors la place de Démonstrateur & Garde du Cabinet d'Histoire Naturelle,

(a) *Giovanni Bonifacio, l'Arti liberali & mecaniche, come siano state dagli animali irrationali, agli Huomini dimostrate.*

deux crapauds de terre de la petite eſpèce *(b)*, qui étoient accouplés; j'aperçus que le mâle remuoit beaucoup les pattes de derrière; la curioſité me fit approcher pour voir quelle étoit la cauſe des mouvemens qu'il ſe donnoit. Deux faits également nouveaux pour moi, & que je ne ſache pas avoir été encore obſervés, me ſurprirent en même temps; le premier étoit la difficulté avec laquelle la femelle faiſoit ſa ponte, & cette difficulté étoit ſi grande, qu'elle avoit beſoin d'un ſecours étranger, ce qui n'eſt point ordinaire à aucun des animaux que nous connoiſſons; le ſecond eſt que le mâle travailloit avec beaucoup d'action à lui tirer les œufs avec les pattes de derrière, & qu'il faiſoit les fonctions d'un véritable accoucheur.

Je ne ſaurois diſſimuler la joie que me cauſa la vue d'un fait auſſi nouveau; mon attention redoubla, & je m'aſſis doucement par terre pour les obſerver de plus près, & pour examiner ſur-tout ſi le mâle arroſoit de ſa liqueur ſéminale les œufs à meſure qu'il les tiroit du réceptacle de la femelle.

Pour bien entendre la mécanique de cet accouchement, il faut ſavoir en premier lieu que les pattes de ces animaux, tant celles de devant que celles de derrière, ſont diviſées en pluſieurs doigts, & que c'eſt par leur moyen, que le crapaud mâle tire les œufs du fondement de la femelle, de la manière qu'il ſera dit ci-après.

En ſecond lieu, que ces animaux s'accouplent comme les grenouilles, c'eſt-à-dire, que le mâle monté ſur le dos de la femelle, l'embraſſe avec les pattes de devant; la ſeule différence qu'il y a entre l'accouplement des crapauds dont il s'agit, & celui des grenouilles, eſt que dans celles-ci le mâle a les pattes aſſez longues pour embraſſer entièrement la femelle, & pour entrelaſſer les doigts les uns dans les autres; elles ſont plus courtes dans le crapaud, & ne peuvent ſe joindre de même: de ſorte qu'elles n'atteignent qu'aux deux côtés de la poitrine, où il les applique ſi fortement qu'il y

---

(b) *Rubeta minor, Geſneri.*

ſurvient ſouvent une échymoſe, avant que ces animaux ſe ſéparent.

Il faut remarquer troiſièmement, que les œufs de cette eſpèce de crapaud ſont formés chacun d'une coque membraneuſe très-forte, dans laquelle eſt contenu l'embryon, & que les œufs qui ont environ deux lignes de longueur, & qui ſont oblongs, ſont attachés les uns aux autres par un filet court & très-fort. Pour donner une idée aſſez juſte de ces œufs, on peut les comparer à un chapelet, dont les grains ſeroient diſtans les uns des autres d'environ la moitié de leur longueur: ces œufs ſortent par le fondement, parce que le réceptacle dans lequel ils ſont contenus juſqu'au temps de l'excluſion, s'ouvre à la partie inférieure du *rectum*.

Il y a lieu de croire que la femelle fait beaucoup d'efforts pour faire ſortir le premier œuf; mais dès qu'il l'eſt, c'eſt au mâle à faire le reſte : c'eſt alors qu'il commence à faire les fonctions d'accoucheur, & il s'en acquitte avec une adreſſe qu'on ne ſoupçonneroit pas dans un animal naturellement auſſi peu agile. Il avoit déjà tiré un ſecond œuf, lorſque je le vis dans cette grande agitation qui fixa ſur lui mes regards, & il faiſoit des efforts redoublés pour tirer le ſuivant; le premier étoit engagé entre les deux doigts du milieu de la patte droite, par le filet qui l'attachoit au ſecond, & c'eſt en alongeant la patte qu'il les faiſoit ſortir par le fondement de la femelle, qui pendant ce temps-là reſtoit immobile. Il tâchoit auſſi de ſe ſaiſir du cordon avec la patte gauche, & il s'y prit à pluſieurs repriſes avant que d'en venir à bout. Ma préſence ſans doute lui cauſoit quelques diſtractions; car tantôt il s'arrêtoit tout court, & alors il jetoit ſur moi des regards fixes qui dénotoient ſon inquiétude ou ſa crainte; tantôt il reprenoit ſon travail avec plus de précipitation qu'auparavant, & un moment après il opéroit d'une manière ſi nonchalante qu'il paroiſſoit indécis s'il devoit continuer ou non : la femelle elle-même marquoit auſſi ſon embarras par des mouvemens qui interrompoient quelquefois le mâle dans ſon opération; mais elle ne parut jamais vouloir rentrer ſous la pierre d'où elle étoit ſortie.

Enfin, ſoit que le ſilence que j'affectai, & l'immobilité où je me tins euſſent diminué leur crainte, ſoit que le cas fût preſſant, la femelle ſe tint tranquille, & le mâle ſe remit en devoir de continuer ſon opération: il ne fut pas long temps ſans s'emparer du cordon des œufs avec les doigts de la patte gauche, & alors il le tira avec la force réunie des deux, qu'il alongeoit tout doucement; lorſqu'il eut fait ſortir de ce cordon, auſſi long que ſes pattes pouvoient s'étendre, il écarta la gauche ſans abandonner les œufs qui y étoient engagés, & continua à tirer avec la droite ſeule. Ici les difficultés recommencèrent: la portion du cordon qui étoit déjà paſſée entre les deux doigts du milieu de cette patte droite, l'empêchoit ſouvent de ſe ſaiſir de nouveau de ce cordon avec la même patte; il s'y prit à pluſieurs repriſes avant que d'y parvenir; il s'arrêta même plus d'une fois tout court. Je craignois quelquefois que les mouvemens de tête que j'étois obligé de faire pour l'obſerver de plus près, ne fuſſent la cauſe de cette interruption, & alors je reſtois immobile, & retenois juſqu'à ma reſpiration : d'autres fois j'accuſois la difficulté de l'opération même, & alors j'étois tenté de l'aider, mais la crainte de l'interrompre m'arrêtoit auſſitôt.

Mon attention juſqu'alors avoit eu deux objets qui la partageoient également; ſi j'admirois d'un côté l'adreſſe du mâle à s'acquitter de la fonction pénible d'accoucheur, je n'étois pas moins attentif de l'autre à obſerver en même temps ſi le mâle arroſoit les œufs de ſa liqueur ſéminale, à meſure qu'il les tiroit du réceptacle de la femelle; juſque-là je n'avois rien aperçu qui m'eût ſatisfait quant à ce dernier point. Je crus que le défaut d'un jour ſuffiſant, pouvoit m'empêcher de voir cette irroration, qui me paroiſſoit abſolument néceſſaire pour la fécondation des œufs, & qui piquoit le plus ma curioſité; de ſorte qu'au haſard de les interrompre, je pris ces animaux au milieu de leur opération, & les ayant mis ſur ma main, je me levai pour les mieux expoſer au jour.

Le premier effet de ce mouvement fut d'arrêter pendant quelques inſtans le mâle dans ſes fonctions; mais la néceſſité

ſans

ſans doute de délivrer promptement la femelle qui étoit en travail, lui fit reprendre courage, & il recommença de nouveau à tirer le cordon des œufs. Mon attention ceſſa dès-lors d'être partagée; je ne m'attachai plus qu'à obſerver ſi le mâle fécondoit les œufs à meſure qu'il les tiroit : cependant quelque ſoin que j'aie apporté pour m'aſſurer de cette irroration que je cherchois avec tant d'empreſſement, & dont les ſalamandres d'eau m'avoient fourni un exemple *(c)*, il me fut impoſſible de rien découvrir qui y eût rapport; de ſorte que le jour baiſſant, je fus obligé, après environ une demi-heure d'attention, de remettre ces crapauds où je les avois pris.

La rencontre de ces animaux fut pour moi un de ces heureux haſards dont les Naturaliſtes ſeuls peuvent connoître le prix; elle m'offrit d'abord un fait d'hiſtoire naturelle des plus ſinguliers & dont je ne ſache pas que perſonne ait donné juſqu'ici aucun exemple parmi les animaux : c'eſt la fonction d'accoucheur que le mâle exerce envers ſa femelle; ce fait s'étant paſſé ſous mes yeux, & même ſur la paume de ma main, il ne me reſta rien à deſirer là-deſſus. Il n'en fut pas de même à la vérité pour l'autre partie de l'obſervation; malgré toute l'attention que j'apportai, il ne me fut pas poſſible de rien apercévoir qui eût quelque rapport à ce qu'avoit obſervé Swammerdam au ſujet des grenouilles, qui eſt qu'après un accouplement de quarante jours ou environ, le mâle féconde les œufs à meſure que la femelle les pond, en les arroſant de ſa liqueur ſéminale.

Cependant quoique je n'aie pu apercevoir cette irroration, il y a lieu de croire non-ſeulement qu'elle eſt néceſſaire pour la fécondation de cette eſpèce de frai, mais qu'elle ſe fait de

---

(c) La fécondation de la ſalamandre femelle, ſe fait ſans contact de la part du mâle, qui ſe tenant à un pouce environ de diſtance de la femelle & au-deſſus, éjacule ſa liqueur ſéminale ſur ſes flancs, & cette liqueur trouble un peu l'eau où ſe trouvent ces animaux. Cette obſervation ſe trouve à la ſuite du premier volume des *Eſſais & Obſervations de Médecine de la Société d'Edimbourg*, en françois.

la même manière que dans les grenouilles : la conformité qu'il y a entre la ſtructure des parties internes de celles-ci avec celles des crapauds, entre leur accouplement & leurs embryons, qui paſſent également par l'état de têtard avant que de parvenir à celui de crapaud ou de grenouille, me paroiſſent des raiſons qui confirment cette conjecture ; je ſerois donc tenté de croire que le mâle prend un autre temps pour cela. Il eſt vraiſemblable qu'il arroſe tous les œufs à la fois, de même que la grenouille, & c'eſt ce qu'il ne peut faire que lorſqu'il les a entièrement dévidés autour de ſes pattes : en effet la dépenſe ſeroit trop grande s'il les arroſoit les uns après les autres, à meſure qu'il les tire du réceptacle ; cela même ne pourroit ſe faire ſans qu'il y eût une grande quantité de liqueur ſéminale répandue par terre, & dans ce cas, il en ſeroit tombé ſur ma main, où le mâle travailla pendant environ un quart-d'heure.

Cette obſervation me fit connoître l'erreur où j'étois tombé quelque temps auparavant, lorſqu'étant chez le célèbre M. du Verney, aux travaux anatomiques duquel j'ai eu part pendant les deux dernières années de ſa vie ; je fus obligé de chercher au milieu de la nuit & au flambeau, des ſalamandres que la chaleur & la ſéchereſſe du temps retenoient dans leurs retraites pendant le jour. J'aperçus auprès d'un réſervoir un de ces crapauds qui portoit ſur ſon derrière un paquet d'œufs ; ce réſervoir étoit un tonneau qui ſortoit huit ou dix pouces hors de terre, & dont les environs étoient humides ; cet animal rodoit inutilement autour de ce tonneau pour y dépoſer ſes œufs ; l'accès lui en étoit interdit, parce que les bords en étoient trop élevés. Je le pris pour le jeter dans l'eau, afin de le tirer de la peine où il étoit, lorſque je ſentis quelque choſe qui fretilloit dans ma main ; je m'approchai du flambeau pour voir ce que c'étoit, & j'aperçus quelques petits têtards qui étoient ſortis de leur coque dans cet inſtant-là ; ils étoient très-vifs, auſſi gros & auſſi formés que des têtards de grenouilles qui ont déjà perdu leurs appendices, & qui ſont ſortis depuis environ quinze jours de leurs

enveloppes. Le cordon des œufs étoit entrelacé autour des pattes poſtérieures, de manière que l'animal ne pouvoit marcher qu'à petits pas. Je le pris alors pour la femelle; mais l'obſervation ci-deſſus me fit connoître dans la ſuite que c'étoit le mâle : c'eſt lui qui eſt chargé du ſoin de l'incubation. La Nature a partagé le travail avec une ſorte d'égalité entre ces deux animaux; la femelle eſt non-ſeulement chargée du fardeau de ſes œufs avant la ponte, mais elle porte encore le mâle ſur ſon dos peut-être pendant quarante jours, comme on l'a obſervé à l'égard des grenouilles & des crapauds aquatiques: le mâle à ſon tour accouche la femelle avec quelque difficulté, s'empare des œufs, qu'il porte ſur ſon derrière juſqu'au temps de l'excluſion des têtards, c'eſt-à-dire plus ou moins de temps, ſelon que la ſaiſon eſt plus ou moins favorable, & alors il va les dépoſer dans un endroit convenable. Il ſe précipite dans la première eau qu'il rencontre, & ſouvent il eſt la victime de l'amour paternel; car s'il ſe jette dans un baſſin ou dans tout autre endroit d'où il ne puiſſe facilement ſortir, il y périt au bout de quelques jours, ainſi que je l'ai obſervé pluſieurs fois. Cette eſpèce de crapaud, que Oligerus Jacobæus, regarde comme le *Rana phrynoïdes* de Geſner, & que quelques Auteurs appellent *Rubeta minor,* pour le diſtinguer du crapaud ordinaire, qu'ils nomment *Rubeta major,* ne peut vivre dans l'eau quand une fois il en eſt ſorti. Il paſſe les premiers temps de ſa vie dans cet élément, & le reſte ſur terre; & ce fait, au rapport de Geſner, a été connu des plus anciens Naturaliſtes, qui aſſurent la même choſe du crapaud ordinaire.

Celui dont il s'agit ici, ſort de ſa coque ſous la forme d'un têtard ſans appendices : dans cet état, il a des ouïes & vit dans l'eau à la manière des poiſſons; il y reſte juſqu'à ce que ſes ouïes commencent à s'effacer, ce qui arrive lorſque les deux pattes de devant ont déchiré la membrane qui les renfermoit, & dès qu'il peut marcher ou ſauter, il cherche un autre élément, & ſort de l'eau avant même que ſa queue ſoit entièrement effacée.

DEUXIÉME MÉMOIRE

Sur le Gommier blanc appelé Uérek *au Sénégal ; ſur la manière dont on fait la récolte de ſa gomme & de celle des Acacias, & ſur un autre Arbre du même genre.*

Par M. ADANSON.

Lû le 11 Juillet 1778.

DANS le premier Mémoire, que je lûs à l'Académie le 24 Février 1773, ſur les Gommiers, je me bornai à la deſcription des trois eſpèces d'*Acacias*, dont deux particulièrement portent la gomme connue dans le commerce ſous le nom de *Gomme rouge* ou *Gomme* d'*Arabie ;* dans celui-ci, je me propoſe d'entretenir l'Aſſemblée de deux autres eſpèces qui doivent former un genre particulier, qui reconnoitra pour chef le Gommier blanc, le Gommier par excellence, le Gommier du Sénégal, celui dont le ſuc fait preſque la ſeule nourriture des Arabes, pendant leurs voyages dans les déſerts de l'Afrique.

PREMIÈRE ESPÈCE.

Gommier blanc Uérek.

Découverte du Gommier blanc.

Cet arbre, des plus communs parmi ceux qui couvrent la côte ſablonneuſe du Sénégal, depuis l'embouchure du Niger juſque vers la hauteur du Cap-blanc, quoique vu ou au moins à portée d'être vu, tous les jours par les Commerçans européens qui fréquentent ce pays depuis plus de quatre cents ans, n'avoit cependant encore été reconnu par aucun d'eux. L'intérêt qu'ils avoient de reconnoître cette branche du Commerce, qui eſt ſans contredit le plus lucratif qui ſe faſſe en Afrique, & peut-être dans le monde, qui par ſa quantité, par la modicité de ſon prix, & par la facilité de ſon tranſport, eſt préférable à la traite de l'Or & à celle des Nègres, les

avoient engagés plusieurs fois dans le projet de faire avec les Maures un voyage dans les forêts, où l'on sait qu'ils recueillent cette gomme : plusieurs fois ils tentèrent ce voyage; mais rebutés, soit par les difficultés qu'ils rencontrèrent à traverser des sables brûlans dans le pays le plus chaud qui soit connu, soit par le danger qu'ils avoient à courir; livrés ainsi entièrement à la merci des brigands tels que les Maures, ces tentatives échouèrent, de sorte que l'arbre de la gomme resta inconnu jusqu'à l'année 1748, où je partis pour le Sénégal. Arrivé dans ce pays, dans le dessein d'y découvrir, s'il étoit possible, les plantes qui fournissent au Commerce une source aussi variée que considérable de richesses, & dont plusieurs Membres de cette Académie m'avoient remis une note, savoir, le gommier, l'encens, le bdellium, la myrrhe, l'assa fœtida, l'opopanax, la sarcocolle, &c. mes premières vues se portèrent sur le gommier & sur l'arbre de l'encens, que l'on disoit croître dans les mêmes forêts. Je formai donc le projet de courir les risques d'aller visiter les forêts de gommiers; il ne s'agissoit pour cela que de remonter le Niger à trente lieues de son embouchure, jusqu'au lieu qu'on nomme le *Désert*, où se fait annuellement la traite de la gomme, & de traverser de cet endroit quinze à vingt lieues de terres en allant vers le Nord pour gagner lesdites forêts. Pendant qu'on équipoit un bateau pour faire ces voyages, je m'avisai, pour ne pas perdre de temps, de faire quelques promenades aux environs de l'île du Sénégal, où j'avois débarqué; mais quelle fut ma surprise lorsqu'en mettant pied à terre sur la pointe méridionale de l'île au Bois, distante d'une petite lieue au nord de l'île du Sénégal, un des premiers arbres que je rencontrai fut un gommier, portant le long de ses branches & de son tronc plusieurs boules de gomme, d'un blanc terne, mais très-transparente; je la goûtai, & sa douceur, sans fadeur, jointe à sa couleur & à sa forme, m'assura qu'elle ne différoit aucunement de la gomme du commerce; puis examinant les feuilles, les fleurs & les fruits de cet arbre, il me parut former, sinon un genre, au moins une nouvelle espèce

d'acacia, de ſorte que comme elle n'avoit point encore été nommée par aucun Botaniſte avant moi, je l'envoyai à M. de Juſſieu dès la même année, avec beaucoup d'autres plantes, pour en communiquer la découverte à l'Académie, ſous la dénomination ſuivante: *Acacia, Uerek Senegalentibus dicta, aculeata, aculeis ternis, intermedio deflexo, floribus polyandris ſpicatis, legumine compreſſo lævi elliptico*, que M. Linné fit imprimer en 1753 dans ſon livre intitulé *Species Plantarum, pag. 521,* & qu'il nomma *mimoſa, Senegal, ſpinis ternis, intermedio reflexo, foliis bipinnatis, floribus ſpicatis.* Tel eſt l'hiſtorique abrégé de la première découverte du gommier blanc, qui me mena peu après à celle des divers gommiers rouges qui ſe trouvent auſſi dans les mêmes cantons, & qui me diſpenſa de faire un voyage au moins ſuperflu, & peut-être pernicieux chez les Maures: paſſons actuellement à ſa deſcription.

Son nom. Le gommier blanc eſt connu par les Nègres du pays d'Oualo, ſous le nom d'*Uérck;* il ſe plaît particulièrement dans les ſables blancs & mobiles qui bordent la côte maritime du Sénégal, où ils forment une eſpèce de bande de dix à quinze lieues de largeur, qui s'étend depuis la rivière de Cachao, par le douzième degré de latitude boréale, juſqu'au Cap-blanc, par le 20.e degré $\frac{1}{2}$ & au-delà: j'en ai trouvé par toute cette bande, depuis l'île Saint-Louis du Sénégal juſqu'au Cap-verd, mais nulle part en auſſi grande abondance qu'à deux lieues à la ronde de l'île même du Sénégal.

Sa forme. C'eſt un arbre de moyenne taille, un arbriſſeau de quinze à vingt pieds de hauteur, d'une forme peu élégante & très-irrégulière, comme celle d'un buiſſon; ſon tronc eſt cylindrique, rarement droit, mais diverſement incliné, d'un pied au plus de diamètre, & couvert pour l'ordinaire du bas en haut de branches pareillement tortueuſes, fort irrégulières, aſſez denſes, menues, mais roides & fortes: l'écorce qui couvre les vieilles branches ainſi que le tronc, eſt médiocrement épaiſſe, aſſez liſſe, un peu luiſante, & d'un gris qui

tire ſur le cendré ou ſur le brun; leur bois eſt plein, dur & blanc par-tout: les jeunes branches ſont d'un gris-blanc & ſemées de poils coniques, très-petits & couchés.

Les feuilles ſont diſpoſées alternativement & circulairement autour des branches, à un travers de doigt de diſtance les unes des autres, & ailées doublement, c'eſt-à-dire compoſées chacune de quatre, mais plus communément de cinq paires d'ailes, qui portent chacune quinze paires de folioles elliptiques, d'un vert-bleuâtre, longues de deux lignes & demie, & deux fois moins larges: les ailes ont à peine un pouce de longueur, & ſont d'un tiers plus courtes que le pédicule commun qui les ſoutient; celui-ci n'eſt pas terminé par un denticule, & porte ſur ſa face ſupérieure deux à trois glandes en cupule hémiſphérique concave, dont la première eſt placée vers ſon extrémité entre les deux ailes de la première paire, & la ſeconde, tantôt entre la dernière paire inférieure, tantôt plus bas; la troiſième, lorſqu'elle s'y trouve, eſt placée entre la ſeconde paire des ailes ſupérieures: de l'origine du pédicule commun de chaque feuille, ſortent deux, & plus communément trois épines coniques, brunes-noires, luiſantes, longues de deux lignes, aſſez égales entr'elles, dont les deux collatérales ſont droites, écartées horizontalement, & la troiſième ou l'intermédiaire eſt courbée en-deſſous en crochet: les branches de la ſéve précédente, portent ſouvent deux feuilles qui ſortent d'une eſpèce de tubercule, qui eſt reſté comme un bourgeon après la chute de l'ancienne feuiſle. Ses feuilles.

Ce n'eſt que ſur ces branches de la ſéve ou de la crûe précédente que l'on voit les épis de fleurs: ils ſortent communément deux à deux, non de l'aiſſelle d'une feuille, mais derrière elle, c'eſt-à-dire, entr'elle & les deux épines latérales; chaque épi eſt garni d'environ cent fleurs hermaphrodites blanches, diſpoſées par grouppes ou paquets de trois à cinq, ſemés çà & là ſur toute leur longueur, qui eſt de trois pouces environ, c'eſt-à-dire, une fois plus longue que les feuilles priſes dans leur entier; lorſque cet épi eſt en fleurs bien épanouies, il a à-peu-près la grandeur & la forme du Ses fleurs.

petit doigt, de ſorte qu'il paroît avoir cinq fois plus de longueur que de largeur; chaque fleur eſt blanche, longue de trois lignes, & accompagnée à ſon origine d'une écaille elliptique pointue, une fois plus longue que large, ciliée, c'eſt-à-dire, bordée de poils en forme de cils, trois fois plus courte que le calice, & qui tombe bien avant lui.

Le calice forme un tuyau cylindrique, blanc, verdâtre, de moitié plus long que large, partagé juſqu'au tiers de ſa longueur en cinq denticules égaux triangulaires équilatéraux; il renferme une corolle blanche, de même forme, plus longue d'un quart, & dont les cinq dentelures ont une fois plus de longueur que de largeur, & ſont bordées de petites pointes coniques criſtallines. Soixante-dix à quatre-vingts étamines égales, droites, blanches, une fois plus longues que la corolle, divergentes à peine ſous un angle de 15 degrés, liſſes, luiſantes, ſont réunies en une eſpèce d'anneau contigu à la corolle qui part du fond du calice, & au ſommet duquel elles ſont diſtribuées ſur cinq rangs: chacun de leurs filets eſt couronné par une anthère ſphéroïde marquée du côté intérieur de trois ſillons, & de l'autre d'un petit enfoncement qui reçoit l'extrémité du filet; cette anthère eſt outre cela terminée par un tubercule blanc ſphérique chagriné de denticules coniques: c'eſt par les deux ſillons latéraux qu'elle s'ouvre pour répandre la pouſſière fécondante, qui eſt compoſée de globules très-nombreux, d'une petiteſſe qui échappe à la vue, liſſes, luiſans, & de couleur d'or. L'anneau des étamines laiſſe à ſon centre un petit vide, duquel s'élève, ſans le toucher, un filet fort mince, qui ſert de ſupport à un ovaire cylindrique ou peu aplati, trois fois plus long que lui, & deux fois plus long que large; cet ovaire eſt terminé par un ſtyle cylindrique trois fois plus long & plus étroit que lui, dont le ſommet eſt creux, coupé horizontalement, & tout couvert de pointes coniques inſenſibles à la vue ſimple.

Ses fruits. La forme de l'ovaire change peu-à-peu en grandiſſant, au point qu'il devient, lors de ſa maturité, un légume extrêmement aplati, preſque auſſi mince qu'une membrane, d'un jaune de bois,

de bois, elliptique, pointu aux deux bouts, long de trois pouces & demi, cinq fois moins large, veiné finement à l'extérieur, ondé légèrement & inégalement sur ses bords, semé de poils courts peu sensibles, & qui s'ouvre de lui-même d'un bout à l'autre en deux valves ou battans égaux, rapprochés l'un de l'autre en six endroits pour former autant de loges qui contiennent chacune une semence jaune, verdâtre, orbiculaire ou taillée en cœur extrêmement aplati, du diamètre de trois lignes & demie, pointue par son bout inférieur, marquée sur chaque face d'un sillon demi-circulaire, dont les cornes regardent le point du bord par lequel elle est attachée, pendante au bord supérieur de l'un des battans au moyen d'un filet cylindrique blanc de sa longueur & tortillé; ces graines ne sont pas attachées toutes au même battant, mais alternativement à l'un & à l'autre, comme dans toutes les autres plantes légumineuses.

En mâchant les feuilles du gommier blanc, on leur sent une légère amertume, qui est bientôt suivie par un peu d'astriction; lorsque la terre a été humectée abondamment par les pluies de l'été, qui tombent depuis le 15 Juin jusqu'en Septembre, alors on commence à voir couler du tissu & des branches de cet arbre, un suc gommeux qui y reste attaché sous la forme de larmes quelquefois vermiculées ou tortillées, mais communément ovoïdes ou sphéroïdes, de deux à trois pouces de diamètre, ridées à leur surface, d'un blanc terne, mais transparentes, cristallines, & luisantes dans leur cassure, d'une saveur douce sans fadeur, accompagnée d'une légère acidité qui ne se laisse reconnoître que par les personnes qui en font un usage habituel: ces larmes coulent naturellement sans le secours d'aucune sorte d'incision pendant toute la saison de la sécheresse, qui dure depuis le mois d'Octobre jusqu'en celui de Juin, mais plus abondamment dans les premiers mois qui suivent les dernières pluies; quelquefois la grande sécheresse du vent d'Est qui règne alors, augmentant d'intensité pendant les derniers mois, les détache & les fait tomber par terre, mais le plus grand nombre reste attaché

Ses qualités.

à l'écorce, d'où elles sont sorties. C'est aussi pendant cette saison que l'Uérek porte ses fleurs; ses premières gousses commencent à mûrir dès le mois de Novembre.

Ses usages. La gomme est la seule partie de cet arbre dont on fasse usage au Sénégal; elle est si nourrissante, si salutaire, si rafraîchissante, que les Maures & les Arabes, qui sont un peuple considérable dans l'Afrique, un peuple toujours errant, qui ne sait ni semer du grain ni recueillir, en font leur unique nourriture pendant la plus grande partie de l'année, au moins pendant leurs longs voyages, ou avec le lait de leurs chameaux, de leurs vaches, de leurs chèvres & brebis, ils se passent de tout autre mets & de toute sorte de boisson, dans une saison & dans des sables où la sécheresse ne leur permettroit pas de trouver une goutte d'eau pour étancher leur soif ardente. Cette manne, toute répandue qu'elle est sur la côte du Sénégal, exige qu'on en fasse une récolte annuelle pour subvenir à de si grands besoins, & pour contenter les desirs des Commerçans européens qui fréquentent le pays du Sénégal : on sait que la plus grande consommation de cette gomme se fait pour donner du corps aux étoffes de soie, & à certaines toiles de coton, de lin & de chanvre; qu'on en emploie beaucoup pour faire tenir les couleurs sur le vélin, pour gommer le papier, & dans nombre d'autres Manufactures. La Médecine l'ordonne aussi dans nombre de maladies où il faut adoucir, rafraîchir, resserrer & nourrir, dans les épuisemens, dans les dissenteries bilieuses, les diarrhées & les pertes de sang les plus rébelles.

Récolte de la gomme. Les Maures, qui sont de vrais Arabes, toujours errans entre le royaume de Maroc & le fleuve Niger, dont les Nègres leur ont abandonné la rive septentrionale, se chargent seuls de la récolte de la gomme, dont les arbres couvrent la plus grande partie de ce pays. Pendant l'été, qui est la saison des pluies, ils se retirent vers le Nord, au pied des montagnes voisines du pays de Maroc; & lorsque les pluies ont cessé vers la fin de l'année, ils se rapprochent peu-à-peu du Niger, en descendant dans la plaine où sont

les forêts de gommiers : car ces arbres ne se cultivent pas. Ces forêts commencent à quinze lieues environ du fleuve Niger, & s'étendent en gagnant vers le Nord à une distance qu'on estime communément de quatre-vingts lieues, & qui pourroit bien aller jusqu'au Cap-blanc, c'est-à-dire, jusqu'à cent lieues, & peut-être beaucoup au-delà en approchant de Maroc, à en juger par les relations des Maures eux-mêmes. Ils donnent à cette forêt environ trente lieues de largeur de l'Occident à l'Orient, & la distinguent en trois portions distantes de dix lieues l'une de l'autre, dont la première, qu'ils appellent la *forêt de Sahel*, est la plus proche du Niger, en étant éloignée d'environ quinze lieues, ainsi que de la mer; celle qui vient après, en longeant vers le Nord, s'appelle la *forêt de Lébiar*, & côtoye comme elle la bande sablonneuse qui borde l'Océan: c'est la plus grande des trois; enfin la forêt d'*Alfatak* occupe le milieu de la bande de terre, moitié sablonneuse, moitié argileuse, à l'orient des deux autres forêts: sa largeur est ignorée. Il paroît encore par le récit des mêmes Maures, qui s'accorde assez avec mes observations, que la forêt de Sahel, qui est pour la plus grande partie plantée sur la bande sablonneuse, est presque uniquement composée de gommiers blancs uéreck; que celle de Lébiar, qui borde en partie les mêmes sables vers le Nord, contient plus de petit gommier rouge nebneb, qui est celui d'Arabie; qu'enfin, la forêt d'Alfatak, qui est plus enfoncée dans le continent où la terre est plus grasse, est entièrement du grand gommier appelé *gonakè*. Ces trois forêts appartiennent à trois tribus de Maures, qui y font leur récolte chacune dans la leur; ce sont elles qui fournissent toute la gomme qui se porte au Sénégal : les trois espèces se trouvent mélangées indistinctement, &, suivant le canton où elle a été cueillie, tantôt c'est la blanche, tantôt c'est la rouge qui domine; celle-ci est la moins estimée; on y rencontre aussi des morceaux de *bdellium*, que les Européens regardent mal-à-propos comme l'encens, quoiqu'il leur fasse le même usage: c'est une résine d'un rouge d'abord rosé, ensuite brun, très-odoriférante, dont je donnerai l'histoire en son temps.

Se fait deux récoltes par an.

Les Maures nous aſſurent qu'ils font deux récoltes de gomme chaque année : la première, qui eſt la plus abondante, ſe fait au mois de Décembre ; les boules en ſont plus groſſes, plus nettes, moins sèches, moins ridées, parce que les arbres, alors ſurchargés de ſéve par les pluies de l'été, la rendent en abondance, & que le Soleil, moins chaud pendant ce mois que dans le reſte de l'année, ne la deſsèche pas tant : la ſeconde récolte ſe fait au mois de Mars ; les boules en ſont plus petites, plus ridées, moins fréquentes, mais ſouvent plus blanches, & tombent quelquefois par terre, deſſéchées par le vent d'Eſt, qui les fait détacher de l'écorce. La plupart des Auteurs qui ont écrit ſur le Sénégal, depuis le P. Labat, ont dit, d'après lui, que les Maures la tiroient par inciſion ; mais c'eſt une erreur qu'on a tort de répandre, parce qu'elle n'a aucun fondement.

Lieux où l'on traite la gomme.

Il n'y a que cinq endroits principaux où l'on ait jamais fait la traite de la gomme au Sénégal, dont trois ſur la côte ; ſavoir, Marſa ou le petit Portendic, à trente-quatre lieues marines au nord de l'île du Sénégal ou de l'embouchure du Niger ; Portendic à quarante-deux lieues, & l'île de Guï Aguadir ou d'Arguin, à quatre-vingt-cinq lieues : les deux autres eſcalles de traite ſont ſur le fleuve Niger, dont la première & la plus conſidérable appelée le *Déſert*, eſt à trente lieues de ſon embouchure dans l'Eſt-nord-eſt, & correſpond au grand & au petit Portendic : la ſeconde eſt à Donaï, ſur le terrier rouge, à quarante lieues de la même embouchure, & correſpond au commerce d'Arguin ; voici comment.

J'ai dit ci-deſſus qu'il y a trois forêts de gommiers au Sénégal ; que chacune d'elle appartient à une tribu de Maures, qui ſe réſerve le droit excluſif d'y venir faire annuellement ſa récolte de gomme : or la poſition phyſique de chacune de ces forêts a déterminé leurs propriétaires à porter leur gomme à l'eſcalle ou l'échelle la plus voiſine de leur habitation ordinaire ; & comme les pâturages néceſſaires à leurs troupeaux ſont plus abondans dans le voiſinage des rivières, ils ſe ſont rapprochés autant qu'ils ont pu du fleuve Niger,

ſans quitter leur forêt : c'eſt ainſi que le Bakar *, chef de la tribu des Ébragéna, à laquelle appartient la grande forêt d'Alfatak qui commence aux bords du lac Caër, improprement appelé *Cayar*, & qui s'étend conſidérablement dans l'Eſt, vient porter ſa gomme à l'eſcalle de Donaï, ſur le terrier Donaï. rouge, dans le voiſinage du comptoir de Podor ; nous apprenons par cette Tribu, & par les Nègres qui l'avoiſinent, que ſon adouar, c'eſt-à-dire le lieu de ſon campement, eſt à cinquante lieues du fort de Podor, ſur les terres du royaume de Sitati, dont les peuples appelés *Peul*, & par corruption *Foules*, ſont des Nègres. On ſait par les dépouillemens des regiſtres de la Compagnie des Indes, qu'en l'année 1700, où ſon commerce n'étoit pas auſſi conſidérable que dans les derniers temps, il fut traité au terrier rouge, pendant les Mars, Avril & Mai, plus de trois mille ſix cents quintaux mois de Maures de gomme, qui équivalent à quatorze mille quatre cents quintaux de France ; or, le quintal des Maures peſoit alors quatre cents livres, & depuis l'année 1715, M. Bruë, alors Directeur général au Sénégal, le fit monter à ſept cents livres, où il eſt reſté.

La forêt de Lébiar, que le P. Labat & ſes Copiſtes diſent n'être qu'à trente lieues au Nord-eſt de l'eſcalle du Déſert, & Le Déſert. que les Maures nous aſſurent être à plus de quarante lieues, appartient à la famille des Darmanko, chefs de la tribu des Auled-el-hagi ; ces Maures ſont fort laborieux, & quoiqu'auſſi voiſins d'Arguin, ils préfèrent d'apporter leur gomme à l'eſcalle du Déſert, à cauſe des pâturages qu'ils trouvent aux bords du Niger, où ils paſſent le reſte de la ſaiſon sèche, c'eſt-à-dire juſqu'en Mai & Juin : quoique leur forêt ſoit la plus grande des trois, & qu'elle fourniſſe abondamment, néanmoins ils en recueillent quelquefois dans celle d'Alfatak, & ils en portent communément douze à quinze mille quintaux au Déſert.

La forêt de Sahel, quoique la moindre des trois forêts de gommiers eſt la plus précieuſe, par la qualité de la gomme

* Ceci a été écrit en 1749, ſur les lieux, au Sénégal.

qu'elle produit : aussi le maître de cette forêt a-t-il sur les deux autres une supériorité qui est encore augmentée par sa plus grande proximité de Portendic & de l'île Saint-Louis, qui est le chef-lieu de la concession du Sénégal ; elle fournit environ dix mille quintaux de gomme : la tribu à laquelle elle appartient se nomme Thrarza ou Terarza, & a pour chef Hamar-Alichandora, fils d'Addi, qui a donné son nom au port d'Addi, appelé par corruption *Portendic.* Ce Seigneur promène ses tentes ou ses villages ambulans au nord & à l'occident de cette forêt, du côté d'Arguin & de Portendic, où il porte sa gomme, mais par préférence à Portendic, où sont deux pauvres hameaux d'environ deux cents personnes chacun, qui y sont fixes, au moins pendant le temps de la traite, c'est-à-dire depuis le mois de Décembre jusqu'au mois de Juin. Le gouvernement de ces deux hameaux est confié au maître de l'escalle, nommé autrefois Bovali, qui fait avertir Alichandora dès qu'il arrive des vaisseaux pour la traite.

Arguin & Portendic.

Les Maures trouvant beaucoup plus de facilité à porter leur gomme sur les bords du Niger, où ils sont attirés après leur récolte, & comme fixés pendant l'hiver par l'abondance des pâturages, la vendoient autrefois toute aux François, qui étoient en possession de ce fleuve, & qui profitoient de cette facilité pour l'acquérir à très-vil prix. Les Anglois de leur côté, les Hollandois & les Portugais, qui vouloient enlever aux François, ou au moins partager avec eux ce commerce avantageux, jusqu'à ce qu'ils fussent en état de s'en emparer entièrement, cherchèrent à attirer les Maures avec leur gomme sur la côte maritime ; pour y réussir, ils s'établirent d'abord parmi eux à Portendic, puis ils gagnèrent Hamar-Alichandora par des présens, & le déterminèrent, à force d'argent, à insulter, maltraiter & piller les deux autres Tribus qui alloient porter leurs gommes sur le Niger, pour les forcer de les amener à Portendic, où il les achetoient à un prix excessif, en livrant leurs marchandises à perte, afin d'engager ces trois nations Maures à leur apporter leurs récoltes entières : ces

Différends pour ce commerce.

Interlopes étrangers firent donc en contrebande ce commerce d'abord à terre, mais ils en ſentirent bientôt les inconvéniens ; les friponneries des Maures, leurs conteſtations élevées à deſſein ſur leurs droits de propriété du terrein où ſe faiſoit la traite, le double maniement de la gomme ainſi traitée à terre, le temps perdu à cette double opération, les riſques de la mouiller en l'embarquant dans les chaloupes pour la porter à bord, la perte & le déchet qui en ſont les ſuites & qui doivent retomber ſur le vendeur & non ſur l'acheteur; tout cela leur fit faire des réflexions : ils jugèrent à-propos de ne plus deſcendre à terre, & de ſe faire apporter la gomme à bord de leurs vaiſſeaux ; mais cet expédient fut ſujet à d'autres inconvéniens, à cauſe des grands mouvemens de la mer; ils prirent donc le parti de s'établir à terre, dans un lieu où ils n'euſſent point à craindre le brigandage & les incurſions des Maures : pour cet effet, ils bâtirent ſur le roc de l'île d'Arguin un Fort, dont ils furent bientôt chaſſés par les François, qui le démolirent. Ce fut ainſi que les Anglois n'abandonnèrent que peu-à-peu, & malgré eux, un commerce dont ils connoiſſoient parfaitement tout le prix.

La quantité de gomme qui ſe vend annuellement au *Sénégal*, va communément à trente mille quintaux; ſavoir, douze mille à l'eſcalle du Déſert, ſix mille à celle de Donaï ou du Terrier rouge, & dix mille à Portendic, qui portés en Europe, rendent près de ſix millions en eſpèces; ſon commerce eſt donc, comme il a été dit, infiniment plus avantageux que la Traite de l'or & que celle des Nègres, dont on ne tire guère plus de trois mille par an de ce même pays. Quantité de gomme qui ſe tire annuellement du Sénégal.

Autrefois la gomme ſe tiroit toute de l'Arabie, avant que les François ſe fuſſent établis ſur le fleuve Niger au Sénégal; mais depuis qu'ils ont ouvert ce commerce à l'Europe, le prix de cette marchandiſe a beaucoup diminué, & fait diſparoître celle qui venoit de l'Arabie, & certainement en bien moindre quantité; car les trois millions peſant qu'on tire annuellement du *Sénégal*, feroient la charge de plus de trois mille chameaux. Elles ne diffèrent en rien l'une de

l'autre : elles ont les mêmes qualités, les mêmes vertus, les mêmes uſages, les mêmes avantages, & il paroît, par ce qui a été dit, qu'elles ſont tirées des mêmes arbres, au moins de deux gommiers rouges dont j'ai fait la deſcription.

Remarques. Quoiqu'on ne trouve dans les Auteurs anciens aucune deſcription qui puiſſe s'appliquer à cette eſpèce, on voit cependant que ce que Pline dit, livre XIII de ſon Hiſtoire Naturelle, au commencement du chapitre II, ne peut guère être attribué qu'à elle : *Gummi optimum eſſe ex Ægyptiâ ſpinâ convenit vermiculatum, colore glauco, purum, ſine cortice, dentibus adhærens. Prætium ejus in libras XIII deterius ex amygdalis amaris & ceraſo, peſſimum ex Prunis, &c.*

Quelqu'éloigné que je ſois de vouloir paroître trouver M. Linné en défaut, je ne puis refuſer, à la vérité, de dire qu'il s'eſt trompé en rapportant à cette plante, celle que Proſper Alpin a figurée à la *Planche IX,* ainſi que celle que Plukenet a fait graver, *Planche CCLI, figure 1* de ſa *Phytographie*, avec la dénomination ſuivante : *Acacia altera vera, ſiliquâ longâ villoſâ, cortice candicante donata,* qui eſt comme l'on a vu l'*Acacia vera,* appelé *Nebneb* au Sénégal. Au reſte, cette eſpèce eſt aſſez différente des trois premières par la diſpoſition de ſes fleurs, & par la figure de ſa gouſſe aplatie, pour déterminer les Botaniſtes à en faire un genre différent que l'on pourroit appeler de ſon nom de pays *Uérek.*

SECONDE ESPÈCE.

Le *Ded* des Nègres du Sénégal, eſt une cinquième ſorte d'Acacia qui vient naturellement dans le genre du Uérek, ou du Gommier blanc, & qui eſt aſſez commun dans les ſables voiſins de l'embouchure du fleuve Niger.

C'eſt un arbriſſeau en buiſſon conique, de la hauteur de ſix à dix pieds, dont les branches vieilles garniſſent le tronc depuis la racine juſqu'au faîte, & ſont couvertes d'une écorce brune mince, qui enveloppe un bois blanc, plein, aſſez dur. Les jeunes branches ſont verdâtres pentagones, couvertes de poils courts couchés aſſez ſerrés, & armées de tous côtés d'épines

d'épines ſemblables à celles du roſier, c'eſt-à-dire rouges, brunes, coniques, comprimées, longues de deux lignes & demie, & recourbées en deſſous en forme de crochet. Ses feuilles diffèrent de celles de l'Uérek, en ce qu'elles ont ſept à quatorze paires d'ailerons, chacune de trente-cinq paires de folioles plus étroites, longues de trois lignes, & trois fois moins larges: leur pédicule commun eſt ſemé en deſſous, comme les branches d'épines rouge-clair, & porte en-deſſus quatre tubercules ou glandes, dont une conique entre la première paire inférieure des pinnules, & trois hémiſphériques entre les trois dernières paires d'en haut; au lieu d'épines comme dans l'Uérek & les Acacias, ce pédicule commun eſt accompagné à ſon origine ſur les côtés, de deux ſtipules en lames triangulaires plates, une fois plus longues que larges, & qui tombent bien avant lui.

Deux épis cylindriques de fleurs blanches ſortent de l'aiſſelle de chacune des feuilles qui terminent le bout des branches; ils ont chacun deux pouces de longueur, & quatre fois moins de largeur; ils ſont une fois plus courts que les pédicules communs des feuilles, écartés ſous un angle de quarante-cinq degrés, & couverts depuis le haut juſque vers le bas d'une centaine de fleurs ſeſſiles contiguës, couchées horizontalement, & accompagnées chacune d'une écaille en forme de lance, égale à la longueur de la corolle, arrondie à ſon origine, deux fois plus longue que large, ſemée de longs poils & caduque; au-deſſous des dernières fleurs, cet épi porte encore une eſpèce d'enveloppe, compoſée de trois écailles triangulaires de grandeur médiocre, deux à trois fois plus longues que larges, veluës & qui tombent de bonne heure.

Chaque fleur a deux lignes de longueur; ſon calice eſt un tuyau cylindrique, jaunâtre, liſſe, mince, preſque une fois plus long que large, diviſé juſqu'au quart de ſa longueur en cinq dents triangulaires; il enveloppe une corolle une fois plus longue que lui, de même forme, blanche, deux fois plus longue que large, partagée juſqu'au quart de ſa longueur en cinq denticules triangulaires, d'un tiers plus longs que larges.

Les étamines ſont comme dans l'Uérek; l'ovaire eſt ovoïde, comprimé, une fois plus long que large, tout couvert de poils blancs criſtallins, porté ſur un pédicule une fois plus court, & trois fois plus menu que lui, égal à la corolle; & il eſt ſurmonté par un ſtyle cylindrique tortillé une fois plus long que lui: du reſte, il reſſemble à celui de l'Uérek. Le légume qui provient de cet ovaire ne diffère de celui de l'Uérek, qu'en ce qu'il n'a que deux pouces & demi de longueur, qu'il eſt trois fois moins large, brun-noir, marqué ſur chacune de ſes faces de deux à trois grandes foſſettes, & partagé intérieurement en quatre à cinq loges, renfermant chacune une graine orbiculaire qui n'a ni prolongement, ni impreſſion ſur ſes faces.

Uſages. Je n'ai jamais rencontré de ſuc gommeux ſur cet arbriſſeau, quoiqu'il paroiſſe devoir en fournir comme l'Uérek, & il n'eſt d'aucun uſage. Les Nègres le reſpectent beaucoup, & le regardent ſuperſtitieuſement comme un arbre ſacré, ſans doute à cauſe de la quantité d'épines dont il eſt couvert, & ils prétendent qu'un homme qui s'y réfugieroit, pourſuivi en guerre ou pour quelque crime, y ſeroit à l'abri de ſes ennemis & de leurs flèches empoiſonnées: pareille recette ne ſeroit certainement guère goûtée par de braves guerriers.

Remarques. Rauwolf nous apprend qu'auprès d'Alep, le long du fleuve du Tigre dans la Méſopotamie, & de l'Euphrate dans l'Arabie déſerte, on trouve une eſpèce d'Acacia, appelée *Schack* par les Turcs, & *Schamuth* par les Arabes, qui l'ont corrompu du mot *Sant,* ſelon Celſe; que cet arbriſſeau n'eſt qu'un buiſſon auſſi déteſté par les Laboureurs du pays, que le ſont ici les fougères & l'arête-bœuf, *anonis reſta bovis,* lorſqu'ils gagnent dans nos champs; que ſes branches ſont cendrées & couvertes d'épines ſemblables à celles du roſier; que ſes feuilles ſont ailées comme celles du tragacant ou de la fougère femelle, mais ſi petites & ſi nombreuſes ſur la même côte, qu'au rapport de Bélon, le pouce ſeul en pourroit couvrir une cinquantaine; qu'il n'en a point vu les fleurs, mais que ſes gouſſes ſont brunes, plus épaiſſes & plus arrondies que celles

de la fève, fongueuſes intérieurement, & contenant deux à trois graines rouges. Peut-on trouver une plus grande conformité entre le *Schack* & le *Ded* du Sénégal, & ne feroit-on pas autoriſé à les regarder comme la même eſpèce, ſi ſon légume n'étoit pas auſſi épais que le dit Rauwolf, qui paroît avoir décrit une gouſſe de tamarin? Ce ſeroit encore celle dont Pline parle *chapitre IX* du *livre XIII* de ſon *Hiſtoire Naturelle*, & qu'il dit avoir le bois blanc. *Nec minùs ſpina celebratur in eâdem gente (Ægypto) duntaxat nigra, quoniam incorrupta etiam in aquis durat, ob id utiliſſima navium coſtis. Candida facilè putreſcit. Aculeus ſpinarum & in foliis. Semen in Siliquis, quo coria perficiuntur gallæ vice, Flos & coronis jucundus, & medicamentis utilis. Manat & gummi in eâ. Sed præcipua utilitas quod cæſa anno tertio reſurgit. Circa Thebas hæc, ubi & Quercus & Perſica & Oliva 300 a Nilo ſtadiis ſylveſtri tractu & ſuis fontibus riguo.*

Si M. Grangé ne s'eſt point trompé, le *Sant* eſt l'arbriſſeau dont les gouſſes bouillies fourniſſent le ſuc d'Acacia; mais ſi le *Sant* eſt la même eſpèce que le *Ded* du Sénégal, comme il y a beaucoup d'apparence, par la reſſemblance de toutes leurs parties, ſes gouſſes ſont ſi minces, ſi peu ſucculentes, que ſon aſſertion doit au moins paſſer encore pour douteuſe.

Il n'y a preſque pas d'Acacia au Sénégal qui ne fourniſſe plus ou moins de gomme; de plus, de quarante eſpèces que je poſſède, & qui doivent former au moins ſept à huit genres, quoique M. Linné les ait confondus ſous le nom très-impropre de *mimoſa*, qui ne convient qu'à la ſenſitive, je me ſuis borné juſqu'ici à la deſcription des cinq eſpèces qui comprennent les trois vrais gommiers, & deux arbres qu'on a ſouvent pris pour eux; leur hiſtoire m'a paru aſſez neuve & aſſez intéreſſante pour mériter les recherches pénibles que j'ai faites, dans la vue de vérifier, concilier ou corriger les contradictions ou les erreurs qui ſe trouvent répandues dans les Auteurs qui en ont parlé.

ÉCLIPSE DE SOLEIL,

DU 24 JUIN 1778, APRÈS-MIDI,

Obſervée à Paris de l'Obſervatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

Lû le 27 Juin 1778.

J'AVOIS préparé différens Inſtrumens pour cette obſervation : la veille & le jour de l'Éclipſe, j'avois pris un grand nombre de hauteurs correſpondantes du Soleil, pour bien connoître la marche de la Pendule. Les 23 & 24 juſqu'à 2 heures $\frac{1}{2}$ de l'après-midi, le ciel fut entièrement ſerein & ſans nuages, de manière qu'il y avoit tout lieu d'eſpérer que le beau temps continueroit; mais vers les 2 heures $\frac{1}{2}$, quelques nuages ſe formèrent & augmentèrent ſucceſſivement, de manière que quelques minutes avant l'Éclipſe, le ciel ſe trouva en grande partie couvert : le Soleil étoit dans les nuages au moment que l'Éclipſe a eu lieu, de manière qu'il ne fut pas poſſible de ſaiſir le commencement, & je ne pus voir le Soleil ſortant des nuages qu'à $3^h\ 53'\ 46''$ de temps vrai; & la Lune alors avoit déjà échancré le bord du Soleil, il y avoit quelques ſecondes.

Je m'occupai enſuite, dans les intervalles des nuages, à meſurer la diſtance des cornes de la partie éclipſée, par le moyen d'un micromètre à fils adapté à ma lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, montée ſur ſa machine parallactique; j'obſervai auſſi l'occultation de deux taches du Soleil au bord de la Lune; j'avois déterminé leurs poſitions ſur le Soleil, & je rapporterai leurs déterminations, ainſi que celles qui étoient en même temps ſur le diſque : ces obſervations pourront ſervir aux Aſtronomes qui auront obſervé leurs immerſions & émerſions. Voici la Table de mes obſervations.

TEMPS vrai. H. M. S.	DISTANC. des CORNES, &c. M. S.	
3. 53. 46	....	l'Éclipse déjà commencée depuis quelq. sec.
3. 57. 47	10. 59	distance des cornes.
4. 1. 53½	15. 10	
4. 2. 42	16. 6	
4. 4. 15	16. 58	
4. 5. 4	17. 41	
4. 6. 57½	18. 44	
4. 10. 19	20. 39	
4. 12. 45½	22. 0	
4. 14. 9½	....	Immerſ. de la tache *n.° 1* des Tables ſuiv.
4. 16. 55	23. 30	diſtance des cornes.
4. 19. 10½	21. 2	partie éclairée reſtante du Soleil: *douteuſe.*
4. 24. 13½	25. 42	diſtance des cornes.
4. 25. 25½	25. 52	
4. 26. 53	....	Immerſ. de la tache *n.° 3'* des Tables ſuiv.

Après l'immerſion de la tache *n.° 3'*, des nuages très-épais qui venoient du Sud-eſt, couvrirent le Soleil, & il ne fut plus poſſible de le revoir de la journée : vers les 6 heures du ſoir, il tomba un peu de pluie; elle fut plus abondante vers les 7 heures ½: entre 9 & 10 heures, il éclairoit, & après 10 heures le ciel ſe découvrit.

Durant la journée du 24, la chaleur fut très-grande, le Soleil étoit brûlant: pour connoître ſa chaleur, je fis tomber perpendiculairement ſes rayons ſur un thermomètre à mercure que j'avois attaché à l'extrémité de ma lunette achromatique, montée ſur ſa machine parallactique, placée dans mon obſervatoire, où l'air ne pouvoit pas circuler ; à 1 heure ½ de l'après-midi, le ciel étant parfaitement beau, ſerein & ſans nuage, la liqueur du thermomètre monta à 47 degrés ½ de

dilatation, tandis qu'un ſecond thermomètre, de même mercure, qui étoit placé au Nord, ne marquoit que 25 degrés; ce qui donnoit une différence entre ces deux poſitions de 22 degrés $\frac{1}{2}$.

À 3^h $17'$, le thermomètre de la lunette achromatique marquoit encore, quoiqu'il y eût des nuages, 45 degrés: à 3^h $25'$, les nuages augmentés, le même thermomètre marquoit 44, & celui qui étoit au Nord 26 degrés.

Pendant l'Éclipſe, le thermomètre au Nord marquoit, quoique le ciel fût preſque totalement couvert, ſavoir à 4^h $30'$, 26^d; à 4^h $45'$, $25^d\frac{1}{2}$; à 5^h $23'$, 24^d; à 5^h $40'$, 24^d: le baromètre étoit à 28 pouces 0 lignes $\frac{1}{2}$, le vent au Sud.

Voici les obſervations des taches du Soleil, déterminées les 24 & 25 Juin, peu de minutes après midi.

Poſition des Taches, le 24 Juin.

NUMÉR. des TACHES.	TEMPS VRAI du Paſſage des TACHES au fil horaire.	DIFFÉR. de hauteur des TACHES au bord ſupérieur du SOLEIL.
	H. M. S.	*M. S.*
⊙	0. 39. 4	1.er bord ⊙
1	0. 39. 20	14. 37
2	0. 39, 26	13. 19
3	0. 40. 25 $\frac{3}{4}$	22. 34
3'	0. 40. 26 $\frac{1}{4}$	22. 12
5	0. 40. 29	8. 56
4	0. 40. 31 $\frac{1}{2}$	22. 0
6	0. 40. 37	7. 28
⊙	0. 41. 23	2.e bord ⊙

Poſition des Taches, le 25 Juin.

NUMÉR. des TACHES.	TEMPS VRAI du Paſſage des TACHES au fil horaire.	DIFFÉR. de hauteur des TACHES au bord ſupérieur du SOLEIL.
	H. M. S.	*M. S.*
⊙	0. 11. 52	1.er bord ⊙
1	0. 11. 59	14. 34
2	0. 12. 5	13. 22
3	0. 12. 59	22. 51
3'	0. 13. 0	22. 33
5	0. 13. 4	9. 13
4	0. 13. 4	22. 6
6	0. 13. 59 $\frac{1}{2}$	7. 44
⊙	0. 14. 10	2.e bord ⊙

OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL, DU 24 JUIN 1778,

Faite à l'Observatoire royal de Paris.

Par M. JEAURAT.

LES obſervations d'Éclipſes de Soleil ſont importantes pour la détermination des Longitudes terreſtres, & pour la rectification des Tables de la Lune; mais comme je n'ai pas été aſſez heureux pour avoir un temps favorable à ces obſervations, on fera bien de ne compter ſur leur exactitude, qu'autant qu'elles auront été confirmées par d'autres obſervations faites dans un lieu où le temps étoit plus favorable. Lû le 27 Juin 1778.

Dès le commencement de l'Éclipſe, le Soleil ne ſe pouvoit voir que par inſtans à travers les nuages; & avant que l'Éclipſe fût à ſon milieu, le Soleil a entièrement diſparu. Pour obſerver le commencement de l'Éclipſe, j'avois, grâce à la complaiſance de M. Navare, un excellent téleſcope de ſa conſtruction: ce téleſcope a 32 pouces de foyer, & amplifie quatre-vingt fois le diamètre des objets; j'avois auſſi deux pendules à ſecondes & un inſtrument des paſſages, dont je pouvois mouvoir la lunette ſans craindre que les fils verticaux & horizontaux ceſſaſſent d'être placés convenablement; j'étois pourvu d'ailleurs d'une autre lunette, que je nommerois volontiers *lunette Diplantidienne*, parce qu'elle préſente deux images de l'objet, l'une dans le ſens renverſé de l'autre: j'eſpérois, au moyen de cet inſtrument, ſaiſir avec préciſion les inſtans où l'Éclipſe a dû être de ſix doigts avant & après la plus grande phaſe de l'Éclipſe; car cette obſervation peut ſe faire facilement avec ma nouvelle lunette.

Depuis les découvertes qu'ont faites M.[rs] Bouguer & l'abbé Rochon, pour les micromètres objectifs, on ne peut plus,

pour ainsi dire, se flatter d'en imaginer d'autres dans ce genre: aussi mon unique but dans l'invention de ma *lunette Diplantidienne*, a été de me procurer une lunette méridienne, avec laquelle je pusse observer directement l'instant même du passage du centre des Astres par le Méridien, sans être privé du moyen de déduire ce passage par l'observation du contact des deux bords au fil de la lunette, comme on le fait ordinairement, & aussi de pouvoir observer les petites Étoiles sans avoir besoin d'éclairer les fils de la lunette *(V. Mém. de l'Acad. ann. 1779).*

Je dois à l'habileté de M. Navare, dans l'Optique, la construction de ma nouvelle lunette; car la difficulté de l'exécution, & celle des combinaisons propres à la faire réussir étoient grandes. Voici succinctement en quoi consiste l'idée de ma lunette, dont je me proposois de faire usage dans l'observation de l'Éclipse dont il est ici question.

C'est une lunette qui représente tout-à-la-fois l'objet dans une situation droite, & dans une situation renversée, les deux images étant d'ailleurs exactement de la même grandeur, & le champ de la lunette pour chaque image étant aussi le même, lorsqu'on dirige la lunette vers un Astre, on l'y voit entrer tout-à-la-fois des deux côtés; puis les deux images s'étant croisées, sortent de la même manière par les côtés opposés à ceux par où elles sont entrées.

Il suit de-là que l'instant où les deux images se trouvent exactement l'une sur l'autre, est précisément celui du passage du centre par l'axe de la lunette, & que les attouchemens des disques, avant & après le croisement des deux images, donnent les instans des passages des deux bords, dont on déduit, comme à l'ordinaire, l'instant du passage du centre, quoique déjà observé d'une manière directe, comme je viens de le dire.

Comme la marche des images dans la lunette se fait en sens contraire, elle double la vitesse apparente des passages par le Méridien: voici présentement le peu d'observations que j'ai pu faire de l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778, dont ce Mémoire est l'objet.

CORRECTIONS

Corrections à faire aux Obſervations faites à un fil vertical, ou Mouvement apparent des cornes ſur le diſque ſolaire, calculé en degrés & en temps, pour un intervalle de 5 minutes, dont 3′ 17″ de temps, répondent à 31′ 33″ de degrés.

TEMPS VRAI des OBSERVATIONS	PREMIÈRE CORNE ou CORNE OCCIDENTALE.		SECONDE CORNE ou CORNE ORIENTALE.	
	En Degrés.	En Temps.	En Degrés.	En Temps.
4^h 0′	— 63″,0.	— 6″,4.	+ 178″,0	+ 18″,5.
4. 5.	— 41,0.	— 4,2.	+ 146,0	+ 15,2.
4. 10.	— 19,0,	— 1,9,	+ 130,0	+ 13,5.
4. 15.	— 2,0.	— 0,2.	+ 112,0	+ 11,7.
4. 20.	+ 9,0.	+ 0,9.	+ 90,0	+ 9,4.
4. 25.	+ 30,0.	+ 3,2.	+ 75,0	+ 7,8.
4. 30.				

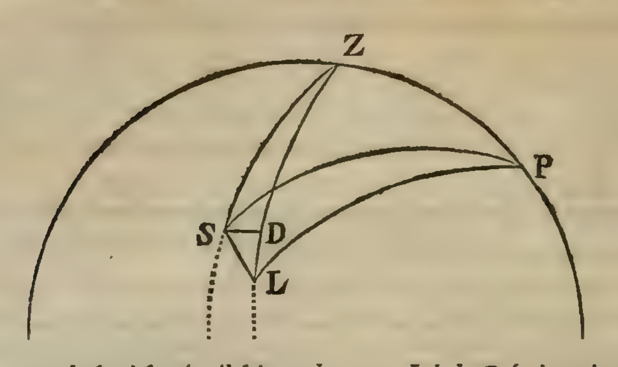
C'eſt avec cette Table que les Obſervations ſuivantes ont été réduites; ces Obſervations ſont auſſi toutes réduites au temps vrai de l'Obſervatoire royal de Paris.

Obſervations de l'Éclipſe de Soleil du 24 Juin 1778.

Cette Éclipſe étoit commencée à.............	3^h 53′ 42″.
Par eſtime, j'ai conjecturé qu'elle avoit pu commencer à..........................	3. 53. 15.
C'eſt-à-dire, plus tôt que ſelon les Tables de M. Mayer, de..........................	+ 58.
Et plus tôt que ſelon les Tables de M. Clairaut...	+ 3. 5.

Première Obſervation faite au fil vertical, & calculée pour 4^h 5′ 12″.

			Differ.
Paſſage	du premier bord du Soleil	4^h 4′ 46″	
			0′ 26″
	de la corne occidentale de la Lune....	4. 5. 12.	
			1. 46.
	de la corne orientale de la Lune.....	4. 6. 58.	
			1. 5.
	du ſecond bord du Soleil...........	4. 8. 3.	



De cette phase observée, il suit que le centre L de la ☾ étoit moins élevé sur l'horizon que le centre S du ☉ d'une quantité $LD = -\ 26'\ 32''$.

Et que ce même centre étoit à l'occident, d'une quantité.......................... $SD = +\ 6.\ 27$.

Conséquemment .... $SZL = -\ 8.\ 0$.

Seconde Observation faite au fil vertical & calculée pour 4h 13′ 0″.

			Différ.
Passage	du premier bord du Soleil...........	$4^h\ 12'\ 40''$	$0'\ 20''$
	de la corne occidentale de la Lune....	4. 13. 0.	2. 15.
	de la corne orientale de la Lune.....	4. 15. 15.	0. 42.
	du second bord du Soleil...........	4. 15. 57.	

De cette phase observée, il suit que le centre L de la ☾ étoit moins élevé sur l'horizon que le centre S du ☉ d'une quantité $LD = -\ 23'\ 45''$.

Et que ce même centre étoit à l'occident d'une quantité.......................... $SD = +\ 3.\ 32$.

Conséquemment.......................... $SZL = -\ 4.\ 18$.

Troisième Observation, faite au fil horizontal & calculée pour 4h 19′ 4″.

			Différ.
Passage	du bord inférieur du Soleil..........	$4^h\ 18'\ 34''$	$0'\ 30''$
	de la corne orientale de la Lune.....	4. 19. 4.	0. 9.
	de la corne occidentale de la Lune...	4. 19. 13.	2. 33.
	du bord supérieur du Soleil..........	4. 21. 46.	

De cette phase observée, il suit que le centre L de la ☾ étoit moins élevé sur l'horizon que celui S du Soleil d'une quantité $LD = -\ 21'\ 33''$

Et que ce même centre L étoit à l'occident d'une quantité.......................... $SD = +$ 1′ 17″

Conséquemment.......................... $SZL = -$ 1. 34.

Quatrième & dernière Observation, faite au fil vertical & calculée pour 4h 22′ 23″.

			Différ.
Passage	du premier bord du Soleil..........	4h 19′ 28″	
	de la corne occidentale de la Lune...	4. 19. 46.	0′ 18″
	de la corne orientale de la Lune.....	4. 22. 23.	2. 37.
	du second bord du Soleil...........	4. 22. 45.	0. 22.

De cette phase observée, il suit que le centre L de la ☾ étoit moins élevé sur l'horizon que le centre S du ☉ d'une quantité $LD = -$ 20′ 21″.

Et que ce même centre L étoit à l'occident du centre S d'une quantité............... $SD = +$ 0. 28.

Conséquemment......................... $SZL = -$ 0. 34.

De plus, j'ai déduit de ces phases observées les grandeurs de l'Éclipse & les distances des cornes que voici:

À 4h 5′ 12″, grandeur de l'Écl. = 5′ 10″; dist. cornes = 17′ 28″
4. 13. 0, grandeur de l'Écl. = 8. 24; dist. cornes = 21. 45.
4. 19. 4, grandeur de l'Écl. = 10. 45; dist. cornes = 24. 10.
4. 22. 22, grandeur de l'Écl. = 12. 2; dist. cornes = 25. 12.

Enfin je conjecture que l'erreur des Tables est en longitude,

Pour les Tables de M. Mayer................ + 7″.
Pour les Tables de M. Clairault............... − 44.

Mais ce dont je suis plus certain, c'est que dans la circonstance dont je viens de donner le petit nombre d'Observations que j'ai pu faire, les Tables de M.rs Clairaut & Mayer diffèrent entre elles,

Quant à la longitude, de.................... − 51″
à la latitude, de....................... − 12.
à l'ascension droite, de.................. − 56.

Le temps étoit donc si peu favorable, que ce que je viens de donner est à quoi se réduit ce que je puis dire de l'observation de cette Éclipse du 24 Juin 1778.

MÉMOIRE

Sur la décompofition de plufieurs Sels neutres à bafes d'alkalis fixes & volatils, par l'acide marin.

Par M. CORNETTE.

Préfenté à l'Académie le 17 Mars 1774. Relû le 27 Mai 1778.

MRS MARGRAFF & BAUMÉ fe font occupés les premiers de l'objet principal que le titre de ce Mémoire vient d'énoncer; mais ces deux habiles Chimiftes ne s'accordant pas fur les mêmes faits, il en réfulte au fond une incertitude d'autant plus fondée, que de part & d'autre on cite des expériences bien faites.

La matière, intéreffante par elle-même, le devient donc davantage par cette diverfité de fentimens, & femble exiger des recherches & des obfervations ultérieures, pour tâcher de découvrir pourquoi, en opérant avec les mêmes fubftances, on obtient des réfultats fi oppofés.

J'ofe me flatter que mon travail tendant à éclaircir cette matière par une fuite de procédés variés, nouveaux, étendus fur plus de mixtes falins, & comparés avec ceux qui ont déjà été employés, l'Académie voudra bien agréer l'hommage que j'ai l'honneur de lui en faire, pour le foumettre à fon jugement.

Négligeant abfolument toute efpèce de remarques théoriques qui pourroient ramener à l'ordre admis & reconnu des affinités, ces décompofitions extraordinaires, quoiqu'elles y paroiffent tout-à-fait contraires, je me bornerai à ne préfenter que les faits.

Mais avant d'entrer dans aucun détail fur la manière plus fimple, plus naturelle, ce me femble, & plus expéditive, avec laquelle j'ai procédé, pour faire opérer à l'acide marin les décompofitions extraordinaires dont il s'agit, il convient que j'expofe en peu de mots ce qui a été fait en premier lieu, dans les mêmes vues, par M.rs Margraff & Baumé.

M. Margraff, dans sa Dissertation sur le Sel commun, imprimée dans le second volume de ses *Opuscules*, édition françoise, affirme qu'il est parvenu à décomposer le nitre & le nitre quadrangulaire, par l'acide marin, en mêlant cet acide avec ces sels, & en leur faisant supporter l'action du feu le plus fort dans des vaisseaux fermés: voici ce qu'il dit à ce sujet, dans les *pages 363* & suivantes de cette même Dissertation. «Nous avons vu que l'acide du nitre, quand on en verse une quantité convenable sur le sel commun, & qu'on l'en retire ensuite par la distillation, pousse dehors l'acide du sel, & s'unit avec la partie alkaline du même sel en nitre cubique: quoiqu'il n'y ait pas là un grand sujet d'étonnement, continue-t-il, vu que, suivant les principes de la Chimie, un fort acide en chasse un plus foible; c'est pourtant une chose toute particulière, qu'ici la chose est au rebours, en ce qu'un bon acide de sel bien pur pousse à son tour l'acide du salpêtre hors du nitre cubique aussi-bien que hors du nitre prismatique.» Voici comment cet habile Chimiste procède à la décomposition de ces sels. Après avoir apporté à la préparation de l'une & l'autre de ces substances, toute l'exactitude qu'on lui connoît, il prend une demi-once de nitre en poudre, qu'il met dans une cornue de verre, & sur lequel il verse quatre onces d'esprit de sel très-pur; il distille entièrement tout le liquide & pousse le feu jusqu'à l'incandescence: il observe que pendant la distillation il s'élève d'abord des vapeurs rouges, & ensuite de blanches, & qu'à la fin, lorsque la retorte est en incandescence, elles redeviennent rouges. L'opération étant finie, il fait dissoudre la matière saline restée dans la cornue, dans une suffisante quantité d'eau distillée; il obtient de cette liqueur, par la filtration, évaporation & cristallisation, un vrai sel fébrifuge de Sylvius, à l'exception cependant d'une assez bonne quantité de nitre avec lequel il se trouvoit encore mêlé, & qui par conséquent n'avoit pas été décomposé: il a aussi le même résultat avec le nitre cubique; & quoiqu'après l'opération, il lui en reste encore une partie qui n'est pas entièrement décomposée, il

obſerve cependant que le nitre cubique ſe décompoſe plus facilement que le nitre priſmatique; enfin pour lever tous les doutes que l'on pourroit encore avoir ſur la réalité de ces décompoſitions, il ſature l'acide qu'il a retiré de ces diſtillations avec une ſuffiſante quantité d'alkali fixe; il en obtient par la criſtalliſation du ſel marin régénéré, mais parmi lequel il ſe trouve du vrai nitre. Il ne parle point dans cette Diſſertation de l'action de l'acide marin ſur le tartre vitriolé & le ſel de Glauber; mais on trouve à la fin du même Ouvrage, *page 455*, une Lettre dans laquelle, en confirmant par ſon propre témoignage la belle obſervation de M. Baumé, ſur la décompoſition du tartre vitriolé par l'acide nitreux, il annonce que la décompoſition de ce ſel eſt également poſſible par l'acide marin, comme par l'acide du nitre: enfin ce n'eſt pas ſeulement le tartre vitriolé, ajoute-t-il, mais encore le ſel de Glauber qui eſt auſſi décompoſable, tant par l'acide nitreux que par l'acide marin; & comme il ne fait qu'indiquer ces décompoſitions, ſans entrer dans aucun détail ſur la manière d'opérer, on eſt en droit de préſumer qu'il n'a pas procédé d'une façon différente pour la décompoſition de ces ſels, que pour celle du nitre & du nitre quadrangulaire: or l'on voit qu'il réſulte de ces expériences de M. Margraff, que le tartre vitriolé, le ſel de Glauber, le nitre & le nitre quadrangulaire ſont décompoſés par l'acide marin, mais auſſi que cet habile Chimiſte a employé, pour y parvenir, une quantité d'acide très-conſidérable, & que nonobſtant il a été obligé pour l'avoir complette, à avoir recours aux cohobations réitérées, & à la diſtillation, pouſſée juſqu'à l'incandeſcence; ce qui d'après cet expoſé rend ces expériences longues & pénibles.

M. Baumé au contraire paroît s'être ſervi d'un moyen plus ſimple & plus naturel: il eſt vraiſemblable que cet habile Chimiſte, après avoir décompoſé le tartre vitriolé & le ſel de Glauber par l'acide nitreux, procédé dont on trouve le détail à la *page 438, premier Volume de ſa Chimie*, a tenté avec l'acide marin les mêmes expériences qu'avec l'acide nitreux. Il paroît que, s'il n'a point obtenu de décompoſition

avec cet acide, ainsi qu'il l'avance aux *pages 39 & 43, second Volume de sa Chimie*, particulièrement pour le sel de Glauber & le nitre quadrangulaire, cela ne peut dépendre que de ce qu'ayant opéré de même avec l'acide marin qu'avec l'acide nitreux, c'est-à-dire que s'étant servi d'acide marin ordinaire sur une dissolution de sel de Glauber & de nitre quadrangulaire, cet acide se trouvoit trop affoibli, & étoit par ce moyen hors d'état de pouvoir agir sur ces sels, comme j'aurai occasion de le faire voir par la décomposition du tartre vitriolé.

D'après ce court exposé des expériences que ces deux habiles Chimistes ont faites sur cet objet, il conviendroit que je rapportasse de suite celles qui me sont propres ; mais avant d'entrer dans ce détail, j'ai cru devoir répéter moi-même les expériences de M. Margraff, dont je viens de parler, afin d'observer les principaux phénomènes qui se passeroient pendant la décomposition de ces sels, les comparer ensuite à celles que j'ai faites.

J'ai procédé pour la décomposition du nitre, selon la méthode indiquée par ce Chimiste, c'est-à-dire, j'ai soumis à la distillation, dans une cornue de verre, une demi-once de nitre en poudre avec quatre onces d'acide marin fumant très-pur; il s'est élevé d'abord, comme il l'a fort bien remarqué, des vapeurs rouges, mais qui sont devenues blanches quelque temps après ; sur la fin de la distillation, il s'est excité dans la cornue une effervescence assez considérable, dont M. Margraff n'a point parlé, & que je ferai mieux connoître à l'article de la décomposition de ce sel ; j'augmentai le feu, jusqu'à faire rougir la cornue, ce dernier degré de chaleur fit encore dégager quelques vapeurs d'acide nitreux : lorsque la distillation fut finie, je délutai les vaisseaux, je fis dissoudre la matière saline restée dans la cornue dans une suffisante quantité d'eau distillée; après avoir filtré, fait évaporer & cristalliser la liqueur, j'obtins des cristaux de sel fébrifuge de Sylvius, mais qui étoient encore mêlés d'une quantité considérable de nitre qui n'avoit pas été décomposée.

Je répétai la même expérience ſur le nitre quadrangulaire, & quoique par cette opération le ſel ne fût pas entièrement décompoſé, j'obſervai néanmoins, comme l'a fort bien remarqué M. Margraff, que ce ſel ſe décompoſoit plus facilement que le nitre : j'aurai occaſion de faire voir dans la ſuite l'analogie que l'acide marin conſerve pour ſa baſe ; quoique cette baſe ſoit combinée avec un acide plus fort que lui, je démontrerai que je parviens à décompoſer ces ſels avec beaucoup moins d'acide que ceux à baſe d'alkali fixe végétal.

Je fis le même travail ſur le tartre vitriolé & le ſel de Glauber; mais je ne tardai pas à m'apercevoir, comme on le verra par les expériences ſuivantes, que l'acide marin n'opéroit point par cette voie d'une manière auſſi marquée ſur ces ſels, que ſur le nitre & ſur le nitre quadrangulaire.

Je mis dans une cornue de verre, une demi-once de tartre vitriolé très-pur, ſur lequel je verſai quatre onces d'acide marin fumant ; je pouſſai la diſtillation juſqu'à l'incandeſcence ; je fis diſſoudre la matière ſaline reſtée dans la cornue, dans de l'eau diſtillée, & je n'obtins après l'évaporation de la liqueur qu'un léger indice de décompoſition.

Je répétai la même opération ſur le ſel qui me reſtoit avec la même quantité d'acide : le réſultat de cette ſeconde expérience fut abſolument ſemblable à la première.

Enfin, après avoir employé pour la décompoſition de ce ſel douze onces d'acide marin, ce qui fait, comme on le voit, vingt-quatre parties d'acide ſur une de ſel, je ne pus encore obtenir qu'une décompoſition très-imparfaite, puiſqu'il me reſta plus des trois quarts du tartre vitriolé, qui n'avoit ſouffert aucune altération. Le ſel de Glauber, traité de même, ne réuſſit pas mieux; & je ne pus parvenir avec cette quantité d'acide à me procurer une décompoſition plus marquée.

Les expériences que j'ai faites, & dont je vais rendre compte, quoique tendantes au même but que celles de M. Margraff, paroîtront, ce me ſemble, plus ſimples & plus faciles, ſi l'on conſidère que je n'emploie pour opérer ces décompoſitions ni diſtillation, ni incandeſcence, & beaucoup moins d'acide ;

d'acide: il eſt vrai que ce n'a été qu'après plusieurs recherches ultérieures, & par des expériences variées & multipliées, que je ſuis parvenu au but que je m'étois propoſé. Mon objet principal dans tout ce travail, étoit non-ſeulement de mieux décompoſer ces ſels, mais encore d'obſerver tous les phénomènes qui devoient ſe paſſer pendant leurs diſſolutions dans cet acide; & c'eſt-là le motif qui m'a déterminé à employer l'acide marin dans divers degrés de concentration. Ce Mémoire étoit preſque fini, lorſque j'ai eu connoiſſance du travail que M. Margraff avoit fait ſur cette matière, & dont je viens de rendre compte; le deſir de le mieux faire connoître, en démontrant que l'on peut y parvenir par un procédé différent, m'a engagé à le continuer & à l'étendre par une nouvelle ſuite d'expériences.

Comme le tartre vitriolé eſt celui de tous les ſels qui m'a préſenté le plus de difficultés pour ſa parfaite décompoſition, c'eſt auſſi celui ſur lequel j'ai fait le plus de tentatives.

Décompoſition du TARTRE VITRIOLÉ *par l'acide marin.*

Je fis diſſoudre dans une ſuffiſante quantité d'eau diſtillée, une demi-once de tartre vitriolé; je verſai ſur ce ſel, ainſi diſſous, deux onces d'acide marin ordinaire, la liqueur évaporée dans une capſule de verre au point de criſtalliſation, ne me fournit aucun changement; les criſtaux que j'en obtins par le refroidiſſement, étoient du tartre vitriolé qui n'avoit ſouffert aucune altération: la ſeule différence que j'y trouvai ne conſiſtoit que dans la forme des criſtaux qui étoient diſpoſés en poignards ou lames d'épée, jetés les uns ſur les autres confuſément; ils approchoient aſſez, par cette forme, de ceux du ſublimé corroſif, obtenus par une évaporation lente.

Peu ſatisfait de cette expérience, je crus devoir procéder d'une autre manière: je variai les doſes de cet acide, tantôt en ajoutant moins d'eau & beaucoup plus d'acide, & tantôt en diſtillant l'acide marin, dont je recevois les vapeurs ſur

une diſſolution de tartre vitriolé; je ne fus guère plus heureux après toutes ces tentatives, je n'obtins aucune marque de décompoſition; car je retrouvai après l'évaporation de la liqueur, tout le tartre vitriolé qui n'avoit ſouffert aucune altération.

Tous ces moyens m'ayant donc été infructueux pour décompoſer ce ſel, je m'y pris d'une autre manière : comme juſqu'ici je n'avois employé que de l'acide marin ordinaire ſur une diſſolution de tartre vitriolé, je préſumai que ſi le ſuccès n'avoit pas été plus favorable, cela ne pouvoit dépendre premièrement que de l'eau que j'avois employée pour diſſoudre ce ſel, qui venant à affoiblir cet acide, qui l'étoit déjà beaucoup par lui-même, le mettoit hors d'état d'agir d'une manière auſſi efficace que s'il eût été plus concentré; ſecondement, qu'ayant opéré avec l'acide marin, en quelque ſorte comme M. Baumé l'avoit fait avec l'acide nitreux, je ne pouvois pas obtenir les mêmes réſultats, puiſqu'à volume égal, l'acide nitreux le plus foible contient plus de matière ſaline acide, que l'acide marin le plus fumant.

Ce fut d'après ces conjectures que je me déterminai à ne plus employer que l'acide marin fumant, ſeul & ſans addition, dans l'eſpérance que faiſant paſſer ſur ce ſel cet acide dans le plus grand état de concentration, je pourrois peut-être, par ſon action immédiate, y occaſionner quelque altération : cette expérience eut tout le ſuccès que j'avois lieu d'en attendre; & quoique la décompoſition ne fut pas complète, j'eus la ſatisfaction néanmoins de voir ce ſel preſque totalement décompoſé.

Je mis dans un matras une demi-once de tartre vitriolé réduit en poudre, ſur lequel je verſai une once d'acide marin fumant; je fis bouillir pendant quelque temps cet acide ſur ce ſel; je décantai la liqueur; je reverſai de nouveau ſur celui qui n'avoit pas été diſſous la même quantité, que je fis bouillir également; je raſſemblai enſuite ces diſſolutions, auxquelles j'ajoutai une once d'eau diſtillée, afin de la faciliter & de l'étendre davantage; j'en obtins, par le refroidiſſement, une

quantité ſuffiſante de petits criſtaux très-jaunes. La liqueur qui me reſtoit ayant été ſoumiſe à l'évaporation, me fournit encore des criſtaux ſemblables aux premiers : je fis égoutter ce ſel ſur le papier gris; il perdit une partie de ſa couleur, mais reſta encore extrêmement acide; néanmoins il avoit en cet état toutes les propriétés du ſel marin régénéré; il pétilloit comme lui ſur les charbons ardens; l'acide vitriolique concentré le décompoſoit, & faiſoit dégager beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin; il précipitoit auſſi en lune cornée la diſſolution d'argent, mais celle de mercure étoit toujours précipitée en turbith minéral; couleur qui, comme on le voit, me déceloit encore la préſence de l'acide vitriolique.

Cette dernière expérience ſuffiſoit, ce me ſemble pour me laiſſer encore douter ſur la réalité de cette décompoſition, puiſque je pouvois auſſi-bien attribuer à la préſence de l'acide marin, encore engagé dans les criſtaux de ce ſel, qu'à l'acide vitriolique, les principaux phénomènes que je viens d'énoncer; mais pour m'éclaircir ſur cet objet, je le fis diſſoudre dans une ſuffiſante quantité d'eau diſtillée, il s'excita auſſitôt aſſez de froid pour faire deſcendre le thermomètre de Réaumur, de 6 degrés, la température étant à 15 au-deſſus de la glace; effet que je préſumai ne devoir être produit que par le ſel fébrifuge de Sylvius déjà formé ; puiſque celui qui s'étoit excité au moment du mélange de l'acide marin avec le tartre vitriolé, n'avoit fait deſcendre le thermomètre que de 2 degrés. La diſſolution de ce ſel étoit un peu laiteuſe, je la filtrai en cet état, elle paſſa fort clair ſans couleur, mais encore très-acide; ſoumiſe à l'évaporation, elle me fournit de petits criſtaux très-blancs, mais qui ne perdirent point leur acidité, même après avoir été égouttés long-temps ſur le papier gris; les diſſolutions répétées dans l'eau diſtillée, ainſi que les imbibitions ſur le papier n'ayant donc point ſuffi pour enlever à ce ſel cet acide ſurabondant, j'entrepris de le ſaturer avec une ſuffiſante quantité de craie; ce moyen me réuſſit, & je parvins à me procurer d'une part du ſel

fébrifuge de Sylvius parfaitement neutre, & d'une autre de la félénite.

Cette expérience me prouvoit donc inconteftablement la décompofition réelle du tartre vitriolé, & la néceffité pour y parvenir d'employer l'acide marin dans cet état de concentration; mais il me reftoit encore des doutes, que je ne pouvois lever que par une nouvelle expérience : c'étoit de m'affurer fi l'acide vitriolique, ainfi adhérent à ces criftaux, provenoit ou de celui qui réfultoit de la décompofition du tartre vitriolé, ou de celui qui auroit pu s'élever avec l'acide marin lui-même, préparé à la manière de Glauber; pour m'en convaincre, je fis l'expérience fuivante.

Je fis évaporer dans une capfule de verre au bain de fable, une once d'acide marin fumant; lorfqu'une bonne partie de l'acide fut diffipée, & que la liqueur qui reftoit ceffa de donner des vapeurs, je la faturai avec des criftaux de foude, j'obtins par ce moyen du fel marin, avec lequel fe trouvoit beaucoup de fel de Glauber: cette preuve n'étoit pas équivoque, & me confirma dans l'idée où j'étois, que fi ce fel avoit confervé fi opiniâtrément fon acidité, cela ne pouvoit dépendre que de l'acide vitriolique, que l'acide marin qui avoit été fait à la manière de Glauber, avoit enlevé pendant la diftillation, & qui ne fe trouvant combiné avec aucune bafe, décompofoit le fel fébrifuge de Sylvius à mefure qu'il fe formoit.

Je fentis dès-lors la néceffité de ne plus employer pour toutes mes expériences, que de l'acide marin qui auroit été diftillé fur de nouveau fel marin purifié & décrépité: perfuadé qu'en employant cet acide dans cet état de pureté, la décompofition du tartre vitriolé feroit plus facile & moins équivoque.

Je mis dans un matras une demi-once de tartre vitriolé en poudre, fur lequel je verfai une once & demie de cet acide marin, ainfi purifié & dégagé de toutes matières étrangères; je procédai de la même manière que je l'avois fait pour les expériences précédentes; le tartre vitriolé fut entièrement décompofé par cette opération, & converti en fel

fébrifuge de Sylvius *. Une ſeule diſſolution de ce ſel dans l'eau diſtillée, ſuffit pour lui enlever la portion d'acide qui ſe trouvoit encore engagée dans les criſtaux, & le rendit parfaitement neutre.

Toutes les expériences ſuivantes ont été variées avec le même acide marin, employé dans différens états; mais n'ayant pu obtenir aucune décompoſition complète avec cet acide ainſi affoibli, je me bornerai à ne rapporter par la ſuite que celle que je me ſuis procuré avec l'acide marin fumant & pur, comme dans l'expérience précédente, afin d'éviter les répétitions inutiles.

Décompoſition du SEL DE GLAUBER *par l'Acide marin.*

L'acide marin agit d'une manière plus marquée ſur ce ſel que ſur le tartre vitriolé : l'analogie qu'il conſerve pour ſa baſe eſt d'autant plus ſenſible que la décompoſition en eſt plus facile, préſente moins de difficultés, & exige une quantité beaucoup moindre d'acide.

Je mis dans un matras une demi-once de ſel de Glauber en criſtaux : je verſai par-deſſus ſix gros d'acide marin fumant; il s'excita dans l'inſtant du mélange aſſez de froid pour faire deſcendre le thermomètre de 6 degrés, la température étant à 15; quoique cependant il n'y eût qu'une partie de ce ſel qui pût ſe diſſoudre, je fis bouillir pendant quelque temps cet acide, j'étendis cette diſſolution dans une demi-once d'eau diſtillée, & j'obtins par le refroidiſſement de la liqueur, un ſel en petits criſtaux très-jaunes, mais qui perdit entièrement ſa couleur & ſon acidité, après avoir été égoutté ſur le papier gris : c'étoient autant de petits cubes parfaits que je ne pouvois méconnoître pour du ſel marin; il en avoit d'ailleurs la ſaveur & toutes les propriétés.

Cette décompoſition, comme on le voit, eſt très-prompte & très-facile, mais on pourroit m'objecter qu'elle ne peut

* L'acide marin dont je me ſuis ſervi peſoit, dans une bouteille qui contenoit juſte une once d'eau diſtillée, neuf gros trente grains.

point ſervir à démontrer, comme je l'ai avancé, l'analogie que l'acide marin conſerve pour ſa baſe, puiſque, pourra-t-on me dire, la quantité d'acide que j'ai employée pour la décompoſition de ce ſel, reſpectivement à l'eau de criſtalliſation qu'il contient, eſt au moins égale à celle que j'ai employée pour la décompoſition du tartre vitriolé : pour prévenir cette objection, je fis l'expérience ſuivante.

Je mis dans un matras une demi-once de ſel de Glauber, que j'avois fait tomber en efflореſcence avec la même quantité d'acide marin que pour l'expérience précédente ; j'obſervai qu'il s'excita moins de froid, mais la décompoſition eut également lieu.

Cette dernière expérience, en démontrant de plus en plus l'analogie que l'acide marin conſerve pour ſa baſe, prouve encore que la décompoſition de ce ſel peut ſe faire également avec de l'acide plus foible, puiſque dans la première expérience, où je me ſuis ſervi du ſel de Glauber en criſtaux : cet acide devoit eſſentiellement ſe charger de l'eau de criſtalliſation de ce ſel, & avoit néanmoins opéré la décompoſition, ce qui prouve, comme l'a remarqué le ſavant auteur du Dictionnaire de Chimie, que plus les ſels contiennent d'eau de criſtalliſation, & moins ils contractent d'union intime avec les acides auxquels ils ſont combinés, & c'eſt ce qui fait que la décompoſition du ſel de Glauber s'opère plus facilement que celle du tartre vitriolé.

Je ferai obſerver qu'il arrive pour la décompoſition de ces ſels par l'acide marin, ce qui ſe paſſe pour celle du tartre vitriolé par l'acide nitreux; que ſi après avoir retiré un certain nombre de criſtaux, on continue à faire évaporer l'eau-mère, on n'obtient plus le même ſel; l'acide vitriolique libre, contenu dans cette liqueur, reprend, ſelon la remarque de M. Baumé, tous ſes droits, réagit ſur ces nouveaux ſels, & les décompoſe.

Décompoſition du nitre & du nitre quadrangulaire par l'acide marin.

Ces deux expériences ont été faites en même temps, &

ſur les mêmes quantités de ſels de nitre & de nitre quadrangulaire; la décompoſition du nitre s'eſt faite plus difficilement, & a exigé une plus grande quantité d'acide marin que celle du nitre quadrangulaire : les phénomènes qui ſe ſont paſſés pendant leurs diſſolutions, ont été bien différens de ceux des opérations précédentes.

Je mis une demi-once de chacun de ces ſels réduits en poudre dans deux petits matras; je verſai dans celui où étoit contenu le nitre, une once d'acide marin fumant, & dans celui où étoit le nitre quadrangulaire, ſix gros de cet acide ſeulement: ce mélange ſe fit ſans aucun mouvement ſenſible, mais quelque temps après il s'excita aſſez de froid pour faire deſcendre le thermomètre de pluſieurs degrés; pour le nitre, le froid fut de 3 degrés; pour le nitre quadrangulaire, le froid fut de 6: la température étant ce jour-là à 15 degrés au-deſſus de la glace.

Je plaçai ces deux matras ſur un bain de ſable que j'échauffai par degrés; avant même que la liqueur commençât à entrer en ébullition, il s'excita dans chacun de ces vaiſſeaux un mouvement d'efferveſcence très-ſenſible; les vapeurs qui ſe répandirent étoient rouſſes, pénétrantes & très-nauſéabondes; elles avoient abſolument l'odeur de celles de l'eau régale. Je fis bouillir pendant quelque temps cet acide ſur ces ſels, j'ajoutai ſur chacun de ces mélanges, une demi-once d'eau diſtillée, & lorſqu'ils furent entièrement diſſous, je retirai les vaiſſeaux du feu; je laiſſai enſuite refroidir les liqueurs, pour obſerver l'ordre de la criſtalliſation; le nitre me fournit une aſſez bonne quantité de petits criſtaux cubiques, parmi leſquels il y en avoit encore quelques-uns qui étoient diſpoſés en petites aiguilles, que je reconnus pour de vrai nitre qui n'avoit ſouffert aucune altération.

Le nitre quadrangulaire fut décompoſé en entier avec cette quantité d'acide; les criſtaux que j'obtins étoient autant de cubes parfaits abſolument ſemblables au ſel marin, ce qui prouve encore, comme je l'ai remarqué pour le ſel de Glauber, l'analogie que cet acide conſerve pour ſa baſe.

Je reverſai de nouveau ſur les petits criſtaux nitreux deux gros du même acide marin; la diſſolution ſe fit de la même manière que je viens de le décrire: ce ſel, par cette ſeconde opération, fut décompoſé entièrement, & les criſtaux que j'obtins étoient abſolument ſemblables aux premiers.

Je les fis diſſoudre néanmoins chacun ſéparément dans l'eau diſtillée, afin de leur enlever une petite portion d'acide qui mouilloit encore les criſtaux, & qui les coloroit; après avoir filtré & fait évaporer les liqueurs juſqu'au point de criſtalliſation, j'en obtins par le refroidiſſement deux ſels très-blancs abſolument neutres, & qui ne différoient les uns des autres que par leurs baſes: au lieu de fuſer ſur les charbons ardens, ils décrépitoient; l'acide vitriolique concentré en dégageoit beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin, & les diſſolutions d'argent & de mercure, faites l'une & l'autre par l'acide nitreux, étoient précipitées ſous forme de caillé.

Les deux eſpèces d'eau-mères qui me reſtoient étoient d'une couleur jaune citrine, & fourniſſoient encore deux nouvelles preuves de la parfaite décompoſition de ces ſels; elles avoient toutes deux les propriétés d'une eau régale dans un état bien marqué; car je parvins à diſſoudre en très-peu de temps, & même à froid, dans ces deux liqueurs, une aſſez bonne quantité de feuilles d'or: ces diſſolutions étoient très-claires, & elles m'ont fourni, par les expériences auxquelles je les ai ſoumiſes, les mêmes réſultats, toutes choſes d'ailleurs égales, qu'une diſſolution d'or ordinaire, ce qui fait un moyen peu connu pour faire de l'eau régale *; moyen qui, quelqu'embarraſſant qu'il ſoit, peut toujours ſervir dans des cas où, faute d'acide nitreux avec de l'acide marin & du nitre, on ſeroit obligé de ſe paſſer d'eau régale.

Mais on trouve dans la Chimie de Boërhaave, *page 440*, qu'en ſoumettant à la diſtillation deux parties d'acide marin fumant, ſur une de nitre, on obtient une très-bonne eau

---

* Roth, dans ſa Chimie, dit d'une manière vague & générale, qu'avec l'acide marin & le nitre, on peut faire de l'eau régale.

régale :

régale : il paroît néanmoins que ce ſavant Chimiſte n'avoit aperçu ce phénomène qu'à demi, puiſqu'il dit enſuite que la matière ſaline reſtée dans la cornue, étoit un vrai nitre qui n'avoit ſouffert aucune altération ; ce qui ne peut pas être, d'après les expériences dont je viens de rendre compte, attendu que l'acide marin diſtillé avec le nitre, ne peut point former d'eau régale, ſans qu'au préalable il y ait une portion de nitre qui ſoit décompoſée.

Décompoſition des Sels ammoniacaux vitrioliques & nitreux par l'acide marin.

Après avoir examiné l'action de l'acide marin ſur le tartre vitriolé, le ſel de Glauber, le nitre & le nitre quadrangulaire, je crus qu'il étoit eſſentiel, & même indiſpenſable pour étendre davantage ce travail, de ſuivre le même objet ſur les ſels ammoniacaux vitrioliques & nitreux ; on verra, par les expériences dont je vais rendre compte, que cet acide agit d'une manière plus marquée ſur ces ſels à baſe d'alkali volatil, que ſur ceux à baſe d'alkali fixe végétal, puiſque les décompoſitions qu'il opère ſur eux ſont plus promptes & plus faciles.

Je mis dans deux matras une demi-once de chacun de ces ſels ammoniacaux que j'avois préparés moi-même, & qui étoient parfaitement neutres ; je verſai dans chaque matras, ſix gros du même acide marin fumant : après avoir agité ces mélanges pendant quelque temps, je m'aperçus que le froid qui s'excitoit étoit aſſez ſenſible ; je plongeai deux thermomètres dans ces deux matras, la diſſolution du ſel ammoniacal vitriolique occaſionna 4 degrés de froid, & celle du ſel ammoniacal nitreux m'en donna 5, la température étant ce jour-là à 10 degrés au-deſſus de la glace ; j'expoſai les vaiſſeaux, comme je l'ai fait pour les expériences précédentes, à une chaleur capable de faire bouillir les liqueurs qu'ils contenoient ; ce degré de chaleur n'excita aucun mouvement ſenſible ſur le ſel ammoniacal vitriolique, mais j'obſervai avant même que l'acide entrât en ébullition ſur le ſel ammoniacal

nitreux, que l'effervescence étoit plus considérable, & que les vapeurs qui s'élevoient étoient plus vives, plus pénétrantes que celles que j'avois aperçues pendant la décomposition des sels de nitre & de nitre quadrangulaire; j'ajoutai après quelques minutes d'ébullition, dans chaque matras, une demi-once d'eau distillée pour que ces sels, qui n'étoient pas encore parfaitement dissous, le fussent plus exactement; je versai les liqueurs dans des capsules de verre, & elles me fournirent toutes deux, par le refroidissement, une infinité de cristaux disposés par petites aiguilles réunies en forme de barbe de plumes: ils étoient absolument semblables à ceux du sel ammoniac; ces deux sels étoient très-colorés, mais celui résultant de la décomposition du sel ammoniacal nitreux, l'étoit beaucoup plus que le premier; il étoit rouge & brillant comme le rubis: cette différence de couleur m'a paru ne devoir être attribuée qu'au phlogistique, dont le sel ammoniacal nitreux est si abondamment pourvu. Ces deux sels, égouttés sur le papier gris, perdirent presque entièrement leur acidité, mais conservèrent, à peu de chose près, leurs couleurs, ils avoient en cet état toutes les propriétés du sel ammoniac ordinaire: ce dont je me suis assuré facilement par l'expérience.

Je fis dissoudre ces sels séparément dans une suffisante quantité d'eau distillée, dans le dessein de leur enlever cette matière colorante; mais je ne fus pas long-temps à m'apercevoir que cette nouvelle dissolution dans l'eau ne produiroit pas l'effet que j'avois attendu; car les liqueurs, après avoir été filtrées & évaporées, ne me fournirent encore que des sels très-jaunes, quoique je les eusse fait long-temps égoutter sur le papier gris.

Je présumai que le meilleur moyen pour parvenir à détruire cette couleur étoit la voie de la sublimation: je crus pour cet effet devoir me servir d'un intermède qui, n'ayant aucune action sur ces sels, pût seulement se charger de la partie colorante; ce fut la terre blanche d'alun bien pur, que j'avois édulcorée à plusieurs reprises dans de l'eau bouillante, dont je fis usage.

Je mêlai ces ſels ſéparément dans deux petits matras ou fioles ordinaires, avec une pareille quantité de cet intermède; j'entourai ces vaiſſeaux dans le ſable, & je procédai enſuite à la ſublimation, en donnant au commencement une chaleur aſſez douce & que j'augmentai par degrés, juſqu'à ce que tout fût ſublimé & attaché au haut de la fiole. Après la rupture des vaiſſeaux, je trouvai deux petits pains de ſel très-blanc & très-compact, diſpoſés par petits filets, appliqués dans leur longueur parallèlement les uns aux autres: c'étoit de vrai ſel ammoniac décompoſable par la chaux qui en dégageoit l'alkali volatil; & par toutes les expériences auxquelles je l'ai ſoumis, je lui ai toujours reconnu tous les caractères qui le diſtinguent.

L'eau-mère reſtée de la décompoſition du ſel ammoniacal nitreux, étoit une très-bonne eau régale, bien ſupérieure à celle obtenue de la décompoſition du nitre & du nitre quadrangulaire; elle diſſolvoit l'or beaucoup plus promptement & en plus grande quantité: cette diſſolution d'or ne différoit en rien de celle formée par le concours de l'acide nitreux & du ſel ammoniac, puiſque l'or précipité de cette diſſolution, ſoit avec l'alkali fixe, ſoit avec l'alkali volatil, étoit également fulminant, au lieu que celui précipité des deux autres eſpèces d'eaux régales, ne fulminoit que par l'alkali volatil ſeulement; ce qui prouve que ces eaux régales, réſultant des décompoſitions du nitre, du nitre quadrangulaire & du ſel ammoniacal nitreux, ne diffèrent en rien, & produiſent, comme je viens de le faire remarquer, les mêmes effets que celles qui ſont faites par les mélanges d'acides nitreux, d'acide ou de ſel marin & de ſel ammoniac.

Je ne m'étendrai pas davantage ſur les remarques que préſentent naturellement mes expériences: je me bornerai ſeulement à conclure, d'après les faits que je viens de rapporter, que quoique l'acide marin ſoit de tous les acides minéraux le plus foible, & celui que l'on a toujours regardé comme le moins ſuſceptible de contracter de fortes adhérences avec les baſes alkalines, il eſt néanmoins très-poſitif

que cet acide, ſelon l'état de concentration dans lequel on l'emploie, eſt capable de décompoſer tous les ſels neutres réſultans de l'union des acides vitrioliques & nitreux avec des baſes alkalines quelconques: je ferai obſerver en même temps que ces expériences qui ſemblent faire autant d'exceptions à la Table d'affinités, prouvent, comme l'ont déjà remarqué pluſieurs habiles Chimiſtes, la néceſſité qu'il y auroit de faire quelques changemens à cette Table, en la préſentant ſous un point de vue moins général.

Il me reſte encore à examiner l'action comparée de l'acide marin & de l'acide nitreux, ſur diverſes autres ſubſtances ſalines: ce qui ſera l'objet de pluſieurs Mémoires, que j'aurai l'honneur de préſenter ſucceſſivement à l'Académie.



OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL, DU 24 JUIN 1778,

Faite à Sainte-Geneviève.

Par M. PINGRÉ.

J'AVOIS disposé un Télescope Grégorien de 6 pieds, pour observer le commencement de cette Éclipse ; mais un mal douloureux, dont j'étois atteint, ne me permit pas de manier cet instrument ; je fus forcé de me contenter de la lunette de mon quart-de-cercle, qui n'a que 2 pieds de longueur, mais qui est très-bonne. 4 Juillet 1778.

Commencement de l'Éclipse à $3^h\ 53'\ 18''$ temps vrai, bonne observation ; mais vu la petitesse de la lunette, il seroit très-possible que l'Éclipse eût commencé quelques secondes plus tôt.

J'ai ensuite observé plusieurs passages des cornes par le fil vertical de la lunette ; mais ces observations sont si incertaines, que je ne crois pas devoir les rapporter : le ciel, très-beau les jours précédens & les jours suivans, s'est couvert peu avant le commencement de l'Éclipse ; le Soleil n'a paru d'abord que dans de légers éclaircis, durant un desquels il m'a été permis d'observer avec assez de précision le commencement de l'Éclipse : vers 4 heures & demie le Soleil s'est absolument caché, & n'a plus reparu.



OBSERVATION SUR L'ÉCLIPSE DE SOLEIL, DU 24 JUIN 1778.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 27 Juin 1778.

J'AUROIS bien desiré que quelqu'Observateur connu, & dont l'exactitude ne fût nullement suspecte dans ces sortes d'observations, eût mesuré, soit aux Açores, soit à la côte d'Afrique, les diamètres du Soleil & de la Lune aux instans qui répondoient au milieu de l'Éclipse; on eût décidé par-là, la juste quantité dont le Soleil auroit paru grossi par les réfractions, si foibles qu'elles puissent être, quoique sensibles dans l'atmosphère de la Lune. Képler & Grégori en ayant averti, il étoit nécessaire de s'assurer d'abord du diamètre apparent de la Lune dans les Éclipses annulaires, & c'est ce qui a été vérifié soigneusement en 1748 & en 1764.

Le ciel n'a pas été favorable à Paris pendant la durée entière de cette Éclipse, & je n'ai pu mesurer que quelques phases dans le lieu où je demeure, sous la latitude de $48^d\ 52'\ 07''\frac{1}{2}$: le Soleil étant sorti d'un nuage $15''$ avant $3^h\ 57'$, commencement de l'Éclipse, publié dans le Livre de la *Conn. des Temps;* j'ai jugé, par la phase observée, que le commencement auroit été vu vers $3^h\ 54'$ de temps vrai : les phases qui suivent sont des plus exactes, ayant été mesurées par un temps fort serein, & avec ma lunette de 8 à 9 pieds, garnie de son micromètre.

	Distances des pointes des Cornes.
À $4^h\ 07'\ 5$ à $6''$	$19'\ 50''\frac{2}{3}$.
4. 17. 10	24. 01.
4. 28. $52\frac{1}{2}$	27. 05.

Et à ce dernier instant, la partie lumineuse qui restoit du Soleil, a été vue d'environ 15 minutes, par où j'ai jugé que

l'Éclipse auroit excédé 6 doigts $\frac{2}{3}$, si le ciel ne s'étoit pas couvert de nuages.

M. d'Ulloa, qui m'a envoyé son observation de l'Éclipse totale, vue à la mer par une latitude de $37^d\ 14'$ à cent lieues ou environ, à l'Ouest du cap Saint-Vincent, auroit bien desiré qu'on en eût conclu la longitude géographique de ce Cap, lequel est déjà bien mieux placé sur la Carte de M. Pingré, que sur celle du Neptune oriental. A $4^h\ 48'$, fin de l'Éclipse, & le milieu à $3^h\ 50'$.

Quand on aura reçu tous les détails circonstanciés pour l'observation de l'Éclipse, faite par les Officiers Espagnols, on sera peut-être en état de traiter cette matière avec tout le soin que cette discussion géographique semble exiger; en attendant, nous n'avons pu faire usage que des connoissances acquises sur les Cartes hydrographiques, & de l'Observation astronomique de la durée de l'obscurité totale, savoir $0^h 4'$, dont on ne tardera pas à rendre un compte fort étendu.

Une autre observation de la même Éclipse totale, faite à Salé par M. Desoteux, se trouveroit dans le même cas, si ce n'est qu'il s'agit moins de la position géographique de Salé, que de se proposer ici la recherche de la trace absolue du centre de l'ombre aux côtes occidentales de l'Afrique, telle qu'il la faut déduire des observations immédiates.

Il est dit, dans le Mémoire envoyé au Ministre de la Marine & à l'Académie, qu'à $4^h\ 25'\ 07''$ l'Éclipse fut totale, & qu'à $4^h\ 22'$, il ne restoit guère qu'un demi-doigt; que sa durée a été de $3'\ 51''$.

Il suit de-là, qu'à $4^h 27' 2''\frac{1}{2}$, ce fut à Salé le milieu de l'Éclipse : la latitude de Salé sur le Neptune oriental est $34^d\ 3'$, & sa longitude $8^d 42'$ à l'Ouest de Paris. M. Pingré m'a donné le nouveau Salé $34^d\ 5'$; sa longitude, $9^d\ 3'\ 30''$ à l'Occident du Méridien de Paris, ou bien $0^h\ 36'\ 14''$: ainsi il étoit alors à Paris, de temps vrai, $5^h\ 3'\ 16''\frac{1}{2}$, ou de temps moyen, $5^h\ 5'\ 12''\frac{1}{2}$.

A Cadiz, il n'est resté que $2'\ 22''\frac{1}{2}$ de la partie claire du

Soleil, vers le milieu de l'Éclipſe, parce qu'en ce moment, il étoit de temps vrai, $4^h 25' 41''$, ou $3' 2''$ plus tard que lorſqu'on ajoute la demi-durée, $1^h 3' 46'' \frac{1}{2}$, à l'heure du commencement de l'Éclipſe, qui étoit $3^h 18' 53''$.

On pourroit donc conjecturer que la phaſe a été priſe trop tard à Cadiz, & qu'il ſeroit néceſſaire de la mieux conclure des phaſes correſpondantes, avant & après cet inſtant requis.

Par les phaſes du commencement $0^d 26' 30'' \frac{1}{2}$ & $27' 33'' \frac{1}{2}$, obſervées à $4^h 16' 34''$, $4^h 18' 44''$, on peut conclure proportionnellement, qu'à $4^h 17' 30'' \frac{1}{3}$ la phaſe auroit été de $26' 57'' \frac{3}{4}$.

Or la même phaſe de $26' 57'' \frac{3}{4}$ a été obſervée, lors de la diminution de l'Éclipſe, à $4^h 33' 31''$.

Ces deux correſpondantes, $4^h 17' 30'' \frac{1}{2}$ & $4^h 33' 31''$, donneroient ainſi le milieu de l'Éclipſe à $4^h 25' 30'' \frac{2}{3}$.

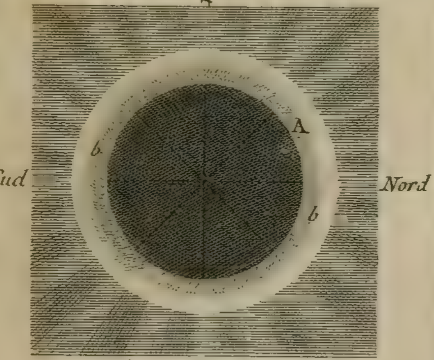
Je ſuppoſerai d'abord le milieu, à Cadiz, à $4^h 25' 0''$ de temps vrai, ou bien en réduiſant au Méridien de Paris, $4^h 59' 25''$, c'eſt-à-dire de temps moyen, à $5^h 01' 23''$, la latitude du lieu étant $36^d 31' 07''$.

Ce milieu diffère à peine, comme l'on voit, de $0^h 3' 50''$ de celui qui a été conclu pour Salé, par la demi-durée de l'obſcurité totale & par l'immerſion du Soleil ſous le diſque opaque de la Lune, c'eſt-à-dire dans un lieu plus occidental de $0^h 1' 49''$ que Cadiz. L'erreur des Tables des Inſtitutions, que j'ai calculée avec beaucoup de ſoin pour l'inſtant du commencement & de la fin de l'Éclipſe, vue à Gréenwich, eſt — $3' 16'' \frac{1}{2}$ ou négative: je n'ai pas trouvé la même erreur par les phaſes du commencement & de la fin, quoique calculées en toute rigueur; bien plus, le commencement, vu à Paris à $3^h 52' 18''$, ne donne l'erreur des Tables que — $3' 23''$, au lieu que celui de Londres donne — $3' 42''$: ces variétés peuvent provenir, il eſt vrai, de plus d'une cauſe, mais les erreurs dans l'obſervation du commencement y concourent aſſurément.

Suppoſant donc l'erreur des Tables tant ſoit peu plus grande

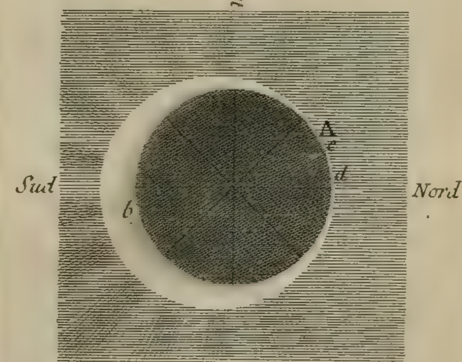
Figure de l'Eclipse de Soleil du 24. Juin 1778. vue par M. d'Ulloa.

Fig. 2.



Représentation du Point lumineux A. qu'on a apperçu sur la Lune.

Fig. 3.



Disparition de l'Anneau et du Point lumineux A. au moment que le Soleil a reparu au Point c.

Y. le Gouaz Sc.



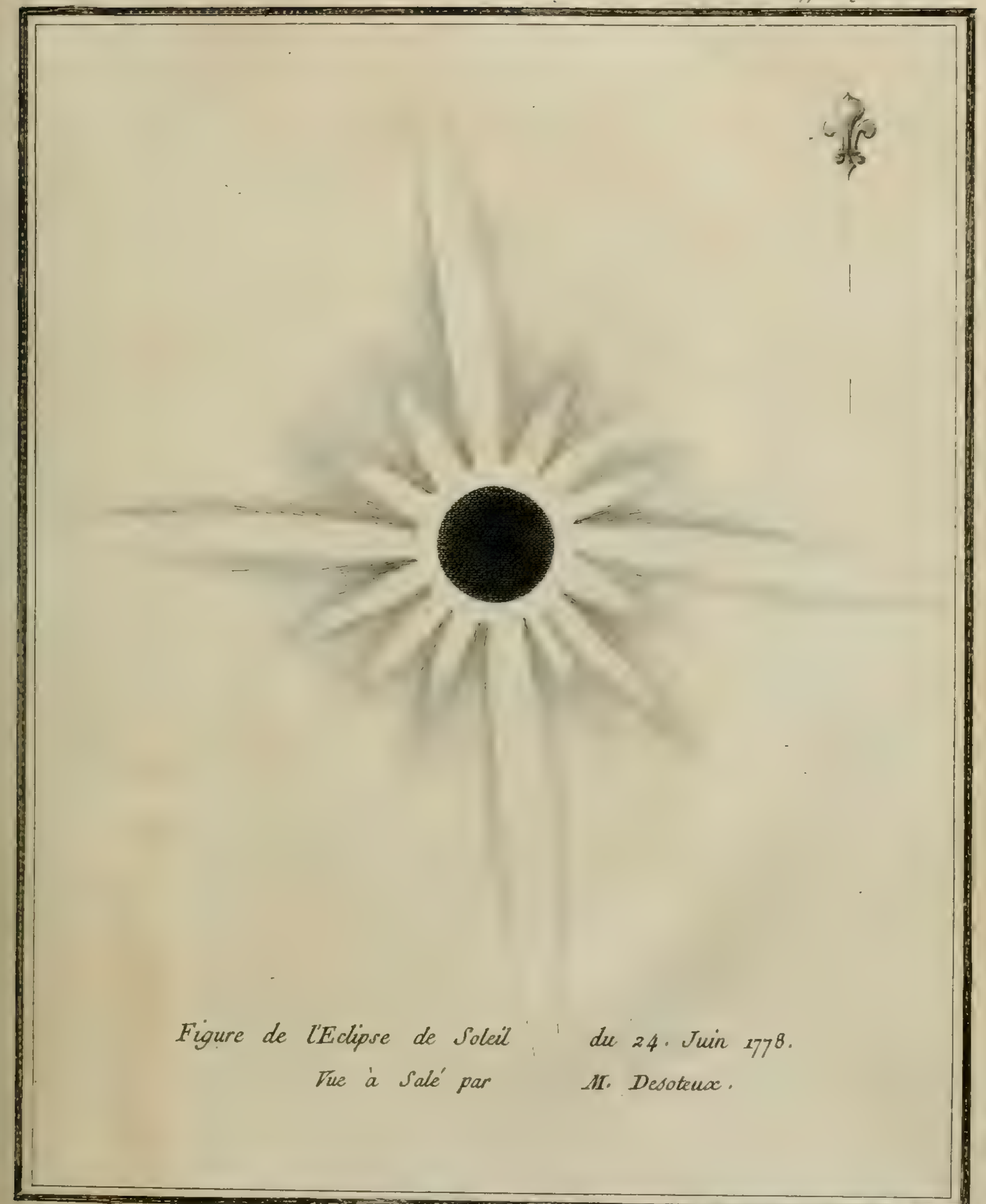


Figure de l'Eclipse de Soleil du 24. Juin 1778.
Vue à Salé par M. Desoteux.

Y. le G. Sc.



grande ou de 3 minutes $\frac{1}{2}$, négative; je trouve à Salé la diſtance apparente de la Lune au Soleil $0^{d} 0' 10''$, à l'inſtant obſervé du milieu de l'obſcurité totale : ainſi il s'en manquoit fort peu que la Lune n'eût atteint le Soleil, ſelon la correction qu'on a ſuppoſée tant aux Tables qu'à la poſition géographique du lieu.

Mais puiſque l'obſervation paroît fort exacte, quant à la longitude de la Lune, elle doit donc nous éclairer ſur le lieu de la Terre, où s'eſt fait le paſſage du centre de l'ombre, & ſur la correction qu'il faut faire à la latitude de la Lune, tirée des mêmes Tables.

Pour plus d'éclairciſſemens, au cas que la deſcription du pays ſe perfectionne à l'avenir, j'ajouterai, ſelon la relation & les détails envoyés depuis, qu'à la Marmora, l'anneau pâle & lumineux étoit par-tout d'égale largeur au temps du milieu de l'Éclipſe : cette petite ville eſt ſituée ſur la côte, à ſix lieues de Salé.

Mais vingt-cinq lieues plus au Nord que Salé, à Larache, le Soleil n'y a pas été totalement éclipſé.

A Tanger, il en eſt reſté plus d'un doigt de lumineux. Enfin un Chrétien qui revenoit de Maroc à Salé, a dit qu'à ſept lieues dans les terres où il ſe trouvoit, elle ne lui avoit pas paru totale avec obſcurité abſolue.



CONSTRUCTION DE LA BOUSSOLE,

Dont on a commencé à se servir en Août 1777.

Par M. LE MONNIER.

I. SOIT la boîte de bois *ABCD* représentant l'ancienne Boussole avec son limbe intérieur sous *AB,* & un autre limbe qui lui est opposé, & qui a même centre *O* en-dedans du rebord *CD* de la même boîte de bois : ce bois est sec, fort ancien, & depuis long-temps il a fait son plus grand effet ; malgré cela on a rendu le pivot *O* mobile, lorsque le cas le réquiert, par un chassis quarré de cuivre & mobile.

On y a adapté, avec quatre vis à tête perdue, le chassis de cuivre rouge *DFGE,* garni de ses deux traverses *IH, np,* en sorte que les grosses vis à tête perdue *m, n, o, p,* le fixent en-dessous à la boîte, & à angles droits avec les côtés latéraux de la même boîte.

On aura soin que les bouts de règles *D, F, E, G* soient dressés & parallèles, étant les extrémités d'ailleurs de règles planes, dressées & égales entr'elles.

La lunette garnie de fils à son foyer, sera mobile & pourra se fixer sous un angle invariable de 21 degrés, & comme l'objectif a 13 pouces de foyer, on aura pour base de l'arc du secteur ou inclinaison *kl,* précisément 5 pouces, ou plutôt $4^{p},99$.

Que si le foyer de l'objectif n'avoit qu'un pied ou 12 pouces, la base seroit $4^{p},606$, ce qui suffit pour l'Artiste.

II. En *O,* centre de la boîte, on placera deux sortes d'aiguilles, & la première à chape d'agate amovible, afin qu'on puisse renverser l'aiguille, en sorte qu'on ne trouve dans l'épaisseur de l'aiguille d'acier ou règle oblongue, que l'épaisseur suffisante à l'ouverture du milieu, pour y tenir à frottement & s'y maintenir parfaitement, ou plutôt à l'aide d'un écrou

inférieur, pendant les diverſes opérations & expériences qu'il s'agira d'y faire durant le cours de chaque année; on ſera en ſorte que les arcs-de-cercle ſoient aperçus par une loupe fixe, & perpendiculairement placés au-deſſus du 0 degré de chaque diviſion oppoſée de ces arcs.

On n'oubliera pas de s'aſſurer, autant qu'il ſera poſſible, ſi les extrémités ou lignes tracées ſur une lame de cuivre rouge ou d'argent, à chaque milieu des deux bouts de l'aiguille, ſe trouvent en ligne droite avec le centre de rotation ou ſtyle, où poſe la chape d'agate de l'aiguille aimantée; autrement, on y arrangera le centre ou ſtyle à l'aide de ſes écrous inférieurs.

Que ſi le Lapidaire ne ſauroit vérifier abſolument ſon cône creux dans l'agate, ni avec préciſion, on le travaillera de rechef ſur le tour des Horlogers; car il eſt viſible que ſi l'acier de l'aiguille eſt homogène, & ſi le centre magnétique ſe trouve à diſtances égales des extrémités, l'aiguille étant d'ailleurs équilibrée par un coulant ou anneau plat qui gliſſe vers l'extrémité du Sud; en ce cas, chaque pointe doit indiquer les mêmes diviſions ſur les arcs oppoſés; autrement la différence ſera partagée, à moins qu'on ne veuille s'en tenir uniquement à la pointe du Nord.

Le ſieur Lennel a exécuté cette première partie de la Bouſſole, & a centré la lunette par le renverſement: l'aiguille pèſe 2 onces 42 grains, ou 1446 grains, ayant 15 pouces de long ſur un peu plus de 4 lignes de largeur: on en conſtruit une autre qui aura la moitié du poids.

Comme nous ſommes fort éloignés des pôles terreſtres de l'aimant, on n'a pas héſité à percer l'aiguille d'un trou ſuffiſant dans ſon milieu, pour y introduire la chape d'agate, & il eſt aiſé de concevoir, & même d'apprécier l'affoibliſſement de l'aiguille par cette opération; puiſqu'il s'y conſerve encore aſſez de force magnétique pour la ramener lorſqu'elle oſcille à ſa véritable direction: elle achève ſes vibrations en 10 ſecondes $\frac{1}{2}$ de temps, ou du moins telle eſt la quantité moyenne que nous avons conclue en Septembre ſur un plus

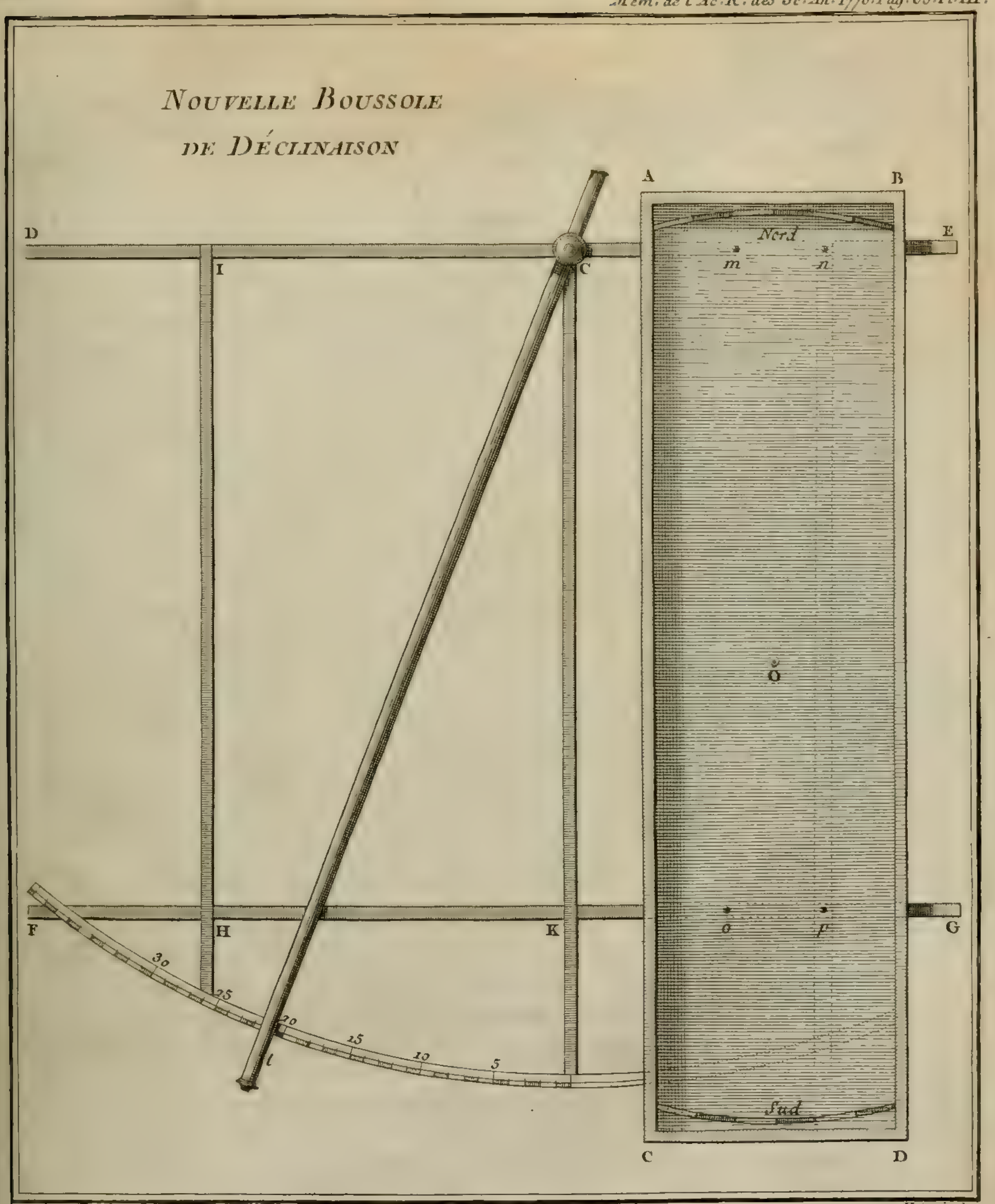
grand nombre de vibrations, ce qui ſuffiroit pour en déduire la force horizontale magnétique, le frottement étant connu.

On eſt étonné que dans toutes les Pièces qui ont concouru aux Prix propoſés juſqu'ici, pas un ſeul Auteur n'ait donné la variation actuelle ou déclinaiſon de l'aiguille aimantée: nous l'avons trouvée, M. l'Abbé Rochon & moi, le 17 Septembre 1777, à 2 heures $\frac{1}{2}$ après midi, le Soleil étant fort chaud & le ciel fort ſerein, de $20^d 25' 48''$ ou $25' \frac{5}{6}$.

Nous l'avions poſée à l'Obſervatoire royal, ſur le pied ou colonne, avec ſon ſocle qu'on y avoit tranſporté, dès le Printemps, du jardin du Temple, & que M. Caſſini le fils y avoit fait placer ſolidement au Sud du bâtiment, à $27^d 45'$ du Sud à l'Oueſt de la face méridionale, & à diſtance de 227 pieds: nous pointions le fil de la lunette au troiſième moulin de Montmartre, qui décline du vrai Nord à l'Oueſt de $30'$ 19 à $20''$.

J'ai trouvé cette année, à 5 heures $\frac{1}{2}$ après midi le 17 Décembre, $20^d 35' \frac{1}{5}$; nous pointons pour cet effet à un objet dont la déclinaiſon, quoique connue à l'égard du vrai Nord, ſera recherchée plus exactement dans la ſuite, & même juſqu'à la préciſion des ſecondes, ainſi que la déclinaiſon orientale de la pyramide, à l'égard de la Méridienne qu'on a été obligé de ſuppoſer de 12 ſecondes à l'Eſt, ou bien $0^d 20' 36''$ à l'égard de notre colonne, juſqu'à ce qu'elle ait été vérifiée avec un inſtrument des paſſages aux mêmes ſtations, ou du moins à l'une des deux.




NOUVELLE BOUSSOLE
DE DÉCLINAISON
A
B
D
E
I
C
Nord
m
n
O
F
H
K
G
o
p
30
25
20
15
10
5
l
Sud
C
D

Y le G. Sc.



ANALYSE DE L'EAU DU LAC ASPHALTITE.

Par M.rs MACQUER, LAVOISIER & SAGE.

LE lac Asphaltite est situé dans la Judée, sur les confins de l'Arabie pétrée; il est connu sous le nom de Mer-morte; il est appelé dans la Bible, *Mer de sel, Mare salis, Mare salsissimum.* Cette dernière épithète annonce que les Anciens avoient reconnu que l'eau de ce lac étoit plus salée que celle de la mer. Lû le 23 Juillet 1778.

L'eau du lac Asphaltite, que l'Académie nous a chargé d'examiner, a été envoyée à M. Guettard, par M. le Chevalier Tolès, dans des bouteilles de verre bien bouchées; elle étoit limpide, inodore, d'une saveur âcre, piquante & amère, & il s'est trouvé dans la plus petite des deux bouteilles qui la contenoient, un grouppe de sel marin, en cristaux réguliers qui s'étoient formés d'eux-mêmes, ce qui annonce que cette eau est saturée de sel marin.

Notre première expérience a été d'en déterminer la pesanteur spécifique; nous nous sommes servi à cet effet d'un grand pèse-liqueur de Farenheit, qui déplaçoit près de 4 livres $\frac{1}{2}$ d'eau distillée, & dont la tige étoit formée par un fil de cuivre d'une ligne environ de diamètre, circonstance qui le rendoit très-sensible: la pesanteur de cette eau, déterminée avec cet instrument, s'est trouvée par comparaison avec celle de l'eau distillée, dans le rapport de 1240619 à 1000000, c'est-à-dire à très-peu près comme 5 est à 4, pesanteur spécifique très-extraordinaire dont nous ne connoissions point jusques ici d'exemple dans le règne minéral, & en vertu de laquelle le bitume de Judée nage sur cette eau, tandis qu'il se précipite au fond de l'eau de la mer, qui est beaucoup moins pesante.

Après cette expérience préliminaire, nous avons mis 5 livres de cette eau à évaporer au bain de ſable dans une capſule de verre; nous avons obtenu d'abord au degré de l'évaporation moyenne, 5 onces de ſel marin criſtalliſé en cubes & en trémuies, mais qui, malgré la lenteur de l'évaporation, contenoit une quantité notable de ſel marin à baſe terreuſe tellement combiné, qu'il nous a paru impoſſible de l'en ſéparer entièrement par voie de criſtalliſation: nous nous ſommes aſſurés de ce mélange de ſel marin à baſe terreuſe, en diſſolvant le ſel marin criſtalliſé que nous avions obtenu dans de l'eau diſtillée, & en y verſant goutte à goutte de l'alkali fixe; l'acide s'eſt uni de préférence à l'alkali, & la terre, devenue libre, s'eſt précipitée en aſſez grande abondance: par une ſuite de cette même circonſtance, ce ſel marin attire plus l'humidité de l'air que le ſel marin ordinaire.

En pouſſant plus loin l'évaporation, il n'a plus paru de criſtaux d'aucune eſpèce; mais peu-à-peu la liqueur s'eſt épaiſſie, & en la laiſſant refroidir, elle s'eſt congelée en une belle ſubſtance blanche, à peu-près ſemblable à de la cire fondue qui ſe fige.

Cette ſubſtance peſée chaude, s'eſt trouvée de 1 livre 14 onces 4 gros; elle étoit extrêmement déliqueſcente, & ſe réſolvoit promptement en liqueur à l'air; de l'acide vitriolique ou de l'acide nitreux verſé deſſus en dégageoit de l'eſprit de ſel en grande abondance, d'où nous avons conclu que l'acide marin entroit dans ſa compoſition : pour nous en convaincre davantage, nous avons fait diſſoudre dans de l'eau diſtillée 5 onces de ce ſel, & nous avons verſé peu-à-peu dans la diſſolution de l'alkali fixe très-pur en liqueur; il s'eſt fait d'abord une eſpèce de coagulum qui occupoit toute la liqueur; mais peu-à-peu le précipité s'eſt rapproché & a gagné le fond du vaſe, & l'eau ſurnageante évaporée nous a donné 3 onces 4 gros de ſel fébrifuge de Silvius très-pur.

Le précipité bien édulcoré & ſéché, s'eſt trouvé du poids de 2 onces 4 gros 36 grains; il conſiſtoit en une terre très-

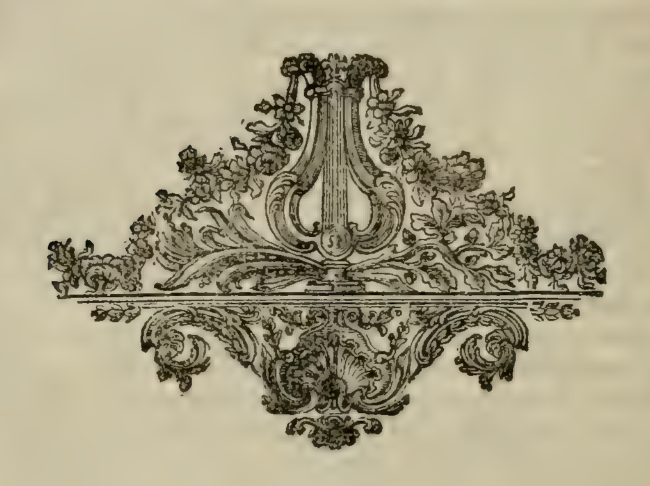
blanche qui a pris les caractères de chaux vive, par la calcination qu'en a faite l'un de nous.

Nous avons pris 5 gros de cette terre bien séchée, nous l'avons délayée dans de l'eau distillée, & nous y avons ajouté goutte à goutte de l'huile de vitriol concentrée ; il y a eu une vive effervescence, pendant laquelle une partie de la terre a été dissoute dans l'eau, tandis que l'autre a été précipitée sous la forme de sélénite. La quantité d'huile de vitriol employée s'est trouvée de 3 gros 25 grains ; d'une part, la sélénite édulcorée & séchée s'est trouvée peser 2 gros 58 grains ; de l'autre, l'eau surnageante évaporée a donné 5 gros 60 grains de vrai sel d'Epsom ou de sel de Sedlitz ; surquoi il est à observer que la sélénite ne contenant qu'à peine un quart de son poids d'eau de cristallisation, tandis que le sel d'Epsom en contient au moins moitié, la quantité effective de ces deux sels est environ dans le rapport de 4 à 3, d'où l'on peut conclure que le sel marin à base terreuse contenu dans l'eau du lac Asphaltite, est composée à peu-près de quatre parties de sel marin à base de magnésie du sel d'Epsom, & de trois parties de sel marin à base terreuse calcaire ordinaire. On ne doit pas au surplus regarder ces rapports comme rigoureusement exacts, 1.° à cause de la propriété reconnue au sel d'Epsom, par M. Lavoisier, l'un de nous, de s'évaporer en partie avec l'eau qui le tient en dissolution ; 2.° parce que les expériences faites sur les deux bouteilles envoyées par M. le Chevalier Tolès, n'ont pas donné à cet égard des résultats entièrement semblables.

En résumant ces expériences, on voit que l'eau du lac Asphaltite contient

	Par livre.			*Par quintal.*	
1.° Sel marin ordinaire mêlé d'un peu de sel marin à base terreuse. . . .	1 once	0 gros	0 grains . . .	6 liv.	4 onc.
2.° Sel marin à base terreuse composé d'environ quatre parties de sel marin à base de magnésie du sel d'Epsom, & de trois parties de sel marin à base terreuse ordinaire. . .	6.	0.	$57\frac{3}{5}$ . . .	38.	2.
	7.	0.	$57\frac{3}{5}$ . . .	44.	6.

Nous terminerons cette analyſe en obſervant que l'eau du lac Aſphaltite ne contient pas un atome de ſubſtance bitumineuſe : c'eſt donc ſans aucun fondement que quelques Auteurs ont attribué au bitume le goût amer & déſagréable, ſoit de l'eau de la mer, ſoit de quelques eaux analogues; cette amertume eſt propre au ſel marin à baſe calcaire & ſurtout à celui à baſe de magnéſie ou de terre du ſel d'Epſom.



NOUVELLES

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR RÉSOUDRE
DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

TREIZIÈME MÉMOIRE,

Dans lequel on applique les Latitudes corrigées, à la solution de plusieurs Problèmes géodésiques, & particulièrement au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, & des loxodromiques, dans l'hypothèse de la Terre elliptique.

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

PREMIÈRE SECTION.

Exposition du Sujet.

(1.) JE me propose dans ce Mémoire, d'appliquer la théorie des latitudes corrigées, à plusieurs Problèmes géodésiques; & particulièrement au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, & des loxodromiques, dans l'hypothèse de la Terre elliptique. On n'a point oublié ce que j'entends par la latitude corrigée d'un point de la Terre; c'est une fonction de la latitude vraie de ce point, & qui sert également à déterminer sa position relativement à l'Équateur. Je n'entrerai dans aucun détail à ce sujet; on peut se rappeler ce que j'ai dit dans mes précédens Mémoires, & les simplifications de calcul qui en ont résultées: je passe à l'exposition du Problème que je me propose de traiter particulièrement.

(2.) Dans nos Mémoires de *1733*, M. Clairaut a fait voir que si par un point quelconque d'un Méridien terrestre,

on mène un plan perpendiculaire à ce Méridien, & que l'on nomme *premier vertical,* l'interſection de ce plan & de notre globe formera un ovale. Le plan de cet ovale ne ſera perpendiculaire à la ſurface de la Terre, qu'au point de départ; dans tout autre point, le plan en queſtion ne ſera pas perpendiculaire à la ſurface de notre globe; de ſorte que, par exemple, ſi l'on plantoit une ſuite de piquets, avec la condition qu'ils s'effaçaſſent tous, ces piquets finiroient par être inclinés à la direction de la peſanteur.

La raiſon eſt facile à ſentir; en effet, la peſanteur n'étant pas dirigée vers un même point dans la ſuppoſition de la Terre elliptique, comme dans la ſuppoſition de la Terre ſphérique, & ces directions étant dans des plans différens à meſure que l'on change de Méridien, il eſt impoſſible de faire paſſer un plan par toutes ces directions. Donc une ſuite de piquets qui ſeroient dans un même plan, doivent néceſſairement faire à la fin un angle ſenſible avec la direction de la peſanteur, quand même ils auroient d'abord été poſés dans la direction de la peſanteur.

(3.) M. Clairaut a de plus démontré que ſi l'on ſoumet aux calculs, les opérations géodéſiques que M. Caſſini a employées pour tracer la courbe qu'il a définie *perpendiculaire à la Méridienne*, cette courbe n'eſt pas celle dans laquelle une ſuite de jallons s'effaceroient les uns les autres, & qui par conſéquent ſeroit toute dans un même plan; mais une courbe dont les différens côtés ſucceſſifs forment avec le prolongement du côté précédent, un plan toujours perpendiculaire à la ſurface de la Terre. Et comme cette propriété convient à la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point donné d'un ſphéroïde à un autre point, il en a conclu que la propriété caractériſtique de la *perpendiculaire à la Méridienne*, tracée par les opérations géodéſiques de M. Caſſini, eſt d'être *la plus courte entre tous ſes points.*

Je n'entrerai pas ici dans les détails de ſa démonſtration. Il ſuffira de remarquer que la propriété de la *perpendiculaire*

à la Méridienne, d'être le chemin le plus court entre tous ses points, se tire de la condition que les différens côtés successifs forment avec le prolongement du côté précédent, un plan toujours perpendiculaire à la Terre.

(4.) Je pourrois, dans ce travail, partir de l'équation que M. Clairaut a démontrée, & renvoyer pour la démonstration, à son Mémoire; j'ai cru cependant que l'on verroit avec plaisir l'analyse du Problème. J'emprunterai de M. Clairaut, la propriété caractéristique de la courbe, d'être la plus courte entre tous ses points, & je ferai usage des méthodes de M. Euler, pour résoudre ces sortes de questions.

(5.) En 1739, M. Clairaut a donné dans un supplément à son premier Mémoire, des méthodes pour calculer la *perpendiculaire à la Méridienne;* il est arrivé à des formules assez simples. Sous ce point de vue la matière paroît épuisée; j'ai cru cependant, en rendant hommage à ses travaux, pouvoir présenter de nouvelles réflexions sur ce sujet. La simplification que les *latitudes corrigées* ont apportée dans les calculs astronomiques, m'a fait croire qu'on pourroit espérer une simplification analogue, en les introduisant dans les opérations géodésiques: tel est le but de mon travail.

Au reste, l'on a cherché à résoudre la même question par d'autres considérations, soit en confondant la *perpendiculaire à la Méridienne*, avec la section elliptique du sphéroïde & du premier vertical, soit en calculant des moyens parallèles, soit en regardant la Terre comme sphérique, & en lui supposant par-tout la courbure particulière qui convient à l'étendue que l'on considère. Sans prétendre critiquer ces procédés, qui peuvent être bons pour de petites distances, je laisse aux Lecteurs à prononcer sur le mérite particulier de ma méthode.

SECONDE SECTION.

Détermination de la courbe qui a la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point de la surface d'un sphéroïde à un autre point pris sur la même surface; ou, ce qui revient au même, détermination de la perpendiculaire à la Méridienne.

Fig. 1. (6.) Soit *PAGDF* un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe quelconque *PAG* autour d'un axe *PC* de révolution.

Nommons

X l'abscisse, Y l'ordonnée — aux différens points de la courbe dont la révolution engendre le sphéroïde. Je suppose que l'origine des coordonnées est en C, que les abscisses X sont comptées sur l'axe de rotation CP, les ordonnées Y sur la perpendiculaire CG à l'axe CP de rotation; je suppose de plus que l'on connoît la relation entre X & Y.

r la distance CP du point C au pôle P; nous supposerons d'ailleurs cette distance égale au rayon des Tables.

u l'angle des différens Méridiens du sphéroïde, avec un premier Méridien donné de position; nous supposerons que cet angle est mesuré sur un cercle dont le rayon égale r.

Il est évident que si d'un point quelconque du sphéroïde, l'on mène à un autre point infiniment proche du même sphéroïde une ligne quelconque suivant une loi quelconque, cette ligne sera telle que si l'on nomme

P le périmètre de la ligne tracée sur le sphéroïde,

dP l'élément du périmètre,

on aura

$$(1)\ dP = \frac{\sqrt{[Y^2 du^2 + r^2 (dX^2 + dY^2)]}}{r}.$$

Soit en effet *GAP* le premier Méridien donné de position; *DMP* un Méridien qui fait un angle infiniment petit avec

le premier Méridien GAP; AM l'élement de la courbe. Du point A & du rayon AK, menons l'arc AR qui se termine au Méridien DMP; du point M, abaissons sur l'axe PC de rotation, la perpendiculaire MH; & du point R, abaissons sur MH la perpendiculaire Rn; il est évident que l'on aura Fig. 1.

$$AM = \sqrt{(AR^2 + RM^2)};$$

mais

$$RM^2 = Rn^2 + Mn^2;$$

de plus,

$$Rn = dX, \quad Mn = dY,$$

$$AR = \frac{Ydu}{r}, \text{ \& } AM = dP; \text{ donc, \&c.}$$

(7.) Quant à l'équation particulière de cette ligne, elle dépend 1.° de la relation entre les coordonnées X & Y de la courbe génératrice, que nous supposons connue; 2.° de la loi, entre u, X & Y, qui dépend elle-même de la condition particulière que l'on impose à la courbe tracée sur le sphéroïde.

(8.) Si l'on suppose maintenant que l'on impose à la courbe en question, la condition d'être la plus courte que l'on puisse mener d'un point donné de la surface du sphéroïde, à un autre point de la surface du même sphéroïde, il faut que P ou son égal $\frac{\int\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)}}{r}$ soit un *minimum*; il s'agit donc de déterminer, par les méthodes de M. Euler, la relation entre X, Y & u qui rend la fonction précédente un *minimum*.

(9.) Pour y parvenir, je remarque d'abord que puisque par la supposition, on a la relation entre X & Y coordonnées de la courbe de révolution, on peut concevoir qu'au moyen de cette relation, on a substitué à dX sa valeur en Y & dY; de sorte que l'on ait $r^2dX^2 + r^2dY^2 = Y''dY^2$, Y'' étant une fonction de Y & de connues; la fonction

$\int\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)}$, peut donc être mise sous la forme suivante, $\int\sqrt{(Y^2du^2 + Y''dY^2)}$. On a donc pour condition du Problème, d'après les méthodes de M. Euler,

$$(1)\ Y^2du = A\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)}.$$

Voici au surplus à quoi se réduit la méthode de M. Euler, dont on peut voir la démonstration dans son Traité qui a pour titre: *Methodus inveniendi curvas maximi minimi vè proprietate gaudentes.* Soit

ZdY une quantité quelconque, dans laquelle Z est une fonction de Y, u, $\frac{du}{dY}$, $\frac{d^2u}{dY^2}$, &c. & de constante.

Si l'on veut déterminer en général la courbe dans laquelle $\int ZdY$ est un *maximum*, il faut différencier la quantité Z par rapport à Y, u, $\frac{du}{dY}$, $\frac{d^2u}{dY^2}$ &c, en regardant toujours dY comme constant. Soit

$$dZ = MdY + Ndu + P\frac{d^2u}{dY} + Q\frac{d^3u}{dY^2} + R\frac{d^4u}{dY^3} + \&c.$$

on aura pour équation de la courbe,

$$N - \frac{dP}{dY} + \frac{d^2Q}{dY^2} - \frac{d^3R}{dY^3} + \&c. = 0.$$

Appliquons ces principes au cas dont il s'agit; il est aisé de voir que $\int\sqrt{(Y^2du^2 + Y''dY^2)}$, peut se mettre sous la forme suivante, $\int dY\sqrt{(\frac{Y^2du^2}{dY^2} + Y'')}$; donc $Z = \sqrt{(\frac{Y^2du^2}{dY^2} + Y'')}$;

$$dZ = \frac{(\frac{Ydu^2}{dY^2} + Y''')dY}{\sqrt{(\frac{Y^2du^2}{dY^2} + Y'')}} + \frac{Y^2du}{dY\sqrt{(Y^2\frac{du^2}{dY^2} + Y'')}} \times \frac{d^2u}{dY},$$

Y''' étant une fonction de Y'' & de constante; donc, dans le cas dont il s'agit, $N = 0$; $P = \frac{Y^2du}{dY\sqrt{(\frac{Y^2du^2}{dY^2} + Y'')}}$;

& l'équation qui satisfait au Problème est $-dP = 0$, ou en intégrant $-P +$ constante $= 0$; donc, &c.

(10.) Pour déterminer la constante A, je remarque que dans le triangle AMR, rectangle en R, on a en général $AM : AR :: r :$ sin. (angle AMR); mais l'angle AMR est l'angle de la courbe avec les différens Méridiens. De plus, Fig. 1.

$AM = \frac{\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)}}{r}$, & $AR = \frac{Ydu}{r}$; donc

$$\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)} = \frac{rYdu}{\text{sin. (angle de la courbe avec les diff. Mér.)}}.$$

Si l'on compare cette valeur de $\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)}$ avec celle tirée de l'équation (1) du §. 9, on aura

(1) Y sin. (angle de la courbe avec les différens Méridiens) $= Ar$.

On connoîtra donc la valeur de A lorsque l'on connoîtra l'angle particulier de la courbe avec le Méridien correspondant à une certaine valeur particulière de Y.

(11.) Dans le cas de la perpendiculaire à la Méridienne, l'angle de la courbe avec le Méridien $= 90^d$ au point où la courbe coupe cette Méridienne; donc sin. (angle de la courbe avec la Méridienne) $= r$, Y' étant d'ailleurs l'ordonnée à l'ellipse correspondante au point où la courbe est perpendiculaire à la Méridienne; on a donc

(1) $A = Y'$.

L'équation (1) du §. 9, devient

(2) $Y^2du - Y'\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dX^2 + r^2dY^2)} = 0$.

Et l'on a pour exprimer l'angle de la courbe avec les différens Méridiens qu'elle rencontre,

(3) Y sin. (angle de la courbe avec les différens Méridiens) $= Y'r$.

(12.) Dans le cas où l'on ne supposeroit pas la courbe perpendiculaire à la Méridienne, au point où elle la coupe, l'on auroit, par une analyse entièrement semblable à celle

des §. 10 & 11, en nommant

D l'angle de la courbe avec la Méridienne à ce point.

$$(1)\ A = \frac{Y' \text{ fin. } D}{r}.$$

L'équation (1) du §. 9, deviendroit

$$(2)\ rY^2 du = Y'\sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dX^2 + r^2 dY^2)} \text{ fin. } D.$$

Et l'on auroit pour exprimer l'angle de la courbe avec les différens Méridiens qu'elle rencontre,

$$(3)\ Y \text{ fin. (angle de la courbe avec les différens Méridiens)} = Y' \text{ fin. } D.$$

(13.) Il n'eſt plus queſtion maintenant, pour réduire la courbe à ne renfermer que deux variables u & X ou u & Y, que d'éliminer une des variables & ſa différentielle, par le moyen de l'équation à la courbe génératrice.

Si l'on ſuppoſe, par exemple, que la courbe génératrice eſt une ellipſe, que

r = le demi-petit axe de l'ellipſe génératrice,
ρ = le demi-grand axe;

& que l'origine des coordonnées X & Y ſoit au centre de l'ellipſe, on aura

$$(1)\ \rho^2 X^2 + r^2 Y^2 - r^2 \rho^2 = 0;$$

d'où l'on tire [*§. 9, équat.* (1)],

$$(2)\ du = \pm \frac{Ar\sqrt{(r^2 Y^2 - \rho^2 Y^2 + \rho^4)}}{\rho Y \sqrt{[(\rho^2 - Y^2) \times (Y^2 - A^2)]}} dY.$$

$$(3)\ du = \mp \frac{Ar^2 \sqrt{[r^4 + (\rho^2 - r^2) X^2]}}{\rho (r^2 - X^2) \times \sqrt{(\rho^2 r^2 - \rho^2 X^2 - A^2 r^2)}} dX.$$

(14.) Puiſque (*§. 6*)

$$r dP = \sqrt{[Y^2 du^2 + r^2 (dX^2 + dY^2)]};$$

ſi l'on ſubſtitue dans cette équation à du ſa valeur tirée du *paragraphe précédent*, l'on aura

$$(1)\ dP = \pm \frac{Y\sqrt{[(r^2 - \rho^2) Y^2 + \rho^4]}}{\rho\sqrt{[(\rho^2 - Y^2) \times (Y^2 - A^2)]}} dY,$$

$$(2)\ dP = \mp \frac{\rho\sqrt{[r^4 + (\rho^2 - r^2) X^2]}}{r\sqrt{(\rho^2 r^2 - \rho^2 X^2 - A^2 r^2)}} dX.$$

(15.)

(15.) Si l'on intégroit chacune des équations précédentes, on pourroit réſoudre les deux queſtions ſuivantes.

PREMIÈRE QUESTION.

Étant donnée la diſtance FM′ *à la Méridienne* MM′P *d'un lieu quelconque* F, *priſe ſur une perpendiculaire* M′F *à cette Méridienne; & la diſtance d'un autre lieu* M *ſitué ſous ce Méridien, au point* M′ *où cette perpendiculaire coupe la Méridienne; déterminer la latitude du lieu* F, *& ſa différence en longitude d'avec le lieu* M. Fig. 2.

SECONDE QUESTION.

Étant données la latitude & la longitude du lieu F, *ainſi que la latitude du lieu* M; *déterminer la diſtance du lieu* F *à la Méridienne du lieu* M, *priſe ſur la perpendiculaire* M′F *à cette Méridienne paſſant par le lieu* F; *ainſi que la diſtance du lieu* M *au point* M′, *où la perpendiculaire* M′F *rencontre la Méridienne* MM′P.

Dans le premier cas, les équations (1) & (2) du *ſ. 14*, que je ſuppoſe intégrées, feroient connoître la latitude du lieu F. En effet, on en concluroit les valeurs de X & de Y correſpondantes à la valeur P donnée; mais en vertu d'une propriété de l'ellipſe par rapport au centre, l'on a la proportion ſuivante,

$Y : X :: r :$ tang. (angle du diamètre de l'ellipſoïde paſſant par le lieu F, avec le grand axe de l'ellipſe);

donc

(1) Tang. (angle du diamètre de l'ellipſoïde paſſant par le lieu F, avec le grand axe de l'ellipſe) $= \frac{rX}{Y}$.

De plus, en vertu d'une autre propriété de l'ellipſe,

$\rho^2 : r^2 ::$ tang. (latitude vraie) : tang. (angle du diamètre de l'ellipſoïde avec le grand axe de l'ellipſe);

donc

$$(2)\ \text{Tang. (latitude vraie)} = \frac{\rho^2 X}{rY}.$$

On connoîtroit enfin la différence en longitude des lieux F & M, au moyen d'une des deux équations (2) ou (3) du *§. 13*, que je suppose pareillement intégrées.

Dans le second cas, l'équation (2) du présent paragraphe, combinée avec l'équation (1) du *§. 13*, feroit connoître la valeur de X ou de Y; on concluroit ensuite la valeur de A au moyen des équations (2) ou (3) du même paragraphe, que je suppose intégrées; l'équation (1) ou (2) du *§. 14* feroit connoître la valeur de la perpendiculaire: l'on connoîtroit enfin la valeur de Y', & par conséquent, la position du point M' où la perpendiculaire rencontre la Méridienne, au moyen des équations (1) des *§. 11* ou *12*.

Telle est à peu-près la manière dont le Problème a été résolu par M. Clairaut. On ne peut rien ajouter à l'élégance avec laquelle ce Géomètre intègre, par approximation, les différentes équations qui conduisent à la solution dont il s'agit; j'ai cru cependant qu'il m'étoit permis de présenter encore quelques réflexions sur le même sujet. La route que je me propose de suivre est absolument différente de celles que l'on a suivies jusqu'ici.

TROISIÈME SECTION.

Développement du principe qui servira à résoudre le Problème proposé.

(16.) Dans les Mémoires précédens, j'ai fait voir que la manière de simplifier les Questions astronomiques que j'ai traitées, consiste principalement à représenter chaque lieu de la Terre, non par sa latitude vraie, ainsi qu'on l'avoit toujours pratiqué, mais par une fonction de cette latitude qui sert également à désigner le lieu, & que j'ai appelée *latitude corrigée:* j'emploîrai le même artifice, & je désignerai chaque lieu par sa latitude corrigée. Au reste, j'entends par la latitude corrigée d'un lieu, une fonction de la latitude vraie, telle

que si l'on nomme

r le demi-petit axe de la Terre,

ρ le demi-grand axe,

l'on a

(1) r tangente latitude vraie $=$ ρ tangente latitude corrigée.

Comme dans la suite de ce Mémoire, je parlerai souvent de la projection des différens points & des différentes courbes tracées sur le sphéroïde; pour éviter toute équivoque à ce sujet, on n'oubliera pas que si d'un point M quelconque du sphéroïde l'on abaisse une perpendiculaire MH sur le petit axe CP du sphéroïde, j'appellerai projection du point M du sphéroïde, le point m où la perpendiculaire dont je viens de parler, rencontre la sphère inscrite. Fig. 2.

Par la même raison, j'appellerai projection d'une courbe quelconque tracée sur le sphéroïde, la suite des points déterminés sur la sphère inscrite suivant la loi précédente. Ainsi, par exemple, relativement à un lieu M placé sur le sphéroïde, j'appellerai projection du Méridien $MM'P$ de ce lieu, le grand cercle $mm'P$ de la sphère inscrite, où cette sphère est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées des différens points du Méridien sur le petit axe du sphéroïde.

J'appellerai projection du parallèle du lieu M, le cercle de la sphère inscrite, où cette sphère est rencontrée par la suite des perpendiculaires abaissées suivant la loi dont on vient de parler, des différens points du parallèle du lieu M sur le sphéroïde.

D'après ces notions préliminaires, il est évident que si l'on considère sur le sphéroïde, un lieu M; le Méridien $MM'P$ du lieu M; la perpendiculaire $M'F$ à ce Méridien qui coupe ce Méridien en un point M'; un autre lieu F pris sur cette perpendiculaire; que l'on considère de plus, sur la sphère inscrite, la projection m du lieu M, la projection $mm'P$ de son Méridien, & que par la projection m' du

Fig. 2. point M', l'on ſuppoſe mené perpendiculairement à la projection $m\,m'\,P$ du Méridien du lieu M, un grand cercle $m'\,F'$ de la ſphère inſcrite, qui coupe ſucceſſivement ſur cette ſphère, la projection des parallèles que rencontre ſur le ſphéroïde, la véritable perpendiculaire $M'\,F$ à la Méridienne du lieu M paſſant par le lieu F, on aura ſur la ſphère inſcrite, un triangle ſphérique rectangle dont les côtés ſeront

1.° l'arc $m'\,P$ de la ſphère inſcrite compris entre le pôle & la projection m' du point M', interſection du Méridien du point M, & de la perpendiculaire à ce Méridien.

2.° l'arc $m'\,F'$ du grand cercle de la ſphère inſcrite, dont je viens de parler, & qui ſe termine au point où ce grand cercle rencontre la projection du parallèle du lieu F.

3.° l'arc $F'\,P$ compris entre le pôle & le point du parallèle dont il vient d'être queſtion.

J'appellerai déſormais

Arc $m'P$, le premier des arcs dont je viens de parler.

Perpendiculaire corrigée à la Méridienne, le ſecond arc que je viens de déterminer.

Complément de la Latitude corrigée du lieu F, le troiſième arc que j'ai conſidéré.

Longitude corrigée du lieu F, l'angle au pôle $m'\,P\,F'$ du triangle ſphérique dont eſt queſtion.

Il ne s'agit maintenant que de déterminer la relation entre ces différentes quantités & les quantités analogues tracées ſur le ſphéroïde.

(17.) Dans la ſuite de ce Mémoire, je conſidérerai particulièrement la perpendiculaire corrigée à la Méridienne; il faut donc avant tout déterminer l'équation à cette perpendiculaire corrigée, pour en conclure les rapports avec la vraie perpendiculaire tracée ſur le ſphéroïde.

Pour y parvenir, ſoit

r le rayon de la ſphère.

x les abſciſſes } du cercle générateur de la ſphère inſcrite; je ſuppoſe
y les ordonnées } que l'origine des coordonnées eſt au centre du cercle.

y' l'ordonnée particulière du cercle, au point où commence l'arc $m'F'$ dont il s'agit, c'est-à-dire l'ordonnée au point m' où l'arc $m'F'$ coupe la Méridienne corrigée du lieu M. Fig. 2.

l'angle des différens Méridiens de la ſphère inſcrite, correſpondans aux différens points de l'arc $m'F'$, avec la Méridienne corrigée du lieu M.

Il eſt évident que ſi l'on ſuppoſe la perpendiculaire corrigée tracée ſur la ſphère inſcrite, elle formera avec l'arc $m'P$ & avec les différens Méridiens ſucceſſifs de la ſphère inſcrite, correſpondans aux différens points de cette perpendiculaire corrigée, un triangle ſphérique rectangle dont un des côtés ſera, ainſi que je l'ai déjà dit, l'arc $m'P$ compris entre le pôle & la projection m' de l'interſection du Méridien elliptique du lieu M & de la perpendiculaire à ce Méridien; le ſecond côté ſera l'arc de la perpendiculaire corrigée dont eſt queſtion; & le troiſième côté, ou l'hypothénuſe $F'P$ du triangle, ſera l'arc compris entre le pôle & le point F' de la perpendiculaire corrigée. On aura donc (*trigon. ſphérique*); le ſinus total eſt au ſinus de l'hypothénuſe du triangle ſphérique, comme le ſinus de l'angle compris entre le ſecond côté & l'hypothénuſe du triangle eſt au ſinus du premier côté. Mais le ſinus de l'hypothénuſe du triangle ſphérique eſt évidemment la quantité que nous avons nommée y; le ſinus du côté $m'P$ eſt la quantité que nous avons nommée y'; & l'angle compris entre la perpendiculaire corrigée & l'hypothénuſe du triangle ſphérique eſt l'angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens ſucceſſifs; donc

(1) ſin. (angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens) $= \frac{ry'}{y}$.

Maintenant, ſi l'on nomme

p la perpendiculaire corrigée,

l'on aura, d'après les conſtructions du §. 6,

$$(2)\quad dp = \frac{\sqrt{[y\,dv + r(l: \text{[illegible]} + dvy)]}}{r}.$$

D'ailleurs, on démontreroit facilement, par une analyſe

ſemblable à celle développée dans le ſ. 10, que

(3) ſin. (angle de la perpendiculaire corr. avec les Mérid.) $= \frac{r y d v}{\sqrt{[y^2 dv^2 + r^2 (dx^2 + dy^2)]}}$;

donc

$$(4)\ y^2 dv - y' \sqrt{[y^2 dv^2 + r^2 (dx^2 + dy^2)]} = 0.$$

Telle eſt l'équation à la perpendiculaire corrigée.

(18.) On réſoudroit de même la queſtion, ſi au lieu de conſidérer la perpendiculaire à la Méridienne du lieu *M*, on avoit à calculer une ligne qui feroit un angle quelconque avec cette Méridienne au point de départ; il faudroit alors conſidérer ſur la ſphère inſcrite, un arc de grand cercle qui feroit avec la Méridienne corrigée, un angle égal à celui formé ſur le ſphéroïde par la droite dont il s'agit, & par le Méridien du lieu *M*.

Nous avons déterminé (ſ. 12), l'équation à cette droite ſur le ſphéroïde; & nous avons nommé

D l'angle que fait cette courbe avec le Méridien au point de départ.

Il faut avoir maintenant l'équation à l'arc de grand cercle correſpondant ſur la ſphère inſcrite.

L'équation à cet arc de grand cercle eſt facile à déterminer; en effet, les équations (2) & (3) du ſ. 17 ſubſiſtent, mais au lieu de l'équation (1), l'on a

(1) ſin. (angle compris entre le ſecond & le troiſième côté) $= \frac{y' \text{ſin.} D}{y}$;

& l'équation (4) du même paragraphe, devient

$$(2)\ r y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2)}\ \text{ſin.}\ D = 0.$$

Telle eſt l'équation à la ligne demandée.

Il eſt aiſé de voir que l'on n'a plus alors un triangle ſphérique rectangle à réſoudre, mais un triangle obliqueangle formé par la Méridienne corrigée du lieu *M*, par l'arc de cercle dont nous venons de donner l'équation, & par les différens Méridiens ſucceſſifs correſpondans aux différens points de cet arc.

Paſſons à l'examen de quelques queſtions préliminaires à la ſolution des Problèmes dont il s'agit.

QUATRIÈME SECTION.

De la relation entre la Latitude vraie & la Latitude corrigée d'un lieu.

(19.) Si l'on nomme

r le demi-petit axe de la Terre,

ρ le demi-grand axe;

nous avons démontré que

(1) tangente latitude vraie $= \frac{\rho}{r}$ tangente latitude corrigée,

(2) tang. latitude corrigée $= \frac{r}{\rho}$ tangente latitude vraie.

On pourra donc facilement conclure la latitude corrigée de la latitude vraie, & réciproquement.

Dans l'uſage des formules précédentes, l'on n'oubliera pas que ſi l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178,

$$\log. \frac{\rho}{r} = 0{,}0024467; \quad \log. \frac{r}{\rho} = -0{,}0024467.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201,

$$\log. \frac{\rho}{r} = 0{,}0021661; \quad \log. \frac{r}{\rho} = -0{,}0021661.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230,

$$\log. \frac{\rho}{r} = 0{,}0018923; \quad \log. \frac{r}{\rho} = -0{,}0018923.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300,

$$\log. \frac{\rho}{r} = 0{,}0014501; \quad \log. \frac{r}{\rho} = -0{,}0014501.$$

(20.) Quels que ſimples que ſoient ces calculs, voici des Tables qui pourront en diſpenſer.

TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en ſuppoſant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.

LATITUDES.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	DIFFÉRENCES.
D. M.	*M. S.*	*D. M.*	*M. S.*
40. 0	9. 32,0	47. 0	9. 40,0
40. 15	9. 32,8	47. 15	9. 39,6
40. 30	9. 33,6	47. 30	9. 39,1
40. 45	9. 34,4	47. 45	9. 38,6
41. 0	9. 35,2	48. 0	9. 38,0
41. 15	9. 35,9	48. 15	9. 37,3
41. 30	9. 36,6	48. 30	9. 36,6
41. 45	9. 37,3	48. 45	9. 35,9
42. 0	9. 38,0	49. 0	9. 35,2
42. 15	9. 38,6	49. 15	9. 34,4
42. 30	9. 39,1	49. 30	9. 33,6
42. 45	7. 39,6	49. 45	9. 32,8
43. 0	9. 40,0	50. 0	9. 32,0
43. 15	9. 40,4	50. 15	9. 31,1
43. 30	9. 40,7	50. 30	8. 3[illegible],1
43. 45	9. 40,9	50. 45	9. 29,1
44. 0	9. 41,0	51. 0	9. 28,0
44. 15	9. 41,0	51. 15	9. 26,8
44. 30	9. 41,0	51. 30	9. 25,6
44. 45	9. 41,0	51. 45	9. 24,4
45. 0	9. 41,0	52. 0	9. 23,2
45. 15	9. 41,0	52. 15	9. 21,9
45. 30	9, 41,0	52. 30	9. 20,6
45. 45	9. 41,0	52. 45	9. 19,3
46. 0	9. 41,0	53. 0	9. 18,0
46. 15	9. 40,9	53. 15	9. 16,7
46. 30	9. 40,7	53. 30	9. 15,4
46. 45	9. 40,4	53. 45	9. 14,1
47. 0	9. 40,0	54. 0	9. 12,8

TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201.

LATITUDES.		DIFFÉRENCES.		LATITUDES.		DIFFÉRENCES.	
D.	M.	M.	S.	D.	M.	M.	S.
40.	0	8.	27,6	47.	0	8.	34,3
40.	15	8.	28,3	47.	15	8.	34,0
40.	30	8.	29,0	47.	30	8.	33,6
40.	45	8.	29,6	47.	45	8.	33,1
41.	0	8.	30,2	48.	0	8.	32,6
41.	15	8.	30,8	48.	15	8.	32,0
41.	30	8.	31,4	48.	30	8.	31,4
41.	45	8.	32,0	48.	45	8.	30,8
42.	0	8.	32,6	49.	0	8.	30,2
42.	15	8.	33,1	49.	15	8.	29,6
42.	30	8.	33,6	49.	30	8.	29,0
42.	45	8.	34,0	49.	45	8.	28,3
43.	0	8.	34,3	50.	0	8.	27,6
43.	15	8.	34,6	50.	15	8.	26,8
43.	30	8.	34,8	50.	30	8.	25,9
43.	45	8.	34,9	50.	45	8.	24,9
44.	0	8.	35,0	51.	0	8.	23,8
44.	15	8.	35,0	51.	15	8.	22,7
44.	30	8.	35,0	51.	30	8.	21,6
44.	45	8.	35,0	51.	45	8.	20,5
45.	0	8.	35,0	52.	0	8.	19,4
45.	15	8.	35,0	52.	15	8.	18,3
45.	30	8.	35,0	52.	30	8.	17,2
45.	45	8.	35,0	52.	45	8.	16,1
46.	0	8.	35,0	53.	0	8.	15,0
46.	15	8.	34,9	53.	15	8.	13,8
46.	30	8.	34,8	53.	30	8.	12,6
46.	45	8.	34,6	53.	45	8.	11,3
47.	0	8.	34,3	54.	0	8.	10,0

TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en ſuppoſant les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230.

LATITUDES	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	DIFFÉRENCES.
D. M.	M. S.	D. M.	M. S.
40. 0	7. 21,9	47. 0	7. 28,4
40. 15	7. 22,6	47. 15	7. 28,1
40. 30	7. 23,3	47. 30	7. 27,7
40. 45	7. 24,0	47. 45	7. 27,3
41. 0	7. 24,6	48. 0	7. 26,8
41. 15	7. 25,2	48. 15	7. 26,3
41. 30	7. 25,8	48. 30	7. 25,8
41. 45	7. 26,3	48. 45	7. 25,2
42. 0	7. 26,8	49. 0	7. 24,6
42. 15	7. 27,3	49. 15	7. 24,0
42. 30	7. 27,7	49. 30	7. 23,3
42. 45	7. 28,1	49. 45	7. 22,6
43. 0	7. 28,4	50. 0	7. 21,9
43. 15	7. 28,7	50. 15	7. 21,1
43. 30	7. 28,9	50. 30	7. 20,3
43. 45	7. 29,0	50. 45	7. 19,5
44. 0	7. 29,0	51. 0	7. 18,7
44. 15	7. 29,0	51. 15	7. 17,8
44. 30	7. 29,0	51. 30	7. 16,9
44. 45	7. 29,0	51. 45	7. 16,0
45. 0	7. 29,0	52. 0	7. 15,1
45. 15	7. 29,0	52. 15	7. 14,1
45. 30	7. 29,0	52. 30	7. 13,1
45. 45	7. 29,0	52. 45	7. 12,1
46. 0	7. 29,0	53. 0	7. 11,1
46. 15	7. 29,0	53. 15	7. 10,1
46. 30	7. 28,9	53. 30	7. 9,0
46. 45	7. 28,7	53. 45	7. 7,9
47. 0	7. 28,4	54. 0	7. 6,8

TABLE de la différence des Latitudes vraies & corrigées, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300.

LATITUDES.	DIFFÉRENCES.	LATITUDES.	DIFFÉRENCES
D. M.	M. S.	D. M.	M. S.
40. 0	5. 39,0	47. 0	5. 43,4
40. 15	5. 39,5	47. 15	5. 43,2
40. 30	5. 40,0	47. 30	5. 42,9
40. 45	5. 40,4	47. 45	5. 42,6
41. 0	5. 40,8	48. 0	5. 42,3
41. 15	5. 41,2	48. 15	5. 42,0
41. 30	5. 41,6	48. 30	5. 41,6
41. 45	5. 42,0	48. 45	5. 41,2
42. 0	5. 42,3	49. 0	5. 40,8
42. 15	5. 42,6	49. 15	5. 40,4
42. 30	5. 42,9	49. 30	5. 40,0
42. 45	5. 43,2	49. 45	5. 39,5
43. 0	5. 43,4	50. 0	5. 39,0
43. 15	5. 43,6	50. 15	5. 38,5
43. 30	5. 43,8	50. 30	5. 38,0
43. 45	5. 43,9	50. 45	5. 37,4
44. 0	5. 44,0	51. 0	5. 36,8
44. 15	5. 44,0	51. 15	5. 36,1
44. 30	5. 44,0	51. 30	5. 35,4
44. 45	5. 44,0	51. 45	5. 34,7
45. 0	5. 44,0	52. 0	5. 34,0
45. 15	5. 44,0	52. 15	5. 33,3
45. 30	5. 44,0	52. 30	5. 32,6
45. 45	5. 44,0	52. 45	5. 31,8
46. 0	5. 44,0	53. 0	5. 31,0
46. 15	5. 43,9	53. 15	5. 30,2
46. 30	5. 43,8	53. 30	5. 29,4
46. 45	5. 43,6	53. 45	5. 28,6
47. 0	5. 43,4	54. 0	5. 27,8

Je n'ai pas cru devoir étendre les calculs au-delà des parallèles de 40 degrés & de 54 degrés, attendu que la Méridienne de France, que j'ai principalement en vue, ne passe pas ces latitudes.

(21.) Au moyen des Tables précédentes, étant donnée la latitude vraie d'un lieu, on conclura aisément sa latitude corrigée, & réciproquement. Si l'on veut conclure la latitude vraie de la latitude corrigée, l'on ajoutera à la latitude corrigée les différences données par les Tables précédentes, & l'on aura la latitude vraie. Il faudra soustraire ces différences, de la latitude vraie, si l'on veut conclure la latitude corrigée de la latitude vraie.

CINQUIÈME SECTION.

Détermination du nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite ; & de la relation entre la Méridienne corrigée du lieu M *sur la sphère inscrite, & la véritable Méridienne sur le sphéroïde.*

(22.) Pour appliquer les principes de la troisième Section, au calcul de la perpendiculaire à la Méridienne, je dois résoudre les deux Questions suivantes.

Fig. 3. Soit CP le petit axe de la Terre; CG le grand axe; $PM'M$ un Méridien terrestre ; $Pm'm$ le Méridien correspondant de la sphère inscrite: je dois déterminer 1.° le nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite. 2.° Étant donnée la distance d'un point M' pris sur un Méridien terrestre, à un autre point M pris sur le même Méridien, je dois conclure l'arc $m'P$ de la sphère inscrite, compris entre le pôle P & le point m' projection du point M'. Rien n'est plus simple que la solution de ces deux Questions; je commence par la première.

Du nombre de toises contenues dans l'arc d'un degré de la sphère inscrite.

(23.) On sait que le degré du Méridien, en remontant de Paris vers le Nord, est de 57074 toises. Supposons que

l'on demande, d'après cette meſure, combien de toiſes contient l'arc d'un degré de la ſphère inſcrite : voici comment on peut raiſonner. Soit M Paris ; M' le lieu plus boréal d'un degré que Paris ; l'arc MM' du Méridien elliptique eſt par conſéquent de 57074 toiſes. Soit λ la latitude de Paris, & par conſéquent $\lambda + 1^d$ la latitude du lieu M' ; il ſuit de ce qui a été dit dans les précédens paragraphes, que la tangente de la latitude du point m, ſur la ſphère inſcrite, a pour expreſſion $\frac{r}{\rho}$ tang. λ ; & que la tangente de la latitude du point m' ſur la ſphère inſcrite, a pour expreſſion $\frac{r}{\rho}$ tang. $(\lambda + 1^d)$. On aura donc facilement la valeur de l'arc mm' de la ſphère inſcrite, arc qui eſt la différence des deux latitudes corrigées trouvées précédemment. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que Paris ſoit ſitué ſous le parallèle de $48^d\ 50'\ 14''$; que par conſéquent la latitude du lieu plus boréal d'un degré que Paris, ſoit de $49^d\ 50'\ 14''$; que de plus, les axes de la Terre ſoient dans le rapport de 177 à 178 ; on aura pour latitudes corrigées correſpondantes aux latitudes vraies, $48^d\ 40'\ 38''$ & $49^d\ 40'\ 41''$. L'arc mm' de la ſphère inſcrite, correſpondant à l'arc MM' du ſphéroïde, ſera donc $1^d\ 0'\ 3''$. Fig. 3.

(24.) Pour trouver maintenant le nombre de toiſes que contient l'arc mm' de la ſphère inſcrite, je remarque que le Méridien elliptique $PM'MG$ & le cercle inſcrit $Pm'mG'$ ont des abſciſſes communes CH, Ch ; & des ordonnées correſpondantes HM, Hm, hM', hm', qui ſont entr'elles, dans le rapport des demi-axes de l'ellipſe génératrice. Soit

x les abſciſſes communes à l'ellipſe & au cercle ;
Y l'ordonnée à l'ellipſe ;
y l'ordonnée au cercle ;
r le demi-petit axe de la Terre ;
ρ le demi-grand axe ;
K l'arc MM' de l'ellipſe ;
k l'arc mm' correſpondant du cercle inſcrit.

On aura d'abord en vertu des conſtructions précédentes,

$(1)\ dK = \sqrt{(dx^2 + dY^2)}$; $(2)\ dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;
$(3)\ \rho y = rY$; $(4)\ x^2 + y^2 - r^2 = 0$;
$(5)\ xdx + ydy = 0$; $(6)\ \rho dy - rdY = 0$.

Si dans l'équation (1) l'on ſubſtitue à dY ſa valeur tirée de l'équation (6), elle deviendra

$$(7)\ dK = \frac{\sqrt{(\rho^2 dy^2 + r^2 dx^2)}}{r};$$

ou enfin, en ſuppoſant

$$(8)\ \Delta^2 - \rho^2 + r^2 = 0,$$

on aura

$$(9)\ dK = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}.$$

Dans cette dernière équation, je ſubſtitue à $dx^2 + dy^2$ ſa valeur dk^2, & j'ai

$$(10)\ K + \text{conſtante} = \int\sqrt{(dk^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}.$$

Je réduis cette expreſſion en ſérie, & j'ai

$$(11)\ K + \text{conſtante} = k + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\int\frac{dy^2}{dk} - \tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\int\frac{dy^4}{dk^3} + \&c.$$

Mais à cauſe des équations (2) & (5),

$$dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{-r\,dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}};$$

donc $\frac{dy}{dk} = \frac{-\sqrt{(r^2 - y^2)}}{r} = \frac{-x}{r}$;

de plus, $dy = \frac{-x\,dx}{y} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$;

l'équation (11) devient donc

$$(12)\ K + \text{conſtante} = k + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\int\frac{x^2 dx}{r\sqrt{(r^2 - x^2)}} - \tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\int\frac{x^4 dx}{r^3\sqrt{(r^2 - x^2)}} + \&c.$$

(25.) Soit un cercle dont le rayon $= r$; l'abſciſſe quelconque $= x$, & nommons X l'arc correſpondant à l'abſciſſe x; l'analyſe nous apprend que Fig. 3.

$$\int \frac{x^2 dx}{r\sqrt{(r^2 - x^2)}} = -\frac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r^2 - x^2)}}{r} + \frac{1}{2}X,$$

$$\int \frac{x^4 dx}{r^3\sqrt{(r^2 - x^2)}} = -\frac{1}{4}\frac{x^3\sqrt{(r^2 - x^2)}}{r^3} + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r^2 - x^2)}}{r} + \frac{1}{2}X\right].$$

Donc ſi l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de Δ, élevées à une puiſſance ſupérieure à la ſeconde, on aura

$$(1)\ K + \text{conſtante} = k + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r^2 - x^2)}}{r}\right] = k + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^3}\left[\frac{1}{2}rX - \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)}\right].$$

(26.) Il eſt évident, que ſi du point m' du cercle $G'm'P$ l'on mène au centre C, le rayon $m'C$; $\frac{1}{2}rX$ ſera l'expreſſion du ſecteur $G'Cm'$; d'ailleurs, $\frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)}$ eſt l'expreſſion de la ſurface du triangle $m'Ch$. De plus, ſi du point m' l'on abaiſſe ſur CG' la perpendiculaire $m'R'$, on aura ſurface $m'CR' =$ ſurface $m'Ch$; donc $\frac{1}{2}rX - \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)}$ eſt l'expreſſion de la ſurface $G'm'R'$.

Soit maintenant CH l'abſciſſe particulière correſpondante au point m du cercle inſcrit. Du point m abaiſſons ſur $G'C$ la perpendiculaire mR; il eſt clair, que par rapport au point m, $\frac{1}{2}rX - \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)}$ ſera l'expreſſion de la ſurface $G'mR$. Et comme par la nature de la queſtion, K & k doivent être à la fois égaux à zéro, lorſque $x = CH$, on aura

$$\text{conſtante} = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^3} \times \text{ſurface } G'mR;$$

& l'équation (1) du *paragraphe précédent*, deviendra

$$(1)\ k - K + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^3}\text{ ſurface } Rmm'R' = 0.$$

(27.) Puiſque ſurface $Rmm'R' =$ ſurface du ſecteur mCm' $+$ ſurface du triangle mCR — ſurface du triangle $m'CR$, les conſtructions précédentes ſe réduiſent à ceci.

Fig. 3. Soit

s le ſinus, c le coſinus, a l'arc } de la latitude corrigée du lieu M.

s' le ſinus, c' le coſinus, a' l'arc } de la latitude corrigée d'un lieu M', pris ſur le Méridien du lieu M, & dont on compare la poſition avec celle du lieu M.

On aura

$$(1)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left(\frac{a' - a}{2} + \frac{sc - s'c'}{2r}\right) = 0,$$

ou à cauſe de $\dfrac{sc - s'c'}{2r} = \dfrac{\text{coſ.}(a + a') \times \text{ſin.}(a - a')}{2r}$;

$$(2)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{a' - a}{2} + \frac{\text{coſ.}(a + a') \times \text{ſin.}(a - a')}{2r}\right] = 0,$$

ou enfin, à cauſe de $a' = a + k$,

$$(3)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{\text{coſ.}(2a + k) \times \text{ſin.}\,k}{2r}\right] = 0.$$

(28.) Dans les formules du *paragraphe précédent*, k, K, a, a', ſont exprimés en valeurs du rayon. Si l'on vouloit que k, K, a, a', fuſſent exprimés en ſecondes de degré, on auroit alors l'équation ſuivante,

$$(1)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{a' - a}{2} + \frac{206265'' \times \text{coſ.}(a + a') \times \text{ſin.}(a - a')}{2r^2}\right] = 0,$$

ou enfin,

$$(2)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265''\,\text{coſ.}(2a + k) \times \text{ſin.}\,k}{2r^2}\right] = 0.$$

Comme dans les recherches que nous nous propoſons de faire, nous ne conſidérerons que des points ſitués dans l'hémiſphère boréal, nous remarquerons que a & a' ont leur origine à l'Équateur; que les quantités K & k ont reſpectivement leur origine aux points M, m; qu'elles ſont poſitives en remontant vers le Nord, & négatives dans le cas oppoſé; que le ſigne de coſ. $(a + a')$, de

ſin.

ſin. $(a - d')$, de coſ. $(2a + k)$, & de ſin. k, dépend de la valeur de ces arcs.

(29.) Au moyen de l'équation du *paragraphe précédent*, nous pouvons déterminer combien de degrés de la ſphère inſcrite contient l'arc du ſphéroïde compris entre le parallèle de $48^d\,50'\,14''$ & le parallèle de $49^d\,50'\,14''$, en ſuppoſant le rapport des axes de la Terre comme 177 à 178. En effet, nous avons vu *(§. 23)* que dans cette ſuppoſition, l'arc $k = 1^d\,0'\,3''$, & que par conſéquent $\frac{k}{2} = 1801'',5$; d'ailleurs, $\frac{\Delta^2}{2r} = 567$; de plus, $2a + k = 98^d\,21'\,19''$;

$$\text{donc} \quad - \frac{206265''\,\text{coſ.}\,(2a+k)\,\text{ſin.}\,k}{2r^2} = 262'';$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265''\,\text{coſ.}\,(2a+k)\,\text{ſin.}\,k}{2r^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}(1801'',5 + 262'') = 11'',7;$$

$$\text{donc} \quad K = 1^d\,0'\,3'' + 11'',7 = 1^d\,0'\,14''7.$$

(30.) Nous avons vu précédemment que K égale 57074 toiſes; de plus K égale un arc de $1^d\,0'\,14'',7$ de la ſphère inſcrite. Donc un arc de $1^d\,0'\,14'',7$ de la ſphère inſcrite, contient 57074 toiſes; donc un arc d'un degré de cette même ſphère contient 56837 toiſes.

(31.) Par de ſemblables calculs, on trouvera les valeurs ſuivantes, en ſuppoſant le degré entre Paris & Amiens de 57074 toiſes.

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

$r = 100000$; $\rho = 100565$;

$\frac{\Delta^2}{2r} = 567$; log. $\frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,2467265$.

Un degré de la ſphère inſcrite contient 56837 toiſes.

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

$r = 100000$; $\rho = 100500$;

$\frac{\Delta^2}{2r} = 502$; log. $\frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,2994693$.

Un degré de la ſphère inſcrite contient 56863 toiſes.

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

$r = 100000$; $\rho = 100438$;

$\frac{\Delta^2}{2r} = 439,5$; log. $\frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,3570411$.

Un degré de la ſphère inſcrite contient 56884 toiſes.

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

$r = 100000$; $\rho = 100333$;

$\frac{\Delta^2}{2r} = 334$; log. $\frac{\Delta^2}{2r^2} = -2,4762535$.

Un degré de la ſphère inſcrite contient 56932 toiſes.

Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.

$r = 100000$; $\rho = 100000$; $\Delta = 0$.

Un degré de la ſphère = 57074 toiſes.

De la relation entre l'arc m'P *de la ſphère inſcrite & l'arc* MM' *du ſphéroïde.*

(32.) Je dois réſoudre maintenant la ſeconde queſtion propoſée dans le *§. 22;* c'eſt-à-dire étant donnée la diſtance Fig. 3. d'un point M' d'un Méridien elliptique, à un autre point M pris ſur le même Méridien, je dois conclure l'arc $m'P$ de la Méridienne corrigée, compris entre le pôle P & le point m' projection du point M'; & réciproquement.

Pour y parvenir, ſoit

θ le nombre de toiſes que contient un degré de la ſphère inſcrite: cette quantité eſt connue par le *§. 31.*

k l'arc $m'm$ de la ſphère inſcrite compris entre le point m projection du point M, & le point m' projection du point M': je ſuppoſe que cet arc eſt évalué en degrés, minutes & ſecondes.

K l'arc correſpondant MM' du ſphéroïde, évalué pareillement en degrés, minutes & ſecondes de la ſphère inſcrite. Fig. 3.

t le nombre de toiſes que contient l'arc $m'm$.

T le nombre de toiſes que contient l'arc $M'M$.

Il eſt évident que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ \theta k - t \times 3600'' = 0; \qquad (2)\ \theta K - T \times 3600'' = 0.$$

Au moyen de ces deux équations, lorſque l'on connoîtra les arcs k, K en degrés, on évaluera facilement le nombre de toiſes qu'ils contiennent; & réciproquement.

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178, l'on aura

$$\theta = 56837 \text{ toiſes..... log. } \frac{3600''}{\theta} = -\ 1{,}1983286.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201, l'on aura

$$\theta = 56863 \text{ toiſes..... log. } \frac{3600''}{\theta} = -\ 1{,}1985273.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230, l'on aura

$$\theta = 56884 \text{ toiſes..... log. } \frac{3600''}{\theta} = -\ 1{,}1986876.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300, l'on aura

$$\theta = 56932 \text{ toiſes..... log. } \frac{3600''}{\theta} = -\ 1{,}1990589.$$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 1 à 1, l'on aura

$$\theta = 57074 \text{ toiſes..... log. } \frac{3600''}{\theta} = -\ 1{,}2001358.$$

(33.) Pour faciliter l'uſage des équations (1) & (2) du *paragraphe précédent*, j'ai cru qu'il étoit à propos de joindre la Table ſuivante.

TABLE du nombre de Secondes correſpondantes aux différens degrés, depuis 0 degré juſqu'à 29 degrés.

Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.
0.	1.	60	2.	20.	8400	7.	30.	27000
0.	2.	120	2.	30.	9000	7.	40.	27600
0.	3.	180	2.	40.	9600	7.	50.	28200
0.	4.	240	2.	50.	10200	8.	0.	28800
0.	5.	300	3.	0.	10800	8.	10.	29400
0.	6.	360	3.	10.	11400	8.	20.	30000
0.	7.	420	3.	20.	12000	8.	30.	30600
0.	8.	480	3.	30.	12600	8.	40.	31200
0.	9.	540	3.	40.	13200	8.	50.	31800
0.	10.	600	3.	50.	13800	9.	0.	32400
0.	11.	660	4.	0.	14400	9.	10.	33000
0.	12.	720	4.	10.	15000	9.	20.	33600
0.	13.	780	4.	20.	15600	9.	30.	34200
0.	14.	840	4.	30.	16200	9.	40.	34800
0.	15.	900	4.	40.	16800	9.	50.	35400
0.	16.	960	4.	50.	17400	10.	0.	36000
0.	17.	1020	5.	0.	18000	10.	10.	36600
0.	18.	1080	5.	10.	18600	10.	20.	37200
0.	19.	1140	5.	20.	19200	10.	30.	37800
0.	20.	1200	5.	30.	19800	10.	40.	38400
0.	30.	1800	5.	40.	20400	10.	50.	39000
0.	40.	2400	5.	50.	21000	11.	0.	39600
0.	50.	3000	6.	0.	21600	11.	10.	40200
1.	0.	3600	6.	10.	22200	11.	20.	40800
1.	10.	4200	6.	20.	22800	11.	30.	41400
1.	20.	4800	6.	30.	23400	11.	40.	42000
1.	30.	5400	6.	40.	24000	11.	50.	42600
1.	40.	6000	6.	50.	24600	12.	0.	43200
1.	50.	6600	7.	0.	25200	12.	10.	43800
2.	0.	7200	7.	10.	25800	12.	20.	44400
2.	10.	7800	7.	20.	26400	12.	30.	45000

Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.	Deg.	Min.	Sec.
12.	40.	45600	18.	10.	65400	23.	40.	85200
12.	50.	46200	18.	20.	66000	23.	50.	85800
13.	0.	46800	18.	30.	66600	24.	0.	86400
13.	10.	47400	18.	40.	67200	24.	10.	87000
13.	20.	48000	18.	50.	67800	24.	20.	87600
13.	30.	48600	19.	0.	68400	24.	30.	88200
13.	40.	49200	19.	10.	69000	24.	40.	88800
13.	50.	49800	19.	20.	69600	24.	50.	89400
14.	0.	50400	19.	30.	70200	25.	0.	90000
14.	10.	51000	19.	40.	70800	25.	10.	90600
14.	20.	51600	19.	50.	71400	25.	20.	91200
14.	30.	52200	20.	0.	72000	25.	30.	91800
14.	40.	52800	20.	10.	72600	25.	40.	92400
14.	50.	53400	20.	20.	73200	25.	50.	93000
15.	0.	54000	20.	30.	73800	26.	0.	93600
15.	10.	54600	20.	40.	74400	26.	10.	94200
15.	20.	55200	20.	50.	75000	26.	20.	94800
15.	30.	55800	21.	0.	75600	26.	30.	95400
15.	40.	56400	21.	10.	76200	26.	40.	96000
15.	50.	57000	21.	20.	76800	26.	50.	96600
16.	0.	57600	21.	30.	77400	27.	0.	97200
16.	10.	58200	21.	40.	78000	27.	10.	97800
16.	20.	58800	21.	50.	78600	27.	20.	98400
16.	30.	59400	22.	0.	79200	27.	30.	99000
16.	40.	60000	22.	10.	79800	27.	40.	99600
16.	50.	60600	22.	20.	80400	27.	50.	100200
17.	0.	61200	22.	30.	81000	28.	0.	100800
17.	10.	61800	22.	40.	81600	28.	10.	101400
17.	20.	62400	22.	50.	82200	28.	20.	102000
17.	30.	63000	23.	0.	82800	28.	30.	102600
17.	40.	63600	23.	10.	83400	28.	40.	103200
17.	50.	64200	23.	20.	84000	28.	50.	103800
18.	0.	64800	23.	30.	84600	29.	0.	104400

Fig. 3. (34.) Nous obſerverons que l'arc $m'P = mP - mm'$; l'arc mP eſt le complément de la latitude corrigée du lieu M; & l'arc $m\,m'$ eſt l'arc que nous avons nommé k: donc

$$(1)\ m'P = \text{complément (latitude corrigée du lieu } M) - k.$$

Cette dernière équation va ſervir à réſoudre la queſtion propoſée. Nous remarquerons enfin que le complément de la latitude corrigée du lieu M, dépend du rapport des axes de la Terre.

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178, & que l'on parte de l'Obſervatoire de Paris, l'on aura

Complément (latitude corrigée du lieu M) $= 41^d\ 19'\ 22''$.

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201, l'on aura

Complément (latitude corrigée du lieu M) $= 41^d\ 18'\ 17''$.

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230, l'on aura

Complément (latitude corrigée du lieu M) $= 41^d\ 17'\ 11''$.

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300, l'on aura

Complément (latitude corrigée du lieu M) $= 41^d\ 15'\ 27''$

Si l'on ſuppoſe les axes de la Terre dans le rapport d'égalité,

Complément (latitude du lieu M)...... $= 41^d\ 9'\ 46''$.

Nous pouvons maintenant réſoudre la queſtion propoſée. Cette queſtion ſe ſubdiviſe en deux autres. En effet, étant donné en degrés l'arc $m'P$ de la ſphère inſcrite, on peut demander le nombre de toiſes que contient l'arc MM' ſur le ſphéroïde. Étant donné le nombre de toiſes que contient l'arc MM' ſur le ſphéroïde, on peut demander en degrés la valeur de l'arc $m'P$ de la ſphère inſcrite.

Étant donné en degrés l'arc m′P *de la ſphère inſcrite; déterminer en toiſes l'arc* MM′ *du ſphéroïde.* Fig. 3.

(35.) Cette première queſtion ne préſente aucune difficulté; en effet, puiſque l'on connoît la valeur de l'arc $m'P$ en degrés, l'équation (1) du *§. 34*, donnera tout de ſuite la valeur de k; on conclura enſuite la valeur de K en degrés de la ſphère inſcrite, au moyen de l'équation (2) du *§. 28*; on conclura enfin la valeur de K en toiſes, au moyen de l'équation (2) du *§. 32*. Je ne donnerai point d'exemple de ce calcul, qui ne préſente aucune difficulté.

Étant donné le nombre de toiſes que contient l'arc MM′; *déterminer l'arc* m′P *de la ſphère inſcrite.*

(36.) Cette ſeconde queſtion, qui eſt celle dont on a le plus généralement beſoin, préſente plus de difficulté. En effet, lorſque l'on connoît le nombre T de toiſes que contient l'arc K, il eſt facile d'avoir l'expreſſion de cet arc en degrés de la ſphère inſcrite, au moyen de l'équation (2) du *§. 32*; mais il n'eſt pas auſſi facile de déduire la valeur de k de celle de K, au moyen de l'équation (2) du *§. 28*; car dans cette équation les ſinus & coſinus de l'arc inconnu ſont mêlés avec l'arc, d'une manière qu'il ne ſeroit peut-être pas aiſé de démêler. Heureuſement, les circonſtances du Problème permettent d'employer une méthode ſimple, & auſſi exacte dans la pratique, que la ſolution rigoureuſe.

Pour me faire entendre, je remarque que dans l'équation (2) du *§. 28*, les quantités $\frac{k}{2}$, $\operatorname{coſ.}(2a + k)\ \operatorname{ſin.} k$, ſont multipliées par la fraction $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}$: il n'eſt donc pas abſolument néceſſaire de connoître ces quantités avec la dernière exactitude, pour avoir avec préciſion la correction donnée par le terme $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265''\ \operatorname{coſ.}(2a + k)\ \operatorname{ſin.} k}{2r^2}\right]$; il ſuffit d'avoir une connoiſſance approchée de la valeur de k;

Fig. 3. & l'on peut ſuppoſer dans ce terme $k = K$. L'équation (2) du ſ. 28 deviendra alors

$$(1)\ k = K - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{K}{2} - \frac{206265''\,\text{cof.}\,(2a + K) \times \text{fin.}\,K}{2\,r^2}\right],$$

& cette équation ſera vraie aux quantités près de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$.

(37.) Nous remarquerons ici que l'arc $m'P$ eſt le complément de la latitude corrigée du point M' du Méridien elliptique, où ce Méridien eſt coupé par la perpendiculaire à la Méridienne. Si donc on vouloit conclure la latitude vraie de cette interſection, d'après la connoiſſance de l'arc MM' en toiſes; on déterminera d'abord l'arc $m'P$, comme il a été dit ci-deſſus; on connoîtra alors la latitude corrigée du point m', d'où l'on conclura ſa latitude vraie, au moyen des Tables du ſ. 20. Paſſons à un Exemple.

EXEMPLE.

(38.) *On ſuppoſe qu'une perpendiculaire à la Méridienne, rencontre le Méridien de Paris, en un point* M', *éloigné du point* M *qui repréſente Paris, de 14823 toiſes du côté du Midi ; on demande l'arc* m'P *de la ſphère inſcrite, compris entre le pôle* P *& le point* m', *projection du point* M', *en ſuppoſant d'ailleurs les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.*

SOLUTION. Puiſque le point M' eſt plus méridional que Paris, K eſt négatif; d'ailleurs, dans l'équation (2) du ſ. 32, $T = 14823$ toiſes, & $\theta = 56837$ toiſes; donc $K = -15'\,39''$; de plus $a = 48^d\,40'\,38''$; donc $\frac{K}{2} = -469'',5$; $2a + K = 97^d\,5'\,37''$;

$$-\frac{206265''\,\text{cof.}\,(2a + K) \times \text{fin.}\,K}{2\,r^2} = -58'';$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{K}{2} - \frac{206265''\,\text{cof.}\,(2a+K) \times \text{fin.}\,K}{2\,r^2}\right] = -\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}(-469'',5 - 58'') = 3''.$$

Donc $k = -15'\,39'' + 3'' = -15'\,36''$; donc $m'P = 41^d\,19'\,22'' + 15'\,36'' = 41^d\,34'\,58''$.

On peut

On peut conclure de ces calculs, conformément à la remarque du §. 37, que la latitude corrigée du point m' eſt de $48^d\ 25'\ 2''$, & que par conſéquent la perpendiculaire dont il s'agit, coupe la Méridienne de Paris, ſous le parallèle vrai de $48^d\ 34'\ 39''$.

(39) Par de ſemblables calculs, on trouvera les valeurs ſuivantes pour le cas particulier dont il s'agit.

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

$$m'P = 41^d\ 34'\ 58''.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

$$m'P = 41^d\ 33'\ 52''.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

$$m'P = 41^d\ 32'\ 46''.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

$$m'P = 41^d\ 31'\ 1''.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.

$$m'P = 41^d\ 25'\ 21''.$$

(40.) Quelque facile qu'il ſoit d'exécuter dans tous les cas, les calculs preſcrits, il eſt cependant poſſible d'éviter cette première opération, au moyen des Tables par leſquelles je terminerai cette ſection. On aura par-là très-facilement, les valeurs de $m'P$ correſpondantes au nombre de toiſes compriſes depuis l'Obſervatoire de Paris juſqu'au pied de la perpendiculaire dans le ſphéroïde; mais je dois auparavant eſtimer l'erreur des termes négligés dans la formule du §. 28.

Cette recherche ſera voir la préciſion de la formule, & combien peu de changement l'introduction des termes de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$ apporteroit dans les réſultats.

Estimation de l'erreur des termes négligés dans les formules des §. 27 & 28.

(41.) Il est facile d'apprécier l'erreur des formules des *§. 27* & *28.* Nous avons vu en effet, que si l'on vouloit pousser l'exactitude des calculs, à la précision des termes de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$, l'équation (12) du *§. 24* auroit la forme suivante,

$$(1)\ K + \text{const.} = k + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(r^2-x^2)}} - \tfrac{1}{8}\,\frac{\Delta^4}{r^4}\int\frac{x^4\,dx}{r^3\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

Nous avons vu également *(§. 25)* que

$$\int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(r^2-x^2)}} = \tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{r};$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{r^3\sqrt{(r^2-x^2)}} = \tfrac{3}{4}\int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(r^2-x^2)}} - \tfrac{1}{4}\,\frac{x^3\sqrt{(r^2-x^2)}}{r^3}.$$

De plus,

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{r} = \tfrac{1}{4}\,\text{fin. } 2X;$$

$$\tfrac{1}{4}\,\frac{x^3\sqrt{(r^2-x^2)}}{r^3} = \tfrac{1}{16}\,\text{fin. } 2X - \tfrac{1}{32}\,\text{fin. } 4X.$$

Si donc l'on ajoute convenablement la constante, ainsi qu'il a été pratiqué dans les *§. 27* & *28*, & que l'on conserve toutes les dénominations de ces paragraphes, l'on aura

$$(2)\ k - K + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265''\,\text{cof.}\,(2a+k)\,\text{fin. } k}{2r^2}\right]$$
$$- \tfrac{3}{32}\,\frac{\Delta^4}{r^4}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265''\,\text{cof.}\,(2a+k)\,\text{fin. } k}{2r^2}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{32}\,\frac{\Delta^4}{r^4}\left\{206265''\left[\frac{(\text{cof.}\,2a+k)\,\text{fin. } k}{2r^2} - \tfrac{1}{2}\text{cof.}\,\frac{(4a+2k)\,\text{fin. } 2k}{2r^2}\right]\right\} = 0.$$

(42.) Dans les calculs des paragraphes précédens, nous avons négligé les termes multipliés par $\frac{\Delta^4}{r^4}$, c'est-à-dire,

la quantité

$$\frac{\Delta^4}{16 r^4}\left[-\frac{3}{4}k + 206265'' \frac{\text{cos.}\,(2a+k)\,\text{sin.}\,k}{r^2} - 206265'' \frac{\text{cos.}\,(4a+2k)\,\text{sin.}\,2k}{8r^2}\right].$$

Il sera donc toujours facile de déterminer l'erreur de la méthode; mais il est évident que cette erreur ne peut être qu'infiniment petite. Si l'on supposoit, par exemple, $k = 360^d$; à cause de $k = 360^d$, sin. $k = 0$, sin. $2k = 0$, on aura pour expression de l'erreur, $\frac{3}{4}\frac{\Delta^4}{r^4}$ arc $22^d 30' = 7'',7$.

(43.) Puisque l'erreur sur un arc de 360^d n'est que d'environ 8″, & que cette erreur est à peu-près proportionnelle à la grandeur de l'arc, on voit que pour un arc de 90^d, l'erreur ne seroit que de 2″. Nous avons donc eu raison d'avancer que cette erreur peut être négligée dans tous les calculs.

Au reste, si l'on vouloit avoir les circonstances précises où la quantité que l'on néglige, est la plus grande, on différencieroit l'expression du *§. 42*, & l'on auroit pour condition

$$(1)\quad -\frac{3}{4}r + \text{cos.}\,(2a+2k) - \frac{1}{4}\text{cos.}\,(4a+4k) = 0.$$

Construction des TABLES *annoncées dans le* §. 40.

(44.) Ces Tables contiendront pour chacune des hypothèses d'excentricité de la Terre, les valeurs de l'arc $m'P$ correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris, jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde. Ces Tables seront calculées de 10 en 10 minutes, en commençant au 34.ᵉ degré de latitude, & en finissant au 53.ᵉ degré 30 minutes. On n'oubliera pas que par l'arc $m'P$ nous entendons l'arc compris sur la sphère inscrite, entre le pôle & la projection de l'intersection de la Méridienne de Paris, & de la perpendiculaire à cette Méridienne.

TABLE des valeurs de m′P, *correſpondantes au nombre de toiſes compriſes depuis Paris juſqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, paſſant par le lieu pour lequel on calcule.*

(On ſuppoſe le rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.)

VALEURS de *m′P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10′ de variation de *m′P.*
D. M.	*Toiſes.*	*Toiſes.*
36. 30	275051	
36. 40	265544	9507
36. 50	256037	
37. 0	246530	
37. 10	237023	
37. 20	227516	9507
37. 30	218009	
37. 40	208502	
37. 50	198995	
38. 0	189489	
38. 10	179983	
38. 20	170478	9506
38. 30	160973	
38. 40	151468	
38. 50	141963	
39. 0	132458	
39. 10	122953	
39. 20	113448	
39. 30	103943	9505
39. 40	94438	
39. 50	84933	
40. 0	75428	
40. 10	65924	
40. 20	56420	
40. 30	46916	9504
40. 40	37412	
40. 50	27908	
41. 0	18404	
41. 10	8900	9503
41ᵈ 19′ 22″	0	

(Au Nord de la perpendiculaire paſſant par Paris.)

VALEURS de *m′P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10′ de variation de *m′P.*
D. M.	*Toiſes.*	*Toiſes.*
41ᵈ 19′ 22″	0	
41. 20	602	
41. 30	10105	9503
41. 40	19608	
41. 50	29111	
42. 0	38613	
42. 10	48115	
42. 20	57617	
42. 30	67119	9502
42. 40	76621	
42. 50	86123	
43. 0	95625	
43. 10	105127	
43. 20	114629	9501
43. 30	124130	
43. 40	133631	
43. 50	143132	
44. 0	152633	
44. 10	162133	
44. 20	171633	
44. 30	181133	9500
44. 40	190633	
44. 50	200133	
45. 0	209633	
45. 10	219133	
45. 20	228632	
45. 30	238131	9499
45. 40	247630	
45. 50	257129	

(Au Midi de la perpendiculaire paſſant par Paris.)

VALEURS de $m'P$	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10'. de variation de $m'P$.	VALEURS de $m'P$.	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de $m'P$.
D. M.	Toises.	Toises.	D. M.	Toises.	Toises.
46. 0	266628	9498	51. 0	551516	9493
46. 10	276126		51. 10	561009	
46. 20	285624		51. 20	570502	
46. 30	295122		51. 30	579995	
46. 40	304620		51. 40	589488	
46. 50	314118		51. 50	598981	
47. 0	323616	9497	52. 0	608474	9493
47. 10	333114		52. 10	617967	
47. 20	342612		52. 20	627460	
47. 30	352109		52. 30	636953	
47. 40	361606		52. 40	646446	
47. 50	371103		52. 50	655939	
48. 0	380600	9496	53. 0	665432	9492
48. 10	390097		53. 10	674924	
48. 20	399594		53. 20	684416	
48. 30	409090		53. 30	693908	
48. 40	418586		53. 40	703400	
48. 50	428082		53. 50	712892	
49. 0	437578	9495	54. 0	722384	9492
49. 10	447074		54. 10	731876	
49. 20	456570		54. 20	741368	
49. 30	466066		54. 30	750860	
49. 40	475562		54. 40	760351	
49. 50	485057		54. 50	769842	
50. 0	494552	9494	55. 0	779333	9491
50. 10	504046		55. 10	788824	
50. 20	513540		55. 20	798315	
50. 30	523034		55. 30	807806	
50. 40	532528		55. 40	817296	
50. 50	542022		55. 50	826786	
			56. 0	836276	

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

TABLE des valeurs de m'P, *correſpondantes au nombre de toiſes compriſes depuis Paris juſqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, paſſant par le lieu pour lequel on calcule.*

(On ſuppoſe le rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.)

VALEURS de *m'P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.*	VALEURS de *m'P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.*
D. M.	*Toiſes.*	*Toiſes.*	*D. M.*	*Toiſes.*	*Toiſes.*
36. 30	274037	9507	41ᵈ 18′ 17″	0	9504
36. 40	264530		41. 20	1632	
36. 50	255023		41. 30	11136	
37. 0	245516	9507	41. 40	20640	
37. 10	236009		41. 50	30144	
37. 20	226502		42. 0	39647	9503
37. 30	216995		42. 10	49150	
37. 40	207488		42. 20	58653	
37. 50	197982		42. 30	68156	
38. 0	188476	9506	42. 40	77659	
38. 10	178970		42. 50	87162	
38. 20	169464		43. 0	96665	9502
38. 30	159958		43. 10	106167	
38. 40	150452		43. 20	115669	
38. 50	140946		43. 30	125171	
39. 0	131440	9506	43. 40	134673	
39. 10	121934		43. 50	144175	
39. 20	112428		44. 0	153677	9502
39. 30	102922		44. 10	163179	
39. 40	93416		44. 20	172681	
39. 50	83910		44. 30	182183	
40. 0	74404	9505	44. 40	191685	
40. 10	64899		44. 50	201186	
40. 20	55394		45. 0	210687	9501
40. 30	45889		45. 10	220188	
40. 40	36384		45. 20	229689	
40. 50	26880		45. 30	239190	
41. 0	17376	9504	45. 40	248691	
41. 10	7872		45. 50	258192	
41ᵈ 18′ 17″	0				

Au Nord de la perpendiculaire passant par Paris.

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

VALEURS de $m'P$.	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10′ de variation de $m'P$.	VALEURS de $m'P$.	DISTANCES sur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10′ de variation de $m'P$.
D. M.	Toises.	Toises.	D. M.	Toises.	Toises.
46. 0	267692		51. 0	552630	
46. 10	277192		51. 10	562126	
46. 20	286692	9500	51. 20	571622	9496
46. 30	296192		51. 30	581118	
46. 40	305692		51. 40	590613	
46. 50	315191		51. 50	600108	
47. 0	324690		52. 0	609603	
47. 10	334189		52. 10	619098	
47. 20	343688	9499	52. 20	628593	9495
47. 30	353187		52. 30	638088	
47. 40	362686		52. 40	647583	
47. 50	372185		52. 50	657078	
48. 0	381684		53. 0	666573	
48. 10	391182		53. 10	676068	
42. 20	400680		53. 20	685563	
48. 30	410178	9498	53. 30	695057	9494
48. 40	419676		53. 40	704551	
48. 50	429174		53. 50	714045	
49. 0	438672		54. 0	723539	
49. 10	448169		54. 10	733033	
49. 20	457666		54. 20	742526	
49. 30	467163	9497	54. 30	752020	9493
49. 40	476660		54. 40	761513	
49. 50	486157		54. 50	771006	
50. 0	495654		55. 0	780499	
50. 10	505150		55. 10	789992	
50. 20	514646		55. 20	799485	
50. 30	524142	9496	55. 30	808977	9492
50. 40	533638		55. 40	818469	
50. 50	543134		55. 50	827961	
			56. 0	837453	

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

TABLE des valeurs de m'P, *correſpondantes au nombre de toiſes compriſes depuis Paris juſqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, paſſant par le lieu pour lequel on calcule.*

(On ſuppoſe le rapport des axes de la Terre, comme 229 a 230.)

VALEURS de *m'P.* D. M.	DISTANCES ſur la Méridienne. Toiſes.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.* Toiſes.
36. 30	272993	
36. 40	263485	9508
36. 50	253978	
37. 0	244471	
37. 10	234964	
37. 20	225457	9507
37. 30	215950	
37. 40	206443	
37. 50	196936	
38. 0	187429	
38. 10	177923	
38. 20	168417	9506
38. 30	158911	
38. 40	149405	
38. 50	139899	
39. 0	130393	
39. 10	120887	
39. 20	111381	9505
39. 30	101875	
39. 40	92369	
39. 50	82864	
40. 0	73359	
40. 10	63854	
40. 20	54349	9504
40. 30	44844	
40. 40	35340	
40. 50	25836	
41. 0	16332	
41. 10	6828	9504
41d 17' 11"	0	

(Au Nord de la perpendiculaire paſſant par Paris.)

VALEURS de *m'P.* D. M.	DISTANCES ſur la Méridienne. Toiſes.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.* Toiſes.
41d 17' 11"	0	
41. 20	2676	
41. 30	12180	9504
41. 40	21684	
41. 50	31188	
42. 0	40692	
42. 10	50195	
42. 20	59698	9503
42. 30	69201	
42. 40	78704	
42. 50	88207	
43. 0	97710	
43. 10	107213	
43. 20	116716	9503
43. 30	126219	
43. 40	135722	
43. 50	145225	
44. 0	154728	
44. 10	164230	
44. 20	173732	9502
44. 30	183234	
44. 40	192736	
44. 50	202238	
45. 0	211740	
45. 10	221242	
45. 20	230743	9501
45. 30	240244	
45. 40	249745	
45. 50	259246	

(Au Midi de la perpendiculaire paſſant par Paris.)

VALEURS

Valeurs de m'P	Distances sur la Méridienne.	Différ. pour 10' de variation de m'P.	Valeurs de m'P.	Distances sur la Méridienne.	Différ. pour 10' de variation de m'P.
D. M.	*Toises.*	*Toises.*	*D. M.*	*Toises.*	*Toises.*
46. 0	268747	9500	51. 0	553718	9497
46. 10	278248		51. 10	563210	
46. 20	287749		51. 20	572707	
46. 30	297250		51. 30	582204	
46. 40	306750		51. 40	591701	
46. 50	316250		51. 50	601198	
47. 0	325750	9500	52. 0	610695	9496
47. 10	335250		52. 10	620191	
47. 20	344750		52. 20	629687	
47. 30	354250		52. 30	639183	
47. 40	363750		52. 40	648679	
47. 50	373250		52. 50	658175	
48. 0	382750	9499	53. 0	667671	9495
48. 10	392249		53. 10	677167	
48. 20	401748		53. 20	686663	
48. 30	411247		53. 30	696158	
48. 40	420746		53. 40	705653	
48. 50	430245		53. 50	715148	
49. 0	439743	9498	54. 0	724643	9495
49. 10	449241		54. 10	734138	
49. 20	458739		54. 20	743633	
49. 30	468237		54. 30	753128	
49. 40	477735		54. 40	762623	
49. 50	487233		54. 50	772118	
50. 0	496731	9497	55. 0	781613	9494
50. 10	506228		55. 10	791108	
50. 20	515725		55. 20	800603	
50. 30	525222		55. 30	810097	
50. 40	534719		55. 40	819591	
50. 50	544216		55. 50	829085	
			56. 0	838579	

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

TABLE des valeurs de m'P, *correſpondantes au nombre de toiſes compriſes depuis Paris juſqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, paſſant par le lieu pour lequel on calcule.*

(On ſuppoſe le rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.)

VALEURS de *m'P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.*
D. M.	*Toiſes.*	*Toiſes.*
36. 30	271406	
36. 40	261897	9509
36. 50	252388	
37. 0	242879	
37. 10	233370	
37. 20	223861	
37. 30	214352	9509
37. 40	204843	
37. 50	195334	
38. 0	185825	
38. 10	176317	
38. 20	166809	
38. 30	157301	9508
38. 40	147793	
38. 50	138285	
39. 0	128777	
39. 10	119269	
39. 20	109761	
39. 30	100253	9508
39. 40	90745	
39. 50	81237	
40. 0	71729	
40. 10	62222	
40. 20	52715	
40. 30	43209	9507
40. 40	33702	
40. 50	24195	
41. 0	14688	
41. 10	5181	9507
41d 15' 27"	0	

Au Nord de la perpendiculaire paſſant par Paris.

VALEURS de *m'P.*	DISTANCES ſur la Méridienne.	DIFFÉR. pour 10' de variation de *m'P.*
D. M.	*Toiſes.*	*Toiſes.*
41d 15' 27"	0	
41. 20	4326	
41. 30	13833	9507
41. 40	23339	
41. 50	32845	
42. 0	42351	
42. 10	51857	
42. 20	61363	
42. 30	70869	9506
42. 40	80375	
42. 50	89881	
43. 0	99387	
43. 10	108893	
43. 20	118399	
43. 30	127905	9506
43. 40	137411	
43. 50	146916	
44. 0	156421	
44. 10	165926	
44. 20	175431	
44. 30	184936	9505
44. 40	194441	
44. 50	203946	
45. 0	213451	
45. 10	222956	
45. 20	232461	
45. 30	241965	9505
45. 40	251469	
45. 50	260973	

Au Midi de la perpendiculaire paſſant par Paris.

Valeurs de $m'P$.		Distances sur la Méridienne.	Différ. pour 10′ de variation de $m'P$.	Valeurs de $m'P$.		Distances sur la Méridienne.	Différ. pour 10′ de variation de $m'P$.
D.	*M.*	*Toises.*	*Toises.*	*D.*	*M.*	*Toises.*	*Toises.*
46.	0	270477	9504	51.	0	555559	9501
46.	10	279981		51.	10	565061	
46.	20	289485		51.	20	574563	
46.	30	298989		51.	30	584064	
46.	40	308493		51.	40	593565	
46.	50	317997		51.	50	603066	
47.	0	327500	9503	52.	0	612567	9501
47.	10	337003		52.	10	622068	
47.	20	346506		52.	20	631569	
47.	30	356009		52.	30	641070	
47.	40	365512		52.	40	650571	
47.	50	375015		52.	50	660072	
48.	0	384518	9503	53.	0	669573	9501
48.	10	394021		53.	10	679074	
48.	20	403524		53.	20	688575	
48.	30	413027		53.	30	698076	
48.	40	422530		53.	40	707577	
48.	50	432033		53.	50	717078	
49.	0	441535	9502	54.	0	726578	9500
49.	10	451037		54.	10	736078	
49.	20	460539		54.	20	745578	
49.	30	470041		54.	30	755078	
49.	40	479543		54.	40	764578	
49.	50	489045		54.	50	774078	
50.	0	498547	9502	55.	0	783578	9500
50.	10	508049		55.	10	793078	
50.	20	517551		55.	20	802578	
50.	30	527053		55.	30	812078	
50.	40	536555		55.	40	821578	
50.	50	546057		55.	50	831078	
				56.	0	840578	

Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.

TABLE des valeurs de m'P, *correspondantes au nombre de toises comprises depuis Paris jusqu'au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, passant par le lieu pour lequel on calcule.*

(On suppose la Terre sphérique.)

VALEURS de *m'P.* D. M.	DISTANCES sur la Méridienne. *Toises.*	VALEURS de *m'P.* D. M.	DISTANCES sur la Méridienne. *Toises.*
36. 30	266123	41d 9' 46"	0
36. 40	256611	41. 10	222
36. 50	247098	41. 20	9734
37. 0	237586	41. 30	19247
37. 10	228074	41. 40	28759
37. 20	218561	41. 50	38271
37. 30	209049	42. 0	47784
37. 40	199537	42. 10	57296
37. 50	190024	42. 20	66808
38. 0	180512	42. 30	76321
38. 10	171000	42. 40	85833
38. 20	161487	42. 50	95345
38. 30	151975	43. 0	104858
38. 40	142463	43. 10	114370
38. 50	132950	43. 20	123882
39. 0	123438	43. 30	133395
39. 10	113926	43. 40	142907
39. 20	104413	43. 50	152419
39. 30	94901	44. 0	161932
39. 40	85389	44. 10	171444
39. 50	75876	44. 20	180956
40. 0	66364	44. 30	190469
40. 10	56852	44. 40	199981
40. 20	47339	44. 50	209493
40. 30	37827	45. 0	219006
40. 40	28315	45. 10	228518
40. 50	18802	45. 20	238030
41. 0	9290	45. 30	247543
41d 9' 46"	0	45. 40	257055
		45. 50	266567

(Left distances: Au Nord de la perpendiculaire passant par Paris. Right distances: Au Midi de la perpendiculaire passant par Paris.)

Valeurs de $m'P$.	Distances sur la Méridienne.		Valeurs de $m'P$.	Distances sur la Méridienne.	
D. M.	Toises.		D. M.	Toises.	
46. 0	276080		51. 0	561450	
46. 10	285592		51. 10	570962	
46. 20	295104	Au Midi	51. 20	580474	Au Midi
46. 30	304617		51. 30	589986	
46. 40	314129		51. 40	599499	
46. 50	323640		51. 50	609011	
47. 0	333154		52. 0	618524	
47. 10	342666		52. 10	628036	
47. 20	352178	de la	52. 20	637548	de la
47. 30	361691		52. 30	647060	
47. 40	371203		52. 40	656573	
47. 50	380715		52. 50	666085	
48. 0	390228		53. 0	675598	
48. 10	399740		53. 10	685110	
48. 20	409252	perpendiculaire	53. 20	694622	perpendiculaire
48. 30	418765		53. 30	704134	
48. 40	428277		53. 40	713647	
48. 50	437789		53. 50	723159	
49. 0	447302		54. 0	732672	
49. 10	456814		54. 10	742184	
49. 20	466326	passant par	54. 20	751696	passant par
49. 30	475839		54. 30	761208	
49. 40	485351		54. 40	770721	
49. 50	494863		54. 50	780233	
50. 0	504376		55. 0	789746	
50. 10	513888		55. 10	799258	
50. 20	523400	Paris.	55. 20	808770	Paris.
50. 30	532912		55. 30	818283	
50. 40	542425		55. 40	827795	
50. 50	551937		55. 50	837307	
			56. 0	846820	

Dans cette Table, le nombre de toises correspondantes à 10′ de variation de $m'P$, est constamment de 9512,3.

(45.) Au moyen des Tables précédentes, il eſt facile de déterminer la valeur de $m'P$ correſpondante à une diſtance donnée de l'Obſervatoire de Paris, au pied de la perpendiculaire à la Méridienne, paſſant par un lieu quelconque; & réciproquement. Prenons l'exemple du *§. 38.* Suivant la ſuppoſition, la diſtance ſur la Méridienne eſt de 14823 toiſes du côté du Midi; je cherche dans la première Table du *§. 44,* la valeur de $m'P$ correſpondante à ce nombre de toiſes; je vois que cette valeur eſt entre $41^d 30'$ & $41^d 40'$; je vois de plus, que la différence de la diſtance ſur la Méridienne, correſpondante à 10 minutes de variation de $m'P$, eſt de 9503 toiſes entre $41^d 30'$ & $41^d 40'$. Je prends la différence entre le nombre 14823 donné & le nombre 10105 qui répond à $41^d 30'$; cette différence eſt de 4718 toiſes; je fais donc la proportion ſuivante; 9503 eſt à $600''$ comme 4718 eſt à un quatrième terme; c'eſt le nombre de ſecondes qu'il faut ajouter à $41^d 30'$, pour avoir la valeur de $m'P$ cherchée; & j'ai $m'P = 41^d 30' + 4' 58'' = 41^d 34' 58''$, comme dans le *§. 38.*

SIXIÈME SECTION.

Détermination du rapport entre la perpendiculaire à la Méridienne ſur le ſphéroïde, & la perpendiculaire corrigée ſur la ſphère inſcrite.

(46.) Je dois maintenant, pour ſuivre l'ordre de mes recherches, déterminer la valeur de la perpendiculaire corrigée ſur la ſphère inſcrite. On peut voir dans le *§. 16,* la définition de cette perpendiculaire, & l'influence qu'elle a ſur la ſolution du Problème. Comme ce n'eſt pas cette quantité qui eſt donnée immédiatement par les meſures géodéſiques, mais la perpendiculaire ſur le ſphéroïde, il s'agit de déterminer le rapport entre ces deux perpendiculaires.

(47.) Pour y parvenir, soit

x l'abscisse commune à l'ellipse génératrice du sphéroïde & au cercle générateur de la sphère inscrite ; Y l'ordonnée à l'ellipse ; y l'ordonnée correspondante du cercle inscrit ;	je suppose que l'origine des coordonnées est au centre commun du cercle & de l'ellipse.

r le demi-petit axe de la Terre ;

ρ le demi-grand axe ;

u l'angle des différens Méridiens du sphéroïde avec le Méridien du lieu M;

v l'angle des différens Méridiens de la sphère inscrite avec la Méridienne corrigée du lieu M;

Y' l'ordonnée particulière à l'ellipse, au point où la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde rencontre le Méridien du lieu M;

y' l'ordonnée particulière du cercle inscrit, au point où la perpendiculaire corrigée rencontre le Méridien corrigé du lieu M;

x' l'abscisse du cercle inscrit correspondant au même point ;

P le périmètre de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde ;

p le périmètre de la perpendiculaire corrigée sur la sphère ;

$\Delta^2 = \rho^2 - r^2$.

Nous avons vu précédemment, que l'on avoit pour équation à la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(1)\ Y^2 du - Y' \sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)} = 0;$$

pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite,

$$(2)\ y^2 dv - y' \sqrt{(y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2)} = 0;$$

pour équation à l'ellipse génératrice du sphéroïde,

$$(3)\ \rho^2 x^2 + r^2 Y^2 - r^2 \rho^2 = 0;$$

pour équation au cercle générateur de la sphère inscrite,

$$(4)\ x^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

pour expression du périmètre de la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(5)\ dP = \frac{\sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)}}{r};$$

pour expreſſion du périmètre de la perpendiculaire corrigée ſur la ſphère inſcrite,

$$(6)\quad dp = \frac{\sqrt{(y^2 dv^2 + r^2 dx^2 + r^2 dy^2)}}{r}.$$

De plus, à cauſe des propriétés de l'ellipſe & du cercle inſcrit,

$$(7)\quad \rho y - rY = 0;$$
$$(8)\quad \rho y' - rY' = 0;$$
$$(9)\quad \rho dy - rdY = 0;$$
$$(10)\quad xdx + ydy = 0.$$

(48.) Si dans les équations (5) & (6) du *paragraphe précédent*, l'on ſubſtitue à $Y^2 du^2$ & à $y^2 dv^2$, leurs valeurs tirées des équations (1) & (2), l'on aura

$$(1)\quad dP = -\frac{Y\sqrt{(dx^2 + dY^2)}}{\sqrt{(Y^2 - Y'^2)}};$$

$$(2)\quad dp = -\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}} = -\frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}};$$

en ſuppoſant d'ailleurs,

$$(3)\quad dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Dans les équations (1) & (2), nous avons donné à dP & à dp le ſigne *moins*, parce que, par la nature de la queſtion, les périmètres des perpendiculaires à la Méridienne, ſoit ſur le ſphéroïde, ſoit ſur la ſphère inſcrite, croiſſent à meſure que les arcs qui ont reſpectivement pour différentielles $\sqrt{(dx^2 + dY^2)}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, vont en décroiſſant.

Je remarque maintenant, qu'à cauſe des équations (7) & (8) du *paragraphe précédent*, l'équation (1) du préſent paragraphe peut avoir la forme ſuivante,

$$(4)\quad dP = -\frac{y\sqrt{(dx^2 + \frac{\rho^2 dy^2}{r^2})}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}},$$

ou à cauſe de $\rho^2 = r^2 + \Delta^2$,

$$(5)\quad dP = -\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}},$$

ou enfin

ou enfin

$$(6)\ dP = -\frac{y}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}\sqrt{(dk^2+\frac{\Delta^2}{r^2}dy^2)}.$$

Dans l'expreſſion précédente, je réduis $\sqrt{(dk^2+\frac{\Delta^2}{r^2}dy^2)}$ en ſérie, & j'ai

$$(7)\ dP = -\frac{y}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}\left(dk+\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\frac{dy}{dk}dy-\tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\frac{dy^3}{dk^3}dy+\&c.\right).$$

Je remarque d'abord, que $-\frac{y\,dk}{\sqrt{(y^2-y'^2)}} = dp$: de plus, $\frac{dy}{dk} = -\frac{x}{r}$. L'équation (7) peut donc être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(8)\ dP = dp + \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\frac{x}{r}-\tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\frac{x^3}{r^3}+\&c.\right);$$

mais $y\,dy = -x\,dx$, & d'ailleurs, $\sqrt{(y^2-y'^2)} = \sqrt{(x'^2-x^2)}$; donc

$$(9)\ dP = dp-\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\times\frac{x^2dx}{r\sqrt{(x'^2-x^2)}}+\tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\times\frac{x^4dx}{r^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}-\&c.$$

Donc, en intégrant

$$(10)\ P+\text{conſt.} = p-\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\int\frac{x^2dx}{r\sqrt{(x'^2-x^2)}}+\tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4}{r^4}\int\frac{x^4dx}{r^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}-\&c.$$

ou enfin,

$$(11)\ P+\text{conſt.} = p-\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2x'}{r^3}\int\frac{x^2dx}{x'\sqrt{(x'^2-x^2)}}+\tfrac{1}{8}\frac{\Delta^4x'^3}{r^7}\int\frac{x^4dx}{x'^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}-\&c.$$

(49.) Soit un cercle dont le rayon $= x'$; prenons dans ce cercle une abſciſſe $= x$, & nommons X l'arc correſpondant à l'abſciſſe x; l'analyſe nous apprend que

$$\int\frac{x^2dx}{x'\sqrt{(x'^2-x^2)}} = -\tfrac{1}{2}\frac{x\sqrt{(x'^2-x^2)}}{x'}+\tfrac{1}{2}X;$$

$$\int\frac{x^4dx}{x'^3\sqrt{(x'^2-x^2)}} = -\tfrac{1}{4}\frac{x^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}{x'^3}+\tfrac{3}{4}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{x\sqrt{(x'^2-x^2)}}{x'}+\tfrac{1}{2}X\right].$$

Donc, ſi l'on néglige les termes multipliés par les valeurs de Δ, élevées à une puiſſance ſupérieure à la ſeconde, on aura

$$(1)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2 x'}{r^3}\left[\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}\frac{x\sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'}\right].$$

(50.) Dans l'équation (1) du *paragraphe précédent*, x eſt le ſinus de l'arc X. Mais cet arc & ce ſinus ne doivent point être évalués dans le cercle qui a r pour rayon; ils doivent au contraire être évalués dans un cercle dont le rayon $= x'$. Si donc on veut rapporter la quantité $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{(x'^2 - x^2)}}{x'}$ au cercle dont le rayon $= r$, il faudra multiplier chacune des quantités qui la compoſent, par $\frac{r}{x'}$; elle deviendra $\frac{1}{2}\frac{r}{x'}X - \frac{1}{2}\frac{rx}{x'} \times \frac{\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{x'^2})}}{r}$; & pour ne pas troubler l'équation, on multipliera le coëfficient $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 x'}{r^3}$ par $\frac{x'}{r}$. On aura alors

$$(1)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2 x'^2}{r^4}\left[\tfrac{1}{2}\frac{rX}{x'} - \frac{\frac{rx}{x'}\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{x'^2})}}{2r}\right].$$

Et toutes les quantités ſeront évaluées dans le cercle dont le rayon $= r$; c'eſt-à-dire dans le cercle générateur de la ſphère inſcrite. Nous remarquerons que $\frac{r}{x'}X$ eſt l'arc dont $\frac{rx}{x'}$ eſt le ſinus, & dont $\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{x'^2})}$ eſt le coſinus.

(51.) Si l'on jette les yeux ſur les principes développés dans le *§. 16*, on ſe convaincra facilement que x eſt le ſinus de la latitude corrigée du lieu F, & que x' eſt le coſinus de l'arc $m'P$. Soit donc A un angle que l'on déterminera de la

manière ſuivante,

$$(1)\ \text{ſin.}\ A = \frac{r\ \text{ſin.}\ (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\text{coſinus}\ m'P};$$

on aura

$$(2)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2\, m'P}{r^2}\left(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{ſin.}\ A\ \text{coſ.}\ A}{r}\right),$$

ou à cauſe de $\frac{1}{2}\,\frac{\text{ſin.}\ A\ \text{coſ.}\ A}{r} = \frac{1}{4}\ \text{ſin.}\ 2A,$

$$(3)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2\, m'P}{r^2}\left(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\ 2A\right).$$

Nous obſerverons que, par la nature de la queſtion, P & p doivent être à la fois égaux à zéro, lorſque ſin. (latitude corrigée du lieu F) = coſin. $m'P$; & par conſéquent lorſque $A = 90^d$; ſin. $2A$ = ſin. $180^d = 0$; on a donc conſtante $= -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2\, m'P}{r^2}\ \frac{\text{arc}\ 90^d}{2}$; l'*équation* (3) devient par-là

$$(4)\ P - p - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2\, m'P}{r^2}\left(\frac{\text{arc}\ 90^d - A}{2} + \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\ 2A\right) = 0.$$

(52.) Dans la formule précédente, P, p, arc 90^d, A ſont exprimés en valeurs du rayon; ſi l'on vouloit que ces quantités fuſſent exprimées en degrés, minutes & ſecondes, on auroit

$$(1)\ P - p - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2 m'P}{r^2}\left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265''\ \text{ſin.}\ 2A}{4r}\right) = 0.$$

Nous remarquerons enfin que ſi l'on nomme

θ le nombre de toiſes que contient un degré de la ſphère inſcrite; nous avons évalué cette quantité dans le §. 32;

t le nombre de toiſes que contient p;

T le nombre de toiſes que contient P;

on aura les équations

$$(2)\ \theta p - 3600'' \times t = 0;$$

$$(3)\ \theta P - 3600'' \times T = 0.$$

Au moyen de ces deux équations, lorſque l'on connoîtra p & P en degrés, on évaluera facilement le nombre de toiſes qu'ils contiennent; & réciproquement.

(53.) Nous pouvons maintenant réſoudre les deux queſtions ſuivantes.

Première Question.

Étant donné l'arc m′P *de la ſphère inſcrite (nous avons vu dans la* ſection précédente *comment cet arc ſe déduiſoit de la diſtance en toiſes des points* M, M′ *ſur le Méridien elliptique) ainſi que la latitude du lieu* F; *on demande le nombre de toiſes que contient la perpendiculaire menée du lieu* F *à la Méridienne du lieu* M *ſur le ſphéroïde!*

Seconde Question.

Étant donné l'arc m′P *de la ſphère inſcrite, & le nombre de toiſes que contient la perpendiculaire menée du lieu* F *à la Méridienne du lieu* M *ſur le ſphéroïde; on demande la latitude du lieu* F?

Solution de la première Queſtion.

(54.) La première queſtion ne préſente aucune difficulté. En
Fig. 2. effet, puiſque l'on connoît l'arc $m'P$ de la ſphère inſcrite & la latitude du lieu F, on connoîtra la latitude corrigée de ce dernier lieu; on aura donc ſur la ſphère inſcrite un triangle ſphérique $m'PF'$ rectangle en m', dans lequel on connoîtra le côté $m'P$, & le côté PF' complément de la latitude corrigée du lieu F; on conclura le côté $m'F'$ ou la quantité p qui lui eſt égale, au moyen de l'équation ſuivante,

$$(1)\ \text{coſinus}\ p = \frac{r\ \text{ſin. (latitude corrigée du lieu } F)}{\text{coſin. } m'P}.$$

On connoîtra donc la valeur de p qu'il faut ſubſtituer dans l'*équation* (1) du *§. 52;* on évaluera enſuite l'angle A du *§. 51;* & l'on aura l'expreſſion de P en degrés, minutes

& secondes. On réduira cette valeur en toises, au moyen de l'*équation* (3) du §. 52, & le Problème sera résolu. Fig. 2.

Nous remarquerons qu'il suit des équations (1), (1) des §. 51 & 54, que dans le cas dont il s'agit, l'angle A est le complément de l'arc p.

Solution de la seconde Question.

(55.) La seconde question, qui est celle dont on a le plus généralement besoin, présente plus de difficulté. En effet, lorsque l'on connoît le nombre T de toises que contient l'arc P, il est facile d'avoir l'expression de cet arc en degrés, minutes & secondes, au moyen de l'*équation* (3) du §. 52; mais il n'est pas aussi facile de déduire la valeur de p de celle de P, au moyen de l'*équation (1) du §. 52;* car la latitude inconnue du lieu F, entre dans l'expression de P. Heureusement les circonstances du Problème permettent d'employer une méthode simple & très-exacte dans la pratique.

Pour me faire entendre, je remarque que dans l'*équation* (1) du §. 52, la quantité $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{ fin. } 2A}{4r}$ est multipliée par la fraction très-petite $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{cos.}^2 m'P}{r^2}$; il n'est donc pas absolument nécessaire de connoître l'angle A avec la dernière exactitude, pour avoir avec précision, la correction donnée par le terme $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{cosin.}^2 m'P}{r^2}\left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{fin.} 2A}{4r}\right)$: il suffit d'avoir une connoissance approchée de la latitude corrigée du lieu F. On considèrera donc un triangle sphérique rectangle $m'PF'$ dont on connoîtra le côté $m'P$, & dans lequel on emploîra pour côté $m'F'$, l'arc P du sphéroïde réduit en degrés, minutes & secondes; on conclura par-là l'expression approchée de la latitude corrigée du lieu F, au moyen de l'équation

$$(1) \quad \text{fin. (latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\text{cosin. } m'P \times \text{cos. } P}{r},$$

C'eſt la valeur qu'il ſaut employer dans la détermination de l'angle *A*.

Nous remarquerons que ſi dans l'expreſſion de ſin. *A* du *§. 51*, l'on ſubſtitue à ſin. (*latitude corrigée du lieu F*) l'expreſſion tirée de l'équation précédente, on aura

$$(2)\ \text{ſin.}\, A = \text{coſ.}\, P.$$

L'angle *A* eſt donc le complément de l'arc *P* du ſphéroïde; & les réſultats ſeront exacts, aux termes près de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$.

EXEMPLE.

Fig. 2. (56.) *Je ſuppoſe un lieu ſitué à la diſtance de 52902 toiſes de la Méridienne de Paris, priſe ſur une perpendiculaire à cette Méridienne, du côté de l'Orient; je ſuppoſe de plus, que la perpendiculaire qui paſſe par ce lieu rencontre la Méridienne de Paris, à la diſtance de 14823 toiſes du côté du Midi; on demande la valeur de la perpendiculaire corrigée, correſpondante à ce lieu!*

SOLUTION. Nous avons vu qu'en ſuppoſant le rapport des axes de la Terre comme 177 à 178, on a $m'P = 41^d 34' 58''$; donc, $\log. \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2 m'P}{r^2} = - 2{,}4989335$.
D'ailleurs, puiſque $P = 52902$ toiſes, & que $\theta = 56837$ toiſes, on aura [*§. 52, équation* (3)] $P = 0^d\ 55'\ 51''$; $A = 89^d 4' 9''$; $2A = 178^d\ 8' 18''$; $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſ.}^2 m'P}{r^2} \left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265''\text{ſin.}\, 2\, A}{4\, r}\right) = 10'',6$; donc [*§. 52, équation* (1)]

$$p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4.$$

(57.) Lorſque l'on connoîtra par les calculs précédens, les valeurs de l'arc *m' P* & de *p*, on conclura facilement la

latitude corrigée du lieu F, en remarquant que le complément de cette latitude est l'hypothénuse du triangle rectangle $m'PF'$, dans lequel on connoît le côté $m'P$, & le côté mF' qui est égal à p; on aura donc Fig. 2.

$$(1)\ \text{sin. (latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\text{cos. } m'P \times \text{cos. } p}{r}.$$

Dans le cas dont il s'agit, cette latitude sera de $48^d\ 24'\ 30''$, & par conséquent *(§. 20)* la latitude vraie sera de $48^d\ 34'\ 7''$.

(58.) On conclura pareillement la longitude corrigée du lieu F, en remarquant que cette longitude est égale à l'angle P du triangle rectangle $m'PF'$; on aura donc

$$(1)\ \text{tangente (longitude corrigée du lieu } F) = r \times \frac{\text{tang. } p}{\text{sin. } m'P}.$$

Dans le cas dont il s'agit, cette longitude sera de $1^d\ 23'\ 52''$.

Par de semblables calculs, on trouvera les valeurs suivantes.

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

$m'P = 41^d\ 34'\ 58''$; cos. $m'P$ = sin. $48^d\ 25'\ 2''$; $P = 0^d\ 55'\ 51''$;
$A = 89.\ 4.\ 9$; $2A = 178.\ 8.18$; $p = 0.55.40$;

Latitude corrigée du lieu F.................... = $48^d\ 24'\ 30''$;
Latitude vraie.......................... = 48. 34. 7.
Longitude corrigée....................... = 1. 23. 52.

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

$m'P = 41^d\ 33'\ 52''$; cos. $m'P$ = sin. $48^d\ 26'\ 8''$; $P = 0^d\ 55'\ 49''$;
$A = 89.\ 4.11$; $2A = 178.\ 8.22$; $p = 0.55.40$;

Latitude corrigée du lieu F.................... = $48^d\ 25'\ 38''$;
Latitude vraie.......................... = 48. 34. 8.
Longitude corrigée....................... = 1. 23. 54.

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

$m'P = 41^d\ 32'\ 46''$; cos. $m'P$ = sin. $48^d\ 27'\ 14''$; $P = 0^d\ 55'\ 48''$;
$A = 89.\ 4.12$; $2A = 178.\ 8.24$; $p = 0.55.39$;

Latitude corrigée du lieu F.................... = $48^d\ 26'\ 43''$;
Latitude vraie.......................... = 48. 34. 8.
Longitude corrigée....................... = 1. 23. 56.

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

$m'P = 41^d\ 31'\ 1''$; cos. $m'P =$ sin. $48^d\ 28'\ 59''$; $P = 0^d\ 55'\ 46''$;
$A = 89.\ 4.\ 14$; $2A = 178.\ 8.\ 28$; $p = 0.\ 55.\ 39$;
Latitude corrigée du lieu *F*. . . . . $= 48^d\ 28'\ 28''$;
Latitude vraie. . . . . $= 48.\ 34.\ 10.$
Longitude corrigée. . . . . $= 1.\ 24.\ 2.$

Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.

$m'P = 41^d\ 25'\ 21''$; $P = p = 0^d\ 55'\ 37''$;
Latitude du lieu *F*. . . . . $= 48^d\ 34\ 10''$;
Longitude du lieu *F*. . . . . $= 1.\ 24.\ 5.$

Quelque facile qu'il soit d'exécuter dans tous les cas, les calculs prescrits, il est cependant possible de diminuer ce travail, au moyen des Tables par lesquelles je terminerai cette section. On parviendra par-là, presque sans calcul, aux résultats cherchés; mais je dois auparavant estimer l'erreur des termes négligés dans la formule du *§. 52.*

Estimation de l'erreur du terme négligé dans la formule du §. 52.

(59.) Il est facile d'apprécier l'erreur de la formule du *§. 52*; en effet, il est aisé de voir que nous avons négligé le terme $\frac{1}{8}\frac{\Delta^4 x'^3}{r^7}\int\frac{x^4dx}{x'^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}$, qui, en conservant la définition de X du *§. 49*, a pour intégrale

$$\frac{1}{8}\frac{\Delta^4 x'^3}{r^7}\left\{-\frac{1}{4}\frac{x^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}{x'^3}+\frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\frac{x\sqrt{(x'^2-x^2)}}{x'}+\frac{1}{2}X\right]-\text{const.}\right\},$$

ou plutôt, en faisant usage des remarques des *§. 50, 51, 52*, & en ajoutant convenablement la constante,

$$-\frac{1}{32}\frac{\Delta^4}{r^4}\times\frac{\text{cosin.}^4 m'P}{r^4}\left[\tfrac{3}{2}(90^d-A)+\frac{206265''\text{sin.}2A}{r}-\frac{206265''\text{sin.}4A}{8r}\right].$$

Mais le terme précédent n'étant que le développement de la quantité $\frac{1}{8}\frac{\Delta^4 x'^3}{r^7}\int\frac{x^4dx}{x'^3\sqrt{(x'^2-x^2)}}$, la supposition qui donne

donne le *maximum* du terme, sera évidemment $x = 0$. Mais (§. 51) $x =$ sin. (latitude corrigée du lieu F); de plus, sin. $A = \frac{r \text{ sin. (latitude corrigée du lieu } F)}{\text{cosinus } m' P}$; donc le *maximum* de l'erreur de la méthode a lieu lorsque $A = 0$, & sin. $A = 0$. L'expression du terme négligé se réduit alors à $\frac{3}{64} \frac{\Delta^4}{r^4} \frac{\text{cosin.}^4 m' P}{r^4}$ arc 90^d; ou enfin, à $\frac{3}{64} \frac{\Delta^4}{r^4} \times$ arc 90^d, dans le cas où cosin. $m' P$ auroit sa plus grande valeur. Si l'on substitue des nombres dans cette dernière expression, on aura 2 secondes pour le *maximum* d'erreur de la méthode; le terme en question peut donc toujours être négligé.

Il est aisé de voir que l'expression du *maximum* de l'erreur de la méthode, est précisément la même que celle que nous avons trouvée (§. 43) pour l'erreur sur l'arc de 90^d du cercle inscrit; la raison en est simple; lorsque cosin. $m' P = r$, la perpendiculaire sur le sphéroïde est évidemment un des Méridiens du sphéroïde, & la perpendiculaire corrigée est le cercle inscrit; ces deux Problèmes sont donc alors identiques. Passons à la construction des Tables.

Construction des TABLES.

(60.) Ces Tables seront de deux espèces; j'évaluerai d'abord, pour chacune des hypothèses d'excentricité de la Terre que j'ai considérées, & pour chacune des valeurs de $m' P$, depuis 36^d jusqu'à 50^d, les valeurs correspondantes de log. $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{cosin.}^2 m' P}{r^2}$; ces valeurs seront données de demi-degré en demi-degré. Je donnerai ensuite une autre Table qui contiendra les valeurs de $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{ sin. } A}{4 r}$, en supposant que A varie depuis 90^d jusqu'à 80^d. Ces suppositions sont plus que suffisantes pour résoudre les Problèmes que nous considérerons.

TABLE des Logarithmes de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{cosin.}^2 m'P}{r^2}$ *pour les quatre hypothèses de rapport des axes de la Terre.*

VALEURS de $m'P$.	Logarithmes de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{cosin.}^2 m'P}{r^2}$.			
	RAPPORT des AXES comme 177 à 178.	RAPPORT des AXES comme 200 à 201.	RAPPORT des AXES comme 229 à 230.	RAPPORT des AXES comme 299 à 300.
36^d 0'	— 2,4308000	— 2,4836000	— 2,5411000	— 2,6603000
36. 20	— 2,4345000	— 2,4873000	— 2,5448000	— 2,6640000
36. 40	— 2,4382000	— 2,4910000	— 2,5485000	— 2,6678000
37. 0	— 2,4420000	— 2,4948000	— 2,5523000	— 2,6716000
37. 20	— 2,4459000	— 2,4986000	— 2,5561000	— 2,6754000
37. 40	— 2,4498000	— 2,5025000	— 2,5600000	— 2,6793000
38. 0	— 2,4537000	— 2,5064000	— 2,5640000	— 2,6832000
38. 20	— 2,4577000	— 2,5104000	— 2,5680000	— 2,6872000
38. 40	— 2,4617000	— 2,5144000	— 2,5720000	— 2,6912000
39. 0	— 2,4657000	— 2,5185000	— 2,5760000	— 2,6952000
39. 20	— 2,4698000	— 2,5226000	— 2,5801000	— 2,6993000
39. 40	— 2,4740000	— 2,5268000	— 2,5843000	— 2,7035000
40. 0	— 2,4782000	— 2,5310000	— 2,5885000	— 2,7077000
40. 20	— 2,4825000	— 2,5353000	— 2,5928000	— 2,7120000
40. 40	— 2,4868000	— 2,539[illegible]000	— 2,5971000	— 2,7163000
41. 0	— 2,4912000	— 2,5439000	— 2,6015000	— 2,7207000
41. 20	— 2,4957000	— 2,5483000	— 2,6059000	— 2,7251000
41. 40	— 2,5002000	— 2,5528000	— 2,6104000	— 2,7296000
42. 0	— 2,5046000	— 2,5573000	— 2,6149000	— 2,7341000
42. 20	— 2,5092000	— 2,5619000	— 2,6195000	— 2,7387000
42. 40	— 2,5138000	— 2,5665000	— 2,6241000	— 2,7433000
43. 0	— 2,5185000	— 2,5712000	— 2,6288000	— 2,7480000
43. 20	— 2,5233000	— 2,5760000	— 2,6335000	— 2,7528000
43. 40	— 2,5281000	— 2,5808000	— 2,6383000	— 2,7576000
44. 0	— 2,5329000	— 2,5856000	— 2 643 000	— 2,7624000
44. 20	— 2,5379000	— 2,590500	— 2,6481000	— 2,7673000
44. 40	— 2,5429000	— 2,5955000	— 2,6531000	— 2,7723000
45. 0	— 2,5479000	— 2,6005000	— 2,6581000	— 2,7773000
45. 20	— 2,5530000	— 2,6056000	— 2,6632000	— 2,7824000
45. 40	— 2,5581000	— 2,6107000	— 2,6683000	— 2,7875000
46. 0	— 2,5633000	— 2,6159000	— 2,6735000	— 2,7927000
46. 20	— 2,5685000	— 2,6212000	— 2,6788000	— 2,7980000
46. 40	— 2,5738000	— 2,6265000	— 2,6841000	— 2,8033000
47. 0	— 2,5792000	— 2,6319 00	— 2,6895000	— 2,8087000
47. 20	— 2,5847000	— 2,6374000	— 2,6950000	— 2,8142000
47. 40	— 2,5902000	— 2,6429000	— 2,7005000	— 2,8197000
48. 0	— 2,5958000	— 2,648[illegible]000	— 2,7060000	— 2,8252000
48. 20	— 2,6014000	— 2,654 000	— 2,7117000	— 2,8309000
48. 40	— 2,6071000	— 2,6598000	— 2,7174000	— 2,8366000
49. 0	— 2,6128000	— 2,6656000	— 2,7232000	— 2,8424000
49. 20	— 2,6 87000	— 2,6715000	— 2,7291000	— 2,8483000
49. 40	— 2,6246000	— 2,6774000	— 2,7350000	— 2,8542000
50. 0	— 2,6306000	— 2,6833000	— 2,74 9000	— 2,8601000

TABLE des valeurs de $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r}$, *correspondantes aux différentes valeurs de* A.

VALEURS de *A*.	VALEURS correspondantes.	VALEURS de *A*.	VALEURS correspond.	VALEURS de *A*.	VALEURS correspond.
90d 0'	0"	86d 40'	11985"	83d 20'	23892"
89. 55	300	86. 35	12284	83. 15	24188
89. 50	600	86. 30	12583	83. 10	24484
89. 45	900	86. 25	12882	83. 5	24780
89. 40	1200	86. 20	13181	83. 0	25075
89. 35	1500	86. 15	13480	82. 55	25370
89. 30	1800	86. 10	13779	82. 50	25665
89. 25	2100	86. 5	14078	82. 45	25960
89. 20	2400	86. 0	14377	82. 40	26255
89. 15	2700	85. 55	14676	82. 35	26550
89. 10	3000	85. 50	14974	82. 30	26845
89. 5	3300	85. 45	15272	82. 25	27140
89. 0	3600	85. 40	15570	82. 20	27435
88. 55	3900	85. 35	15868	82. 15	27730
88. 50	4200	85. 30	16166	82. 10	28025
88. 45	4500	85. 25	16464	82. 5	28320
88. 40	4799	85. 20	16763	82. 0	28615
88. 35	5099	85. 15	17061	81. 55	28909
88. 30	5399	85. 10	17359	81. 50	29203
88. 25	5699	85. 5	17657	81. 45	29497
88. 20	5998	85. 0	17955	81. 40	29790
88. 15	6298	84. 55	18253	81. 35	30083
88. 10	6598	84. 50	18551	81. 30	30376
88. 5	6898	84. 45	18849	81. 25	30669
88. 0	7197	84. 40	19146	81. 20	30962
87. 55	7497	84. 35	19444	81. 15	31255
87. 50	7796	84. 30	19741	81. 10	31548
87. 45	8096	84. 25	20038	81. 5	31841
87. 40	8395	84. 20	20335	81. 0	32134
87. 35	8695	84. 15	20632	80. 55	32426
87. 30	8994	84. 10	20929	80. 50	32718
87. 25	9294	84. 5	21226	80. 45	33010
87. 20	9593	84. 0	21522	80. 40	33302
87. 15	9893	83. 55	21819	80. 35	33594
87. 10	10192	83. 50	22116	80. 30	33886
87. 5	10491	83. 45	22412	80. 25	34178
87. 0	10790	83. 40	22708	80. 20	34470
86. 55	11089	83. 35	23004	80. 15	34762
86. 50	11388	83. 30	23300	80. 10	35053
86. 45	11686	83. 25	23596	80. 5	35344
86. 40	11985	83. 20	23892	80. 0	35635

On remarquera, que pour avoir les valeurs intermédiaires de $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{fin.} 2A}{4r}$, correſpondantes aux angles A qui ne ſe trouvent pas préciſément dans la Table, on ſouſtraira autant de ſecondes du réſultat, que le véritable angle A pour lequel on calculera, ſurpaſſera l'angle A dont on aura pris la valeur correſpondante dans la Table.

(61.) L'uſage des Tables précédentes eſt facile à concevoir. Suppoſons, par exemple, que par une ſuite de calculs on trouve pour valeur de A, $A = 86^d 51' 10''$; je cherche dans la Table, la valeur de $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{fin.} 2A}{4r}$, correſpondante à la valeur de $A = 86^d 51' 10''$; je ne trouve pas exactement cette valeur, mais je vois que celle qui répond à $86^d 50'$ eſt de $11388''$; je ſouſtrais $70''$ de cette valeur, conformément à la remarque du *paragraphe précédent;* & j'ai pour la valeur cherchée $11318''$; j'ecris le logarithme de cette quantité; j'en ſouſtrais le logarithme de $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſin.}^2 m' P}{r^2}$ qui convient au Problème; j'ai alors le nombre de ſecondes qu'il faut ſouſtraire de l'arc P pour en conclure l'arc p; ou qu'il faut ajouter à l'arc p, pour en conclure l'arc P.

Nouvelle forme que l'on peut donner à la formule du §. 52, *&* *aux Tables du* §. 60.

(62.) Quoique la formule du *§. 52* & les Tables du *§. 60*, aient toute la généralité & toute la ſimplicité dont elles ſont ſuſceptibles, j'ai penſé cependant que le Lecteur verroit avec plaiſir la nouvelle forme que l'on peut donner ſoit à cette formule, ſoit à ces Tables. Voici ſur quoi ſont fondées ces nouvelles conſidérations.

Fig. 4. Si l'on jette les yeux ſur l'équation (1) du *§. 52*, on verra facilement que $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \text{fin.} 2A}{4r} \right)$ eſt la différence entre l'arc PM de l'ellipſe & l'arc correſpondant Pm

du cercle inſcrit. L'origine des deux arcs eſt au point P ſommet du petit axe de l'ellipſe ; & j'entends par l'arc correſpondant du cercle inſcrit, celui qui eſt déterminé ſur ce cercle, par l'interſection m du cercle, avec l'ordonnée HM menée par l'extrémité M de l'arc PM de l'ellipſe. Fig. 4.

Pour s'en convaincre, je reprends l'équation (2) du §. 28,

$$(1)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{k}{2} - \frac{206265'' \operatorname{coſ.}(2a+k)\operatorname{ſin.}k}{2r^2}\right] = 0.$$

Dans cette équation, K eſt l'arc de l'ellipſe ; k eſt l'arc correſpondant du cercle inſcrit ; a eſt la diſtance du point G' pris ſur l'extrémité du grand axe, à l'origine des arcs k, K. Suppoſons que l'on veuille prendre le ſommet P du petit axe de l'ellipſe, pour cette origine ; on aura $a = 90^d$; $2a + k = 180^d + k$; $\operatorname{coſ.}(2a+k) = \operatorname{coſ.}(180^d + k) = -\operatorname{coſ.}k$; donc $-\frac{\operatorname{coſ.}(2a+k)\operatorname{ſin.}k}{2r^2} = \frac{\operatorname{coſ.}k\operatorname{ſin.}k}{2r^2} = \frac{\operatorname{ſin.}2k}{4r}$; & l'équation (1) deviendra

$$(2)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left(\frac{k}{2} + \frac{206265''\operatorname{ſin.}2k}{4r}\right) = 0.$$

Maintenant, nommons A le complément de l'arc k ; l'équation (2) deviendra

$$(3)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265''\operatorname{ſin.}(180^d - 2A)}{4r}\right] = 0 ;$$

ou à cauſe de $\operatorname{ſin.}(180^d - 2A) = \operatorname{ſin.}2A$,

$$(4)\ k - K + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265''\operatorname{ſin.}2A}{4r}\right) = 0 ;$$

donc $\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left(\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265''\operatorname{ſin.}2A}{4r}\right) = K - k.$

Cette remarque fait voir que ſi l'on nomme

γ l'excès de l'arc de l'ellipſe ſur l'arc correſpondant du cercle inſcrit,

la formule (1) du §. 52 pourra être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(5)\ P - p - \frac{\operatorname{coſin.}^2 m'P}{r^2}\gamma = 0.$$

Cette équation ſe réſoudra avec la dernière facilité, au moyen des Tables que nous allons donner.

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans au cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178.

ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es	ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es	ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es
0d 0′	0″	″	30d 0′	559″,0	″	60d 0′	865″,1	″
1. 0	20,4	20″,4	31. 0	574,1	15,1	61. 0	870,2	5″,1
2. 0	40,8	20,4	32. 0	588,9	14,8	62. 0	875,0	4,8
3. 0	61,2	20,4	33. 0	603,4	14,5	63. 0	879,4	4,4
4. 0	81,6	20,4	34. 0	617,6	14,2	64. 0	883,4	4,0
5. 0	101,9	20,3	35. 0	631,5	13,9	65. 0	887,0	3,6
6. 0	122,1	20,2	36. 0	645,1	13,6	66. 0	890,3	3,3
7. 0	142,2	20,1	37. 0	658,3	13,2	67. 0	893,3	3,0
8. 0	162,2	20,0	38. 0	671,1	12,8	68. 0	896,1	2,8
9. 0	182,1	19,9	39. 0	683,6	12,5	69. 0	898,7	2,6
10. 0	201,9	19,8	40. 0	695,7	12,1	70. 0	901,1	2,4
11. 0	221,6	19,7	41. 0	707,5	11,8	71. 0	903,3	2,2
12. 0	241,2	19,6	42. 0	718,9	11,4	72. 0	905,4	2,1
13. 0	260,7	19,5	43. 0	730,0	11,1	73. 0	907,4	2,0
14. 0	280,0	19,3	44. 0	740,7	10,7	74. 0	909,3	1,9
15. 0	299,1	19,1	45. 0	751,0	10,3	75. 0	911,0	1,7
16. 0	318,0	18,9	46. 0	761,0	10,0	76. 0	912,5	1,5
17. 0	336,7	18,7	47. 0	770,7	9,7	77. 0	913,8	1,3
18. 0	355,3	18,6	48. 0	780,1	9,4	78. 0	914,9	1,1
19. 0	373,7	18,4	49. 0	789,1	9,0	79. 0	915,8	0,9
20. 0	391,9	18,2	50. 0	797,7	8,6	80. 0	916,5	0,7
21. 0	409,9	18,0	51. 0	805,9	8,2	81. 0	917,0	0,5
22. 0	427,6	17,7	52. 0	813,8	7,9	82. 0	917,3	0,3
23. 0	445,0	17,4	53. 0	821,3	7,5	83. 0	917,5	0,2
24. 0	462,1	17,1	54. 0	828,4	7,1	84. 0	917,6	0,1
25. 0	478,9	16,8	55. 0	835,2	6,8	85. 0	917,7	0,1
26. 0	495,4	16,5	56. 0	841,7	6,5	86. 0	917,8	0,1
27. 0	511,7	16,3	57. 0	848,0	6,3	87. 0	917,9	0,1
28. 0	527,8	16,1	58. 0	854,0	6,0	88. 0	917,9	0,0
29. 0	543,6	15,8	59. 0	859,7	5,7	89. 0	917,9	0,0
30. 0	559,0	15,4	60. 0	865,1	5,4	90. 0	917,9	0,0

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 200 à 201.

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1.res	2.es		1.res	2.es		1.res	2.es
0d 0'	0"		30d 0'	495",1	"	60d 0'	766",4	"
1. 0	18,1	18",1	31. 0	508,6	13,5	61. 0	770,8	4,4
2. 0	36,1	18,0	32. 0	521,8	13,2	62. 0	774,9	4,1
3. 0	54,1	18,0	33. 0	534,7	12,9	63. 0	778,7	3,8
4. 0	72,1	18,0	34. 0	547,2	12,5	64. 0	782,2	3,5
5. 0	90,1	18,0	35. 0	559,5	12,2	65. 0	785,4	3,2
6. 0	108,0	17,9	36. 0	571,4	11,9	66. 0	788,3	2,9
7. 0	125,9	17,9	37. 0	583,1	11,7	67. 0	791,0	2,7
8. 0	143,7	17,8	38. 0	594,5	11,4	68. 0	793,5	2,5
9. 0	161,4	17,7	39. 0	605,5	11,0	69. 0	795,9	2,4
10. 0	179,0	17,6	40. 0	616,1	10,6	70. 0	798,2	2,3
11. 0	196,5	17,5	41. 0	626,5	10,4	71. 0	800,4	2,2
12. 0	213,7	17,2	42. 0	636,6	10,1	72. 0	802,5	2,1
13 0	230,8	17,1	43. 0	646,5	9,9	73. 0	804,4	1,9
14. 0	247,8	17,0	44. 0	656,1	9,6	74. 0	806,0	1,6
15. 0	264,7	16,9	45. 0	665,4	9,3	75. 0	807,3	1,3
16. 0	281,5	16,8	46. 0	674,3	8,9	76. 0	808,4	1,1
17. 0	298,2	16,7	47. 0	682,8	8,5	77. 0	809,4	1,0
18. 0	314,8	16,6	48. 0	691,0	8,2	78. 0	810,3	0,9
19. 0	331,2	16,4	49. 0	698,9	7,9	79. 0	811,0	0,7
20 0	347,4	16,2	50. 0	706,5	7,6	80. 0	811,6	0,6
21. 0	363,3	15,9	51. 0	713,7	7,2	81. 0	812,0	0,4
22. 0	378,9	15,6	52. 0	720,6	6,9	82. 0	812,3	0,3
23. 0	394,1	15,2	53. 0	727,2	6,6	83. 0	812,5	0,2
24. 0	409,1	15,0	54. 0	733,6	6,4	84. 0	812,6	0,1
25. 0	424,0	14,9	55. 0	739,7	6,1	85. 0	812,7	0,1
26. 0	438,7	14,7	56. 0	745,6	5,9	86. 0	812,8	0,1
27. 0	453,2	14,5	57. 0	751,2	5,6	87. 0	812,9	0,1
28. 0	467,4	14,2	58. 0	756,5	5,3	88. 0	812,9	0,0
29. 0	481,4	14,0	59. 0	761,6	5,1	89. 0	812,9	0,0
30. 0	495,1	13,7	60. 0	766,4	4,8	90. 0	812,9	0,0

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 229 à 230.

ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.		ARCS.	DIFFÉRENCES.	
	1.res	2.^{es}		1.res	2.^{es}		1.res	2.^{es}
0^d 0′	0″	15″,9	30^d 0′	433,7″	11″,8	60^d 0′	671″,3	3″,8
1. 0	15,9	15,9	31. 0	455,5	11,5	61. 0	675,1	3,6
2. 0	31,8	15,8	32. 0	457,0	11,3	62. 0	678,7	3,4
3. 0	47,6	15,8	33. 0	468,3	11,1	63. 0	682,1	3,1
4. 0	63,4	15,8	34. 0	479,4	10,8	64. 0	685,2	2,8
5. 0	79,2	15,7	35. 0	490,2	10,4	65. 0	688,0	2,6
6. 0	94,9	15,6	36. 0	500,6	10,0	66 0	690,6	2,4
7. 0	110,5	15,5	37. 0	510,6	9 8	67. 0	693,0	2,3
8. 0	126,0	15,4	38. 0	520,4	9,6	68. 0	695 3	2,2
9. 0	141,4	15,3	39. 0	530,0	9 4	69. 0	697,5	2,0
10. 0	156,7	15,2	40. 0	539,4	9,2	70. 0	699,5	1,8
11. 0	171,9	15,1	41. 0	548,6	9,0	71. 0	701,3	1,6
12. 0	187,0	15,0	42. 0	557,6	8,7	72. 0	702,9	1,5
13. 0	202,0	14,9	43. 0	566,3	8,4	73. 0	704,4	1,3
14. 0	216,9	14,9	44. 0	574,7	8,0	74. 0	705,7	1,2
15. 0	231,8	14,8	45. 0	582,7	7,6	75. 0	706,9	1,0
16. 0	246,6	14,7	46. 0	590,3	7,3	76. 0	707 9	0,9
17. 0	261,3	14,5	47. 0	597,6	7,1	77. 0	708,8	0,7
18. 0	275,8	14,2	48. 0	604,7	6,9	78. 0	709,5	0,6
19. 0	290,0	14,1	49. 0	611,6	6,6	79. 0	710,1	0,5
20. 0	304,1	13,9	50. 0	618,2	6.4	80. 0	710,6	0,4
21. 0	318,0	13,7	51. 0	624,6	6,1	81. 0	711,0	0,3
22. 0	331,7	13,5	52. 0	630,7	5,9	82. 0	711,3	0,2
23. 0	345,2	13,3	53. 0	636,6	5,7	83. 0	711,5	0,2
24. 0	358,5	13,1	54. 0	642,3	5,5	84. 0	711,7	0,1
25. 0	371,6	12,8	55. 0	647,8	5,3	85. 0	711,8	0,1
26. 0	384,4	12,6	56. 0	653,1	5,0	86. 0	711,9	0,1
27. 0	397,0	12,5	57. 0	658,1	4,7	87. 0	712,0	0,0
28. 0	409,5	12,2	58. 0	662,8	4,4	88. 0	712,0	0,0
29. 0	421,7	12,0	59. 0	667,2	4,1	89. 0	712,0	0,0
30. 0	433,7		60. 0	671,3		90. 0	712,0	

TABLE

TABLE des Différences entre les arcs de l'Ellipse & les arcs correspondans du cercle inscrit, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 299 à 300.

ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es	ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es	ARCS.	DIFFÉRENCES. 1.res	DIFFÉRENCES. 2.es
0d 0'	0"	12",0	30d 0'	329",7	8",9	60d 0'	510",1	3",0
1. 0	12,0	12,0	31. 0	338,6	8,7	61. 0	513,1	2,8
2. 0	24,0	12,0	32. 0	347,3	8,5	62. 0	515,9	2,5
3. 0	36,0	12,0	33. 0	355,8	8,3	63. 0	518,4	2,3
4. 0	48,0	12,0	34. 0	364,1	8,1	64. 0	520,7	2,0
5. 0	60,0	12,0	35. 0	372,2	7,9	65. 0	522,7	1,9
6. 0	72,0	11,9	36. 0	380,1	7,7	66. 0	524,6	1,8
7. 0	83,9	11,8	37. 0	387,8	7,5	67. 0	526,4	1,7
8. 0	95,7	11,7	38. 0	395,3	7,4	68. 0	528,1	1,6
9. 0	107,4	11,6	39. 0	402,7	7,2	69. 0	529,7	1,5
10. 0	119,0	11,6	40. 0	409,9	7,0	70. 0	531,2	1,4
11. 0	130,6	11,5	41. 0	416,9	6,8	71. 0	532,6	1,3
12. 0	142,1	11,5	42. 0	423,7	6,6	72. 0	533,9	1,2
13. 0	153,6	11,4	43. 0	430,3	6,3	73. 0	535,1	1,1
14. 0	165,0	11,3	44. 0	436,6	6,1	74. 0	536,2	1,0
15. 0	176,3	11,2	45. 0	442,7	5,9	75. 0	537,2	0,9
16. 0	187,5	11,0	46. 0	448,6	5,7	76. 0	538,1	0,7
17. 0	198,5	10,9	47. 0	454,3	5,5	77. 0	538,8	0,6
18. 0	209,4	10,8	48. 0	459,8	5,3	78. 0	539,4	0,5
19. 0	220,2	10,7	49. 0	465,1	5,1	79. 0	539,9	0,4
20. 0	230,9	10,6	50. 0	470,2	4,9	80. 0	540,3	0,3
21. 0	241,5	10,5	51. 0	475,1	4,7	81. 0	540,6	0,2
22. 0	252,0	10,3	52. 0	479,8	4,5	82. 0	540,8	0,1
23. 0	262,3	10,1	53. 0	484,3	4,2	83. 0	540,9	0,1
24. 0	272,4	9,9	54. 0	488,5	4,0	84. 0	541,0	0,0
25. 0	282,3	9,8	55. 0	492,5	3,8	85. 0	541,0	0,0
26. 0	292,1	9,7	56. 0	496,3	3,7	86. 0	541,0	0,0
27. 0	301,8	9,5	57. 0	500,0	3,5	87. 0	541,0	0,0
28. 0	311,3	9,3	58. 0	503,5	3,4	88. 0	541,0	0,0
29. 0	320,6	9,1	59. 0	506,9	3,2	89. 0	541,0	0,0
30. 0	329,7		60. 0	510,1		90. 0	541,0	

Au moyen des Tables précédentes, étant donné l'arc de l'ellipſe, on conclura facilement l'arc correſpondant du cercle inſcrit ; & réciproquement. On remarquera que ſi l'arc de l'ellipſe eſt donné, il faudra ſouſtraire la différence calculée dans les Tables, pour avoir l'arc du cercle inſcrit. Ce ſeroit le contraire ſi l'arc du cercle inſcrit étoit donné.

Quoique les Tables précédentes ne donnent les différences entre les arcs de l'ellipſe & les arcs correſpondans du cercle inſcrit, que de degrés en degrés, il eſt cependant facile d'en conclure les différences pour les quantités intermédiaires. Afin de faciliter cette opération, nous avons ajouté les différences ſecondes, qui ne ſont autre choſe que la variation des différences, correſpondante à un degré. Au moyen de cette colonne, une ſimple proportion ſera facilement connoître les quantités intermédiaires.

Fig. 4. (63.) Non-ſeulement on peut conclure de ces Tables, les différences entre les arcs PM, pm de l'ellipſe & du cercle inſcrit, qui ont leur origine au ſommet P du petit axe de l'ellipſe; on peut avoir également la différence entre deux arcs correſpondans quelconques MM', mm' de l'ellipſe & du cercle inſcrit, dont l'origine ne ſeroit pas au point P. Cette différence eſt égale à la différence des arcs PM', pm', moins la différence des arcs PM, pm. Ces remarques trouveront leur application dans la ſuite de cet Ouvrage.

Application des principes précédens, à l'exemple du §. 56.

(64.) Rien de plus ſimple que d'appliquer les Tables du §. 60, à l'exemple du §. 56 : en effet, nous avons vu que dans ce cas, $m'P = 41^d\,34'\,58''$; $P = 0^d\,55'\,51''$; $A = 89^d\,4'\,9''$. Dans la ſeconde Table du §. 60, je vois que la valeur de $\frac{90^d - A}{2} + \frac{206265'' \sin. 2A}{4r}$ qui convient à 89^d eſt de $3600''$. De cette quantité, je ſouſtrais $249''$, conformément à la remarque qui eſt à la ſuite de ces Tables; j'ai

donc pour valeur cherchée $3600'' - 249'' = 3351''$. Je prends le logarithme de $3351'' = 3,5251744$; je vois ensuite dans la première Table, que le logarithme correspondant à $m'P$, qui satisfait au Problème, $= - 2,5002000$ (car on peut se servir sans erreur appréciable du logarithme le plus prochain qui se trouve dans la Table); je soustrais ce logarithme de celui de $3351''$, & j'ai, comme dans l'exemple du §. 56, $10'',6$: c'est le nombre qu'il faut soustraire de P pour avoir p; on aura donc $p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4$.

(65.) On pourroit appliquer au même exemple, les Tables du §. 62. Dans ce cas, on chercheroit dans la première Table, la différence entre l'arc de l'ellipse & l'arc du cercle inscrit qui répond (§. 55) à l'arc P; c'est-à-dire à l'arc de $55' 51''$. Quoique cette différence ne se trouve pas précisément dans la Table; comme je vois que cette différence est de $20'',4$ lorsque l'arc est de 1 degré, & que la variation est de $20'',4$ pour 1 degré; j'en conclus que cette variation est d'environ $0'',34$ pour une minute, & que par conséquent la différence qui répond à l'arc de $55' 51''$, est de $20'',4 - 1'',36 = 19'',04$; je prends le logarithme de $19'',04$, j'ajoute le logarithme de $\frac{\text{cosin.}^2 m'P}{r^2}$, & j'ai, comme ci-dessus, $p = 55' 51'' - 10'',6 = 55' 40'',4$.

SEPTIÈME SECTION.

Des changemens qu'il faut faire à la solution précédente, lorsque la ligne que l'on considère n'est pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.

(66.) Dans la solution précédente, nous avons supposé que la ligne dont il s'agit, étoit perpendiculaire à la Méridienne au point de départ; il est question maintenant de faire voir quel changement l'on doit faire à cette solution,

lorſque la ligne n'eſt pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.

Soit

D l'angle que fait la ligne en queſtion, avec la Méridienne, au point de départ,

& conſervons toutes les définitions des §. 47 & ſuivans; on aura pour équation à la droite dont il s'agit, ſur le ſphéroïde,

$$(1)\ Y^2 du - \sqrt{(Y^2du^2 + r^2dx^2 + r^2dY^2)}\ \frac{Y' \text{ſin.} D}{r} = 0,$$

& pour équation au grand cercle correſpondant ſur la ſphère inſcrite,

$$(2)\ y^2 dv^2 - \sqrt{(y^2dv^2 + r^2dx^2 + r^2dy^2)}\ \frac{y' \text{ſin.} D}{r}.$$

D'ailleurs, les équations (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) & (10) ne changeront point; d'où l'on voit, que par une analyſe entièrement ſemblable à celle que nous avons ſuivie dans le §. 48, au lieu des équations (10) & (11) de ce paragraphe, on parviendra aux équations ſuivantes,

$$(3)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\int \frac{x^2\, dx}{r\sqrt{\left(r^2 - \frac{y'^2 \text{ſin.}^2 D}{r^2} - x^2\right)}};$$

ou enfin

$$(4)\ P + \text{conſt.} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\ \frac{\sqrt{\left(r^2 - \frac{y'^2 \text{ſin.}^2 D}{r^2}\right)}}{r}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{\left(r^2 - \frac{y'^2 \text{ſin.}^2 D}{r^2}\right)} \times \sqrt{\left(r^2 - \frac{y'^2 \text{ſin.}^2 D}{r^2} - x^2\right)}}.$$

Soit un cercle dont le rayon $= r'$; nous ſuppoſons d'ailleurs, que

$$(5)\ r' = \sqrt{\left(r^2 - \frac{y'^2 \text{ſin.}^2 D}{r^2}\right)}.$$

L'équation (4) du *paragraphe précédent*, deviendra

$$(6)\ P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2 r'}{r^3}\ \frac{x^2\, dx}{r'\sqrt{(r'^2 - x^2)}}.$$

Prenons ſur ce cercle une abſciſſe x, & nommons X l'arc correſpondant; l'analyſe nous apprend que

$$\int \frac{x^2 dx}{r'\sqrt{(r'^2 - x^2)}} = -\tfrac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r'^2 - x^2)}}{r'} + \tfrac{1}{2}X:$$

donc

$$(7)\quad P + \text{conſtante} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2 r'}{r^3}\left[\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r'^2 - x^2)}}{r'}\right].$$

(67.) Dans l'équation (7) du *paragraphe précédent*, x eſt le ſinus de l'arc X; mais cet arc & ce ſinus ne doivent pas être évalués dans le cercle qui a r pour rayon; ils doivent au contraire être évalués dans un cercle dont le rayon $= r'$. Si donc on veut rapporter la quantité $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{(r'^2 - x^2)}}{r'}$ au cercle dont le rayon $= r$, il faudra multiplier chacune des quantités qui la compoſent par $\frac{r}{r'}$; elle deviendra $\frac{1}{2}\frac{r}{r'}X - \frac{1}{2}\frac{rx}{r'}\frac{\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{r'^2})}}{r}$; & pour ne pas troubler l'équation, on multipliera le coëfficient $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 r'}{r^3}$ par $\frac{r'}{r}$: on aura alors

$$(1)\quad P + \text{conſt.} = p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{r'^2}{r^2}\left[\tfrac{1}{2}\frac{r}{r'}X - \tfrac{1}{2}\frac{\frac{rx}{r'}\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{r'^2})}}{r}\right],$$

& toutes les quantités ſeront évaluées dans le cercle dont le rayon $= r$, c'eſt-à-dire dans le cercle générateur de la ſphère inſcrite. Nous remarquerons que $\frac{rX}{r'}$ eſt l'arc dont $\frac{rx}{r'}$ eſt le ſinus, & dont $\sqrt{(r^2 - \frac{r^2x^2}{r'^2})}$ eſt le coſinus.

(68.) Soit $M'F$ une ligne du genre des perpendiculaires, tracée ſur le ſphéroïde, mais que l'on ſuppoſe faire un angle D avec le Méridien $M'P$, au point de départ; ſoit $m'F'$ la portion correſpondante du grand cercle, tracée ſur la ſphère inſcrite. Suppoſons l'arc $m'F'$ prolongé juſqu'à ce Fig. 5.

Fig. 5. qu'il rencontre un Méridien $\mu' P$ de la sphère inscrite, en un point μ', où il soit perpendiculaire à ce Méridien; il est évident, que dans le triangle sphérique $m' \mu' P$, rectangle en μ', & dont on connoît l'angle m', que nous avons nommé D, on aura

$$(1)\ \text{fin.}\ \mu' P = \frac{\text{fin.}\ m' P \times \text{fin.}\ D}{r} = \frac{y' \text{fin.}\ D}{r};$$

$\sqrt{(r^2 - \frac{y'^2 \text{fin.}^2 D}{r^2})}$ est donc le cosinus de l'arc $\mu' P$, & l'on a

$$(2)\ r' = \text{cofin.}\ \mu' P.$$

Nous avons vu de plus, que x est le sinus de la latitude corrigée du lieu F; soit donc A un angle que l'on déterminera de la manière suivante,

$$(3)\ \text{fin.}\ A = \frac{r \text{fin.}\ (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\text{cofinus}\ \mu' P},$$

on aura

$$(4)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left(\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \frac{\text{fin.}\ A\ \text{cof.}\ A}{r}\right),$$

ou à cause de $\tfrac{1}{2} \frac{\text{fin.}\ A\ \text{cof.}\ A}{r} = \tfrac{1}{4} \text{fin.}\ 2A$,

$$(5)\ P + \text{conftante} = p - \tfrac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left(\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{4} \text{fin.}\ 2A\right).$$

(69.) Nous obſerverons que, par la nature de la queſtion, P & p doivent être à la fois égaux à zéro, lorſque fin. (latitude corrigée du lieu F) = cofin. $m' P$. Si donc l'on nomme A' un angle particulier, que l'on déterminera de la manière ſuivante,

$$(1)\ \text{fin.}\ A' = \frac{r\ \text{cofin.}\ m' P}{\text{cofin.}\ \mu' P},$$

on aura, en ajoutant convenablement la conſtante,

$$(2)\ P = p + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left[\tfrac{1}{2}(A' - A) - \tfrac{1}{4}(\text{fin.}\ 2A' - \text{fin.}\ 2A)\right],$$

ou à cauſe de $\text{fin.}\ 2A' - \text{fin.}\ 2A = 2\ \text{cof.}\ (A' + A) \times \text{fin.}\ (A' - A)$,

$$(3)\ P = p + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cofin.}^2 \mu' P}{r^2} \left[\tfrac{1}{2}(A' - A) - \tfrac{1}{2} \frac{\text{cof.}\ (A' + A) \times \text{fin.}\ (A' - A)}{r}\right].$$

Soit maintenant

$$(4)\ k' = A' - A,$$

l'équation (3) deviendra

$$(5)\ P = p + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\frac{\text{cosin.}^2\mu'P}{r^2}\left[\frac{k'}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{\text{cos.}(2A' - k')\,\text{sin.}k'}{r}\right];$$

ou enfin, si l'on veut que les quantités P, p, A', k soient exprimées en degrés, minutes & secondes,

$$(6)\ P - p - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\frac{\text{cos.}^2\mu'P}{r^2}\left[\frac{k'}{2} - \frac{206265''\text{cos.}(2A' - k')\,\text{sin.}k'}{2r^2}\right] = 0.$$

(70.) Dans le triangle sphérique $m'P\mu'$, rectangle en μ', si l'on cherche l'expression du côté $\mu'm'$, on aura $\text{cos.}\,\mu'm' = \frac{r\,\text{cos.}\,m'P}{\text{cos.}\,\mu'P}$. Fig. 5.

Par la même raison, dans le triangle sphérique $\mu'PF'$, l'on aura

$$\text{cos.}\ \mu'F' = \frac{r\,\text{cos.}\ PF'}{\text{cos.}\ \mu'P} = \frac{r\ \text{sin.}\ (\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\text{cos.}\ \mu'P}.$$

On voit donc que l'angle A' est le complément du côté $\mu'm'$ du triangle sphérique $\mu'Pm'$; que l'angle A est le complément du côté $\mu'F'$ du triangle sphérique $\mu'PF'$; que par conséquent, puisque $A' = 90^d - \mu'm'$, & que $A = 90^d - \mu'F'$, l'on a

$$(1)\ k' = \mu'F' - \mu'm' = m'F' = p.$$

(71.) Reprenons maintenant les questions proposées dans les *§§. 53 & 54.* Examinons d'abord la première question; c'est-à-dire supposons qu'étant donné l'arc $m'P$ de la sphère inscrite, ainsi que la latitude du lieu F, l'on demande le nombre de toises que contient sur le sphéroïde, la ligne aboutissant au lieu F, que l'on suppose d'ailleurs faire avec la Méridienne $M'P$ un angle D au point de départ?

Rien de plus simple que la solution de cette question. En effet, puisque par la supposition, l'arc $m'P$, l'angle D & la latitude corrigée du lieu F sont connus; on connoîtra [*équations* (1) *&* (3) *du §. 68,* (1) *&* (4) *du §. 69*], l'arc $\mu'P$, les angles A, A', & l'arc k'. On connoîtra donc

Fig. 5. *[§. 70, équation* (1)*]*, la valeur de p; ainſi que toutes les quantités qu'il faut ſubſtituer dans l'équation (6) du *§. 69*, pour en conclure P.

(72.) Examinons maintenant la ſeconde queſtion; c'eſt-à-dire, ſuppoſons qu'étant donné l'arc $m'P$ de la ſphère inſcrite, & le nombre de toiſes que contient ſur le ſphéroïde, la ligne aboutiſſant au lieu F, que l'on ſuppoſe d'ailleurs faire avec la Méridienne $m'P$, un angle D au point de départ; on demande la latitude du lieu F!

On réduira d'abord P en degrés au moyen de l'équation (3) du *§. 52*; on remarquera enſuite que, puiſque par la ſuppoſition, l'arc $m'P$ & l'angle D ſont connus, l'arc $u'P$ & l'angle A' ſeront connus; d'ailleurs, puiſque *[§. 70, équat.* (1)*]* $k' = p$; & que dans l'équation (6) du *§. 69*, la quantité $\frac{k'}{2} - \frac{206265'' \text{coſ.} (2A' - k') \text{ſin.} k'}{2r^2}$ eſt multipliée par la fraction très-petite $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \times \frac{\text{coſ.}^2 \mu'P}{r^2}$; on peut ſuppoſer à cette équation la forme ſuivante,

$$(1)\ p = P - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{coſ.}^2 \mu'P}{r^2} \left[\frac{P}{2} - \frac{206265'' \text{coſ.} (2A' - P) \text{ſin.} P}{2r^2}\right];$$

on connoîtra donc la valeur de p. Mais *[équation* (4) *&* (1) *des §§. 69 & 70]*

$$(2)\ A = A' - p;$$

de plus *[équation* (3) *du §. 68]*,

$$(3)\ \text{ſin.}\ (\text{latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\text{ſin.} A \text{ coſ.} \mu'P}{r}.$$

La latitude corrigée du lieu F, & par conſéquent ſa latitude vraie, ſeront donc connues.

Quant à la longitude corrigée du lieu F; d'après les conſtructions précédentes, elle eſt évidemment égale à la différence des

des deux angles $\mu' P F'$, $m' P F'$; ou plutôt puisque dans le triangle $m' P' F'$, on connoît le côté $m' P$, l'angle $P m' F'$ égal à l'angle D, le côté PF' complément de la latitude corrigée du lieu F, & le côté $m' F'$ égal à p; l'on aura Fig. 5.

$$(4)\ \text{sin. (longitude corrigée)} = \frac{\text{sin.}\, p \times \text{sin.}\, D}{\text{cosin. (latitude corrigée du lieu } F)}.$$

Nous remarquerons enfin que comme les quantités p, P ne diffèrent que par des termes de l'ordre $\frac{\Delta^2}{r^2}$, on a aussi

$$(5)\ P = p + \tfrac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cosin.}^2 \mu' P}{r^2} \left[\frac{p}{2} - \frac{206265'' \text{cos.}(2A' - p) \text{sin.}\, p}{2 r^2} \right].$$

(73.) Il est aisé de voir que dans l'équation (1) du §. 72, le petit terme $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{cos.}^2 \mu' P}{r^2} \left[\frac{P}{2} - \frac{206265'' \text{cos.}(2A' - P) \text{sin.}\, P}{2 r^2} \right]$ peut se calculer facilement, au moyen des Tables du §. 62. Ce que je dirai de cette équation s'appliquera également aux équations (6) & (5) des §§. 69 & 72.

En effet, si l'on fait usage des Tables du §. 62, & que l'on nomme

γ l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par $90^d - A' + P$,

γ' l'excès de l'arc de l'ellipse sur l'arc correspondant du cercle inscrit, qui répond dans la Table, à l'arc qui a pour expression $90^d - A'$,

il est facile de démontrer que l'équation (1) du §. 72 deviendra

$$(1)\ P - p - \frac{\text{cosin.}^2 \mu' P}{r^2} (\gamma - \gamma') = 0.$$

Les Tables du §. 62, donnent donc avec la plus grande facilité le petit terme en question. Nous remarquerons que P est positif, lorsque la portion de la perpendiculaire que l'on considère se rapproche de l'Équateur; P seroit négatif dans le cas contraire.

Nous observerons enfin, que les équations de la sixième section se déduisent des équations de la section présente, en faisant $\text{sin.} D = r$, $\mu' P = m' P$, $\mu' m' = 0$, $A' = 90^d$, & $\gamma' = 0$.

HUITIÈME SECTION.

Détermination du rapport entre la Longitude vraie & la Longitude corrigée du lieu F.

Du cas où la ligne que l'on considère est perpendiculaire à la Méridienne au point de départ.

Fig. 2. (74.) Dans les *paragraphes précédens*, nous avons fait voir comment, étant donnée la distance FM' d'un lieu F, au Méridien d'un lieu M, mesurée sur la perpendiculaire à la Méridienne du lieu M, ainsi que la distance $M'M$ du pied de cette perpendiculaire au même lieu M, mesurée sur le Méridien de ce lieu; on déterminoit la latitude vraie du lieu F & sa longitude corrigée. Il s'agit maintenant de conclure la longitude vraie du lieu F, d'après la connoissance de sa longitude corrigée.

Pour y parvenir, on se rappellera que si l'on conserve les définitions du *§. 47*, auquel je renvoie, on a pour équation à la perpendiculaire à la Méridienne sur le sphéroïde,

$$(1)\ Y^2du - Y'\sqrt{(Y^2du^2 + r^2dx^2 + r^2dY^2)} = 0;$$

pour équation à la perpendiculaire corrigée sur la sphère inscrite,

$$(2)\ y^2dv - y'\sqrt{(y^2dv^2 + r^2dx^2 + r^2dy^2)} = 0.$$

De plus,

$$(3)\quad \rho y - rY = 0;$$
$$(4)\quad \rho y' - rY' = 0;$$
$$(5)\ \rho dy - rdY = 0;$$
$$(6)\ xdx + ydy = 0;$$
$$(7)\quad dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)};$$
$$(8)\quad dp = -\frac{ydk}{\sqrt{(y^2 - y'^2)}}.$$

Je remarque que les équations (2) & (1) du présent paragraphe peuvent avoir la forme suivante,

$$(9)\ dv = -\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = -\frac{y'rdk}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}};$$

$$(10)\ du = -\frac{Y'r}{Y\sqrt{(Y^2-Y'^2)}}\sqrt{(dx^2+dY^2)}.$$

Dans ces équations, nous avons donné à dv & du le ſigne *moins*, conformément à la remarque du §. 47.

Maintenant, à cauſe des équations (3) & (4) du préſent paragraphe, & que d'ailleurs $r^2 = \rho^2 - \Delta^2$, l'équation (10) peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(11)\ du = -\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}\sqrt{(dx^2+dy^2-\frac{\Delta^2 dx^2}{\rho^2})} = -\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}\sqrt{(dk^2-\frac{\Delta^2 dx^2}{\rho^2})}.$$

Je réduis $\sqrt{(dk^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2}dx^2)}$ en ſérie, & j'ai, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{\Delta^4}{\rho^4}$,

$$(12)\ du = -\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}\left(dk - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{dx^2}{dk}\right).$$

Mais $-\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}dk = dv$; de plus, puiſque, par la propriété du cercle, $\frac{dx^2}{dk} = \frac{y^2dk}{r^2}$, le terme $\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}} \times \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{dx^2}{dk}$ deviendra $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{y'}{r} \times \frac{ydk}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}$. Donc, à cauſe de $\frac{ydk}{\sqrt{(y^2-y'^2)}} = -dp$, l'on aura

$$(13)\ du = dv - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{y'}{r}dp;$$

ou en intégrant,

$$(14)\ u - v + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{y'}{r}p = 0;$$

car il n'y a point de conſtante à ajouter, puiſque par la nature du Problème, u, v & p ſont égaux à zéro, à l'origine des longitudes.

Il ſuit des définitions du §. 47, que $y' = \text{ſin. } m'P$; de plus, P & p ne diffèrent que d'une quantité de l'ordre $\frac{\Delta^2}{r^2}$; l'on a donc indiſtinctement

$$(15)\ \text{long. vraie} - \text{long. corr.} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{\text{ſin.}\, m'P}{r} \times \text{perp. corr.} = 0,$$

$$(16)\ \text{long. vraie} - \text{long. corr.} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} \times \frac{\text{ſin.}\, m'P}{r} \times \text{perp. vraie} = 0.$$

(75.) Nous obſerverons que l'on a les valeurs ſuivantes.

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

$$\log. \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} = -\,2{,}2516199.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

$$\log. \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} = -\,2{,}3038015.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

$$\log. \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} = -\,2{,}3608257.$$

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

$$\log. \tfrac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2} = -\,2{,}4791537.$$

(76.) On pourroit avoir beſoin, dans de certaines queſtions, de donner aux équations précédentes, une forme un peu différente. Suppoſons en effet, qu'étant données la latitude & la longitude vraies d'un lieu F, on veuille déterminer le point M' où la perpendiculaire FM' à la Méridienne d'un lieu M, menée par le lieu F, rencontre la Méridienne du lieu M; ainſi que la diſtance FM' entre ce point de rencontre & le lieu F, meſurée ſur la perpendiculaire en queſtion. Dans ce cas, dans le triangle ſphérique $m'PF'$ de la ſphère inſcrite, rectangle en m', on connoîtra bien le côté PF' complément de la latitude corrigée du point F; mais toutes les autres parties du triangle ſeront inconnues. On peut obſerver cependant que ſi dans ce triangle, l'on détermine les côtés $m'P$ & $m'F'$, en ſuppoſant l'angle $m'PF'$ égal à la longitude vraie donnée, on aura

Fig. 2.

$$(1)\ \text{ſin.}\ (m'F'\ \text{approché}) = \frac{\text{ſin. (longit. vraie) coſ. (latit. corr. du lieu } F)}{r};$$

$$(2)\ \text{tang.}\ (m'P\ \text{approché}) = \frac{\text{coſ. (long. vr.) cotang. (latit. corr. du lieu } F)}{r};$$

& ces valeurs feront exactes, aux termes près de l'ordre $\frac{\Delta^3}{r^3}$. Mais comme ces valeurs entrent dans un terme qui eſt multiplié par $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}$, l'on aura

$$(3)\ \text{long. corr.} = \text{long. vraie} + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin.}(m'P\ \text{approché})}{r} \times m'F'\ \text{approché};$$

& cette équation fera vraie, aux termes près de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$.

EXEMPLE.

(77.) *Je ſuppoſe un lieu ſitué à la diſtance de 52902 toiſes de la Méridienne de Paris, priſes ſur une perpendiculaire à cette Méridienne, du côté de l'Orient; je ſuppoſe de plus, que la perpendiculaire qui paſſe par ce lieu, rencontre la Méridienne de Paris, à la diſtance de 14823 toiſes du côté du Midi; on demande la longitude de ce lieu!*

SOLUTION. Nous avons vu qu'en ſuppoſant les axes de la Terre, dans le rapport de 177 à 178; on a $m'P = 41^d\ 34'\ 58''$; $p = 0^d\ 55'\ 40''$; longitude corrigée $= 1^d\ 23'\ 52''$. Donc

$$\text{longit. vraie} = \text{long. corr.} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin.}m'P}{r}\ \text{perpendiculaire corrigée}$$

$= 1^d\ 23'\ 52'' - 12'' = 1^d\ 23'\ 40''$.

Par de ſemblables calculs, on trouvera les valeurs ſuivantes.

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

$m'P = 41^d\ 34'\ 58''$; perpendiculaire corrigée $= 0^d\ 55'\ 40''$.
Longitude corrigée........................ $= 1^d\ 23'\ 52''$.
Longitude vraie........................ $= 1.\ 23.\ 40$.

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

$m'P = 41^d\ 33'\ 52''$; perpendiculaire corrigée $= 0^d\ 55'\ 40''$.
Longitude corrigée........................ $= 1^d\ 23'\ 54''$.
Longitude vraie........................ $= 1.\ 23.\ 43$.

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

$m'P = 41^d\ 32'\ 46''$; perpendiculaire corrigée $= 0^d\ 55'\ 39''$.
Longitude corrigée........................ $= 1^d\ 23'\ 56''$.
Longitude vraie........................ $= 1.\ 23.\ 47$.

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

$m'P = 41^d\ 31'\ 1''$; perpendiculaire corrigée $= 0^d\ 55'\ 39''$.
Longitude corrigée........................ $= 1^d\ 24'\ 2''$.
Longitude vraie.......................... $= 1.\ 23.\ 53$.

Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.

$m'P = 41^d\ 25'\ 21''$; perpendiculaire corrigée $= 0^d\ 55'\ 37''$.
Longitude vraie.......................... $= 1^d\ 24'\ 5''$.

Nous remarquerons en finissant, que le lieu que nous avons mis en exemple, est le château de Saron, qui appartient à M. le Président de Saron, notre confrère. Ce lieu est connu par les bonnes observations qui y ont été faites, soit par M. de Saron, soit par M. Messier.

Estimation de l'erreur du terme négligé dans la formule du §. 74.

(78.) Le terme que nous avons négligé dans la formule du *§. 74*, a la forme suivante, $-\frac{1}{8}\frac{\Delta^4}{\rho^4}\int\frac{y'r}{y\sqrt{(y^2-y'^2)}}\times\frac{dx^4}{dk^3}$. Par la propriété du cercle,

$$\frac{dx^4}{dk^3} = \frac{y^4\,dk}{r^4} = \frac{y^2}{r^2}\times\frac{(r^2-x^2)}{r^2}\,dk = \frac{y^2}{r^2}\,dk - \frac{x^2y^2dk}{r^4}:$$

de plus, $dk = \frac{r\,dx}{y}$; donc $\frac{dx^4}{dk^3} = \frac{y^2dk}{r^2} - \frac{x^2y\,dx}{r^3}$. Le terme négligé peut donc être mis sous la forme qui suit,

$$\frac{1}{8}\frac{\Delta^4}{\rho^4}\times\frac{y'}{r}\left[-\int\frac{y}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}\,dk + \int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(y^2-y'^2)}}\right].$$

Mais $-\int\frac{y}{\sqrt{(y^2-y'^2)}}dk = p$; d'ailleurs, $\sqrt{(y^2-y'^2)} = \sqrt{(x'^2-x^2)}$; donc $\int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(y^2-y'^2)}} = \int\frac{x^2\,dx}{r\sqrt{(x'^2-x^2)}} = \frac{x'}{r}\int\frac{x^2\,dx}{x'\sqrt{(x'^2-x^2)}}$.

Il suit des *§. 49, 50 & 51*, que si l'on nomme A un angle, tel que $\text{sin.}\,A = \frac{r\,\text{sin.}\,(\text{latitude corrigée du lieu } F)}{\text{cosin.}\,m'P}$, & que l'on

ajoute convenablement la constante,

$$\frac{x'}{r}\int\frac{x^2 dx}{x'\sqrt{(x'^2-x^2)}}=-\frac{x'^2}{r^2}\left(\frac{90^d-A}{2}+\frac{206265''\text{sin.}2A}{4r}\right).$$

Enfin $y'=\text{sin.}\,m'P$; $x'=\text{cosin.}\,m'P$; on a donc pour expression du terme négligé dans la formule,

$$\frac{1}{8}\frac{\Delta^4}{\rho^4}\times\frac{\text{sin.}m'P}{r}\left[\text{perpendiculaire}-\frac{\text{cosin.}^2 m'P}{r^2}\left(\frac{90^d-A}{2}+\frac{206265''\text{sin.}2A}{4r}\right)\right].$$

(79.) Le *maximum* de l'erreur du terme négligé a évidemment lieu pour une perpendiculaire menée sous l'Équateur; le terme négligé auroit alors la forme suivante, $\frac{1}{8}\frac{\Delta^4}{\rho^4}\times$ perpend. car dans ce cas, sin. $m'P=r$, & cosin. $m'P=0$. L'erreur seroit proportionnelle à la grandeur de la perpendiculaire, & elle monteroit à 8″ dans le cas d'un arc de 360^d. On peut donc, dans tous les cas, négliger le terme en question.

Du cas où la ligne que l'on considère, n'est pas perpendiculaire à la Méridienne, au point de départ.

(80.) Si l'on conserve toutes les définitions précédentes, & que l'on nomme de plus

D l'angle que fait la courbe dont il s'agit avec la Méridienne au point de départ,

au lieu des équations (1) & (2) du §. 74, l'on aura

$$(1)\quad Y^2du-\sqrt{(Y^2du^2+r^2dx^2+r^2dY^2)}\,\frac{Y'\,\text{sin.}\,D}{r}=0;$$

$$(2)\quad y^2dv-\sqrt{(y^2dv^2+r^2dx^2+r^2dy^2)}\,\frac{y'\,\text{sin.}\,D}{r}=0;$$

toutes les autres équations du §. 74 restant d'ailleurs les mêmes. Donc par une analyse entièrement semblable à celle de ce paragraphe, on parviendra aux équations suivantes,

$$(3)\ \text{long. vr.}-\text{long. corr.}+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{sin.}m'P\times\text{sin.}D}{r^2}\text{ perpend. corr.}=0;$$

$$(4)\ \text{long. vr.}-\text{long. corr.}+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{sin.}m'P\times\text{sin.}D}{r^2}\text{ perpend. vraie}=0;$$

NEUVIÈME SECTION.

De l'Angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu F.

(81.) Je dois encore déterminer l'angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu *F.* Ce Problème eſt facile à réſoudre. Nous avons vu en effet *(§. 11)* que ſi l'on nomme

Y' l'ordonnée à l'ellipſe au point de départ,

y' l'ordonnée correſpondante du cercle inſcrit,

Y l'ordonnée à l'ellipſe au point F,

y l'ordonnée correſpondante du cercle inſcrit,

on a

(1) Y ſin. (angle de la courbe avec le Méridien du lieu F) $= Y'r$;

mais $Y = \frac{\rho y}{r}$, & $Y' = \frac{\rho y'}{r}$; donc

(2) y ſin. (angle de la courbe avec le Méridien du lieu F) $= y'r$,

ou enfin

(3) ſin. (ang. de la perp. avec le Mér. du lieu F) $= \frac{r \text{ coſ. (lat. cor. du point de dép.)}}{\text{coſ. (latit. corrig. du lieu } F)}$.

Si la ligne n'étoit point perpendiculaire à la Méridienne au point de départ, & qu'elle fit avec ce Méridien un angle D, on auroit

(4) ſin. (ang. courbe avec le Mér. du lieu F) $= \frac{\text{ſin. } D \text{ (coſ. lat. cor. du point de dép.)}}{\text{coſin. (latit. corrigée du lieu } F)}$.

(82.) Puiſque nous venons de déterminer l'angle de la
Fig. 2. ligne FM', avec le Méridien du lieu F, il eſt évident que nous connoiſſons pareillement l'angle de la perpendiculaire à la ligne FM', avec le même Méridien du point F; car ces deux angles diffèrent entre eux de 90 degrés.

(83.)

(83.) Si l'on cherche l'angle que fait avec les différens Méridiens de la ſphère inſcrite, le grand cercle de cette ſphère, que l'on ſubſtitue dans le calcul, à la ligne tracée ſur le ſphéroïde; on verra que ce grand cercle fait avec les différens Méridiens, ſous les latitudes corrigées correſpondantes aux latitudes vraies, un angle égal à celui formé ſur le ſphéroïde par la ligne en queſtion, avec les Méridiens ſucceſſifs qu'elle rencontre. Cette propriété méritoit d'être remarquée; & elle caractériſe le grand cercle de la ſphère inſcrite, que nous ſubſtituons à la ligne tracée ſur le ſphéroïde.

Sur les uſages des propriétés précédentes pour la vérification des perpendiculaires.

(84.) Les propriétés que nous venons de démontrer, relativement aux angles que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec les différens Méridiens qu'elle rencontre, peuvent fournir un moyen aſſez ſimple pour vérifier cette perpendiculaire, lorſqu'on la trace ſur le ſphéroïde. Il ne s'agit que d'obſerver la latitude du lieu d'arrivée, & l'angle que fait la perpendiculaire avec le Méridien de ce lieu. Comme on connoît alors la latitude corrigée du lieu d'arrivée, ainſi que celle du lieu de départ, l'on vérifiera facilement ſi l'angle obſervé de la perpendiculaire avec le Méridien dont il s'agit, eſt le même que celui donné par le calcul; cette vérification pourra ſervir à aſſurer l'exactitude des opérations, en ſuppoſant toutefois que notre globe ſoit un ſphéroïde.

(85.) On peut objecter que la méthode eſt en quelque ſorte hypothétique, puiſque l'on eſt obligé de faire uſage des latitudes corrigées, dont la détermination dépend du rapport hypothétique des axes de la Terre. Cependant, ſi l'on fait réflexion que pour toutes les hypothèſes plauſibles ſur le rapport des axes de la Terre, l'erreur qui peut réſulter dans l'eſtimation de la fraction $\frac{\text{coſ. (latitude corrigée du point de départ)}}{\text{coſ. (latitude corrigée du lieu } F\text{)}}$ eſt infiniment plus petite que celle qui peut réſulter des opérations

géodéſiques, on ſera tenté de ne pas négliger le moyen que nous préſentons.

Pour s'en convaincre, ſoit

L la latitude corrigée du point de départ employée dans le calcul;
L' la latitude corrigée du lieu F employée dans le calcul;
$L + \alpha$ la latitude corrigée du point de départ que l'on auroit dû employer;
$L' + \alpha + d\alpha$ la latitude corrigée du lieu F que l'on auroit dû employer.

La fraction que l'on auroit dû employer dans le calcul ſera $\frac{\text{coſ.}(L + \alpha)}{\text{coſ.}(L' + \alpha + d\alpha)}$, au lieu de la fraction $\frac{\text{coſ.}L}{\text{coſ.}L'}$ que l'on a réellement employée. Mais on ſait que

$$\text{coſ.}(L' + \alpha + d\alpha) = \text{coſ.}L' - \frac{(\alpha + d\alpha)}{r}\text{ſin.}L';$$

$$\text{coſ.}(L + \alpha) = \text{coſ.}L - \frac{\alpha}{r}\text{ſin.}L;$$

la véritable fraction pourra donc être miſe ſous la forme ſuivante,

$$\frac{\text{coſ.}L - \frac{\alpha}{r}\text{ſin.}L}{\text{coſ.}L' - \frac{(\alpha + d\alpha)\text{ſin.}L'}{r}} = \frac{\text{coſ.}L}{\text{coſ.}L'} + \frac{\alpha\,\text{ſin.}(L' - L)}{\text{coſ.}^2 L'} + \frac{d\alpha\,\text{ſin.}L'\,\text{coſ.}L}{r\,\text{coſ.}^2 L'}.$$

Or, cette fraction ſe réduit, ſans erreur ſenſible, au ſeul terme $\frac{\text{coſ.}L}{\text{coſ.}L'}$; attendu que, ſi l'on prend le rapport moyen des axes de la Terre, α ne peut jamais ſurpaſſer $2'$ de degrés, & que $d\alpha$ eſt très-petit.

(86.) Au moyen des équations qui expriment l'angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne avec les différens Méridiens ſucceſſifs qu'elle rencontre; étant donné l'angle que fait une courbe du genre des perpendiculaires, avec un certain Méridien ſous une latitude connue, on peut déterminer, 1.° l'angle qu'elle fera avec le Méridien qu'elle rencontrera ſous une autre latitude; 2.° le parallèle où elle ſera perpendiculaire au Méridien, c'eſt-à-dire, la latitude du ſommet de la perpendiculaire. Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ces queſtions. En effet, ſi l'on nomme

D' l'angle de la ligne avec les Méridiens successifs,

D l'angle de la ligne avec un Méridien particulier sous une certaine latitude,

on a

(1) sinus D cosinus (latitude corrigée du lieu qui observe l'angle D) — sin. D' cosin. (latit. corrigée du lieu qui observe l'angle D') $=$ o.

On connoîtra donc facilement l'angle D' qu'elle fera sous une autre latitude quelconque, au moyen de l'équation

(2) sin. $D' =$ sin. D $\dfrac{\text{cos. (latitude corrigée du lieu qui observe l'angle } D)}{\text{cosin. (latitude corrigée du lieu pour lequel on calcule)}}$.

On connoîtra enfin la latitude du lieu où elle sera perpendiculaire au Méridien, en supposant sin. $D' = r$ dans l'équation (1); & l'on aura

(3) cosinus (latitude corrigée du sommet de la perpendiculaire) $= \dfrac{\text{sin. } D}{r}$ cosinus (latitude corrigée du lieu qui observe l'angle D).

Ces méthodes peuvent être utiles lorsque l'on trace une courbe du genre des perpendiculaires, afin de connoître la perpendiculaire que l'on trace, la latitude de son sommet, & de pouvoir rectifier ses opérations.

REMARQUE sur les équations (3) & (4) du §. 81.

(87.) On peut faire la remarque suivante sur les équations (3) & (4) du *§. 81.* Dans le cas où la ligne est perpendiculaire à la Méridienne, vers le sommet de la courbe, les angles de cette courbe avec les Méridiens qu'elle rencontre, diffèrent peu de 90^d; & par conséquent la moindre inexactitude dans le calcul de ces angles, pourroit conduire à un résultat assez différent du véritable résultat. On évitera cet inconvénient en se servant des formules suivantes, Fig. 5.

Lorsque la courbe est perpendiculaire au Méridien de départ,

(1) tang. (angle de la courbe avec le Méridien du lieu F) $= \dfrac{r \text{ tang. } m'P}{\text{sin. } p}$;

Fig. 5. *Lorsque la courbe fait un angle* D *avec le Méridien de départ,*

(2) tang. (angle de la courbe avec le Mér. du lieu F) $= \frac{r \text{ tang. } \mu' P}{\text{sin. } (p + \mu' m')}$;

l'arc $\mu' m'$ ayant d'ailleurs pour expression

$$(3) \text{ sin. } \mu' m' = \frac{r \text{ tang. } \mu' P}{\text{tang. } D}.$$

DIXIÈME SECTION.

Examen de l'erreur des résultats des Sections précédentes, dans le cas où les données employées dans les calculs, différeroient tant soit peu des véritables données du Problème.

(88.) Il pourroit arriver que les données employées dans le calcul, différassent tant soit peu des véritables données du Problème; il est utile de pouvoir apprécier l'erreur des résultats dans cette hypothèse. Nous supposerons donc que la véritable valeur de $m'P$ diffère tant soit peu de celle employée dans le calcul; qu'il en est de même de l'angle D, c'est-à-dire de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien au point de départ; nous supposerons que le véritable rapport des axes de la Terre n'est pas précisément celui employé dans le calcul; que la véritable perpendiculaire sur le sphéroïde, diffère de celle dont on a fait usage; & nous allons donner l'expression de l'erreur qui résulte de ces différences, soit dans la latitude du lieu F, soit dans la longitude de ce lieu, soit dans l'angle que fait la ligne dont il s'agit avec le Méridien du lieu F.

De la variation de l'arc m'P.

Fig. 2. (89.) Si l'on nomme

K l'arc MM' de l'ellipse,
k l'arc mm' correspondant du cercle inscrit,
a la latitude corrigée du lieu M,
ρ le demi-grand axe de l'ellipse,
r le demi-petit axe,

on a (55. 34 & 36) Fig. 2.

(1) $m'P = 90^d - a - k;$

(2) $k = K - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{K}{2} - \frac{\text{cos.}\,(2a + K)\,\text{sin.}\,K}{2r}\right];$

donc

(3) $d(\text{arc}\ m'P) = - da - dk.$

De plus, si dans la différenciation de l'équation (2), l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coëfficient $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}$, attendu que ces termes ne donneroient qu'un résultat inappréciable, l'on aura

(4) $dk = dK - 2\,(K - k)\,\frac{d\Delta}{\Delta};$

donc enfin

(5) $d(\text{arc}\ m'P) = - da - dK + 2\,(K - k)\,\frac{d\Delta}{\Delta}.$

(90.) Nous observerons que da peut varier de deux façons, 1.° parce que l'on n'aura pas employé la véritable latitude du lieu M; 2.° parce que cette latitude étant bien connue, on aura conclu la latitude corrigée d'après une hypothèse inexacte sur le rapport des axes terrestres. Pour déterminer ce qui résulte de ces deux sources d'erreur, on se rappellera que l'on a l'équation suivante,

(1) tang. (latitude corrigée) $= \frac{r}{\rho}$ tang. (latitude vraie);

donc

(2) $da = \frac{r}{\rho}\,\frac{\text{cosin.}^2\,(\text{latit. corr. du lieu } M)}{\text{cosin.}^2\,(\text{latitude vraie du lieu } M)}\,d\,(\text{lat. vraie du lieu } M)$

$- 206265''\,\frac{r}{\rho}\,\frac{\text{cos.}^2\,(\text{lat. corr. du lieu } M)\,\text{tang.}\,(\text{lat. vraie du lieu } M)}{r^3}\,\frac{d\rho}{\rho}.$

Mais on peut supposer dans cette dernière équation, que $r = \rho$, cosinus (latitude corrigée) = cosinus (latitude vraie); d'ailleurs

$\frac{\text{ſin. (latit. vraie) coſ. (latit. vraie)}}{r} = \frac{1}{2}$ ſin. (2 latit. vraie). Donc enfin

$$(3)\ da = d(\text{latit. du lieu } M) - 206265'' \frac{\text{ſin. (2 lat. vraie du lieu } M)}{2r} \frac{dp}{r}.$$

De la variation de la perpendiculaire corrigée.

Fig. 5. (91.) Si l'on nomme

P la perpendiculaire tracée ſur le ſphéroïde,

p la ligne correſpondante tracée ſur la ſphère inſcrite,

D l'angle de la perpendiculaire dont eſt queſtion avec le Méridien de départ,

$\mu'P$ un arc tel que l'on ait (1) $\text{ſin. } \mu'P = \frac{\text{ſin. } m'P \text{ ſin. } D}{r}$,

A' un angle tel que l'on ait (2) $\text{ſin. } A' = \frac{r \text{ coſ. } m'P}{\text{coſ. } \mu'P}$,

on a (§. 72)

$$(3)\ p = P - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} \frac{\text{coſ.}^2 \mu'P}{r^2} \left[\frac{P}{2} - \frac{\text{coſ. } (2A' - P) \text{ ſin. } P}{2r}\right].$$

Si donc, dans la différenciation de cette équation, l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coëfficient $\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2}$, conformément à la remarque du §. 89, on aura

$$(4)\ dp = dP - 2(P - p) \frac{d\Delta}{\Delta}.$$

De la variation de la latitude du lieu F.

(92.) Si l'on nomme

$\mu'm'$ un arc tel que l'on ait (1) $\text{ſin. } (\mu'm') = \frac{r \text{ tang. } \mu'P}{\text{tang. } D}$,

A un angle tel que l'on ait (2) $A = 90^d - \mu'm' - p$,

on a vu (§. 72) que

$$(3)\ \text{ſinus (latitude corrigée du lieu } F) = \frac{\text{ſin. } A \text{ coſ. } \mu'P}{r}.$$

Il faut donc, pour avoir la variation de la latitude, déterminer les variations des arcs $\mu'P$, $\mu'm'$ & de l'angle A.

De la variation de l'arc $\mu'P$. Fig. 5.

(93.) Puisque (§. 91)

$$(1)\ \text{fin.}\ \mu'P = \frac{\text{fin.}\ m'P\ \text{fin.}\ D}{r},$$

on aura

$$(2)\ d(\text{arc}\ \mu'P) = \frac{\text{fin.}\ D\ \text{cof.}\ m'P}{r\ \text{cof.}\ \mu'P}\ d(\text{arc}\ m'P) + \frac{\text{fin.}\ m'P\ \text{cof.}\ D}{r\ \text{cof.}\ \mu'P}\ dD.$$

Mais $r\,\text{fin.}\ \mu'P = \text{fin.}\ D\,\text{fin.}\ m'P$; donc $\frac{\text{fin.}\ D\,\text{cof.}\ m'P}{r\,\text{cof.}\ \mu'P} = \frac{\text{tang}\ \mu'P}{\text{tang.}\ m'P}$,
& $\frac{\text{fin.}\ m'P\,\text{cof.}\ D}{r\,\text{cof.}\ \mu'P} = \frac{\text{tang.}\ \mu'P}{\text{tang.}\ D}$; donc

$$(3)\ d(\text{arc}\ \mu'P) = \frac{\text{tang.}\ \mu'P}{\text{tang.}\ m'P}\ d(\text{arc}\ m'P) + \frac{\text{tang.}\ \mu'P}{\text{tang.}\ D}\ dD.$$

Donc enfin,

$$(4)\ d(\text{arc}\mu'P) = \frac{\text{tang.}\mu'P}{\text{tang.}m'P}\left[2(K-k)\frac{d\Delta}{\Delta} - da - dK\right] + \frac{\text{tang.}\mu'P}{\text{tang.}\ D}\ dD.$$

De la variation de l'arc μ'm'.

(94.) Puisque (§. 92)

$$(1)\ \text{fin.}\ \mu'm' = \frac{r\ \text{tang.}\ \mu'P}{\text{tang}\ D},$$

on aura

$$(2)\ d(\text{arc}\mu'm') = \frac{r^4}{\text{cof.}\ \mu'm'\ \text{cof.}^2\ \mu'P\ \text{tang.}\ D}\ d(\text{arc}\mu'P) - \frac{r^4\ \text{tang.}\ \mu'P}{\text{cof.}\ \mu'm'\ \text{cof.}^2\ D\ \text{tang.}^2\ D}\ dD.$$

Mais $r\ \text{tang.}\ \mu'P = \text{fin.}\ \mu'm'\ \text{tang.}\ D$;

d'ailleurs, $\frac{\text{fin.}\ \mu'P \times \text{cof.}\ \mu'P}{r} = \frac{1}{2}\text{fin.}\ 2\ \mu'P$,

& $\frac{\text{fin.}\ D \times \text{cof.}\ D}{r} = \frac{1}{2}\text{fin.}\ 2\ D$;

donc $\frac{r^4}{\text{cof.}\ \mu'm'\ \text{tang.}\ D\ \text{cof.}^2\ \mu'P} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{tang.}\ \mu'm'}{\text{fin.}\ 2\ \mu'P}$,

& $\frac{r^4\ \text{tang.}\ \mu'P}{\text{cof.}\ \mu'm'\ \text{cof.}^2\ D\ \text{tang.}^2\ D} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{tang.}\ \mu'm'}{\text{fin.}\ 2\ D}$:

Fig. 5. donc

$$(3)\ d(\text{arc}\,\mu' m') = \tfrac{1}{2}\frac{\text{tang.}\,\mu' m'}{\text{sin.}\,2\,\mu' P}\,d(\text{arc}\,\mu' P) - \tfrac{1}{2}\frac{\text{tang.}\,\mu' m'}{\text{sin.}\,2\,D}\,dD;$$

& comme $d(\text{arc}\,\mu' P)$ eſt connu en variations d'élémens, la queſtion eſt réſolue.

De la variation de l'angle A, *& de la latitude du lieu* F.

(95.) Puiſque *(§. 92)*

$$(1)\ A = 90^d - \mu' m' - p,$$

on a

$$(2)\ dA = -\,d(\text{arc}\,\mu' m') - dp;$$

donc

$$(3)\ dA = -\tfrac{1}{2}\frac{\text{tang.}\,\mu' m'}{\text{sin.}\,2\,\mu' P}\,d(\text{arc}\,\mu' P) + \tfrac{1}{2}\frac{\text{tang.}\,\mu' m'}{\text{sin.}\,2\,D}\,dD - dP + 2\,(P - p)\frac{d\Delta}{\Delta}.$$

(96.) Il eſt facile maintenant d'avoir l'expreſſion de la variation de la latitude du lieu *F.* On aura d'abord, à cauſe de l'équation (3) du *§. 92*,

$$(1)\ d(\text{lat. corrig.}\,F) = \frac{\text{cos.}\,\mu' P\,\text{cos.}\,A}{r\,\text{cos.}\,(\text{lat. corr. du lieu}\,F)}\,dA - \frac{\text{sin.}\,A\,\text{sin.}\,\mu' P}{r\,\text{cos.}\,(\text{lat. corr. du lieu}\,F)}\,d(\text{arc}\,\mu' P).$$

Mais r ſin. (latitude corrigée du lieu F) $=$ ſin. A coſ. $\mu' P$; donc

$$(2)\ d(\text{lat. corr. du lieu}\,F) = \frac{\text{tang.}\,(\text{latit. du lieu}\,F)}{\text{tang.}\,A}\,dA - \frac{\text{tang.}\,(\text{latit. du lieu}\,F)}{\text{cotang.}\,\mu' P}\,d(\text{arc}\,\mu' P):$$

De plus, à cauſe de l'équation (1) du *§. 90*,

$$(3)\ d(\text{latitude vraie}) = d\,(\text{latitude corrigée}) + 206265''\ \frac{\text{sin.}\ 2\ (\text{latitude})}{2\,r}\ \frac{d\rho}{r};$$

& comme dA & $d(\text{arc}\,\mu' P)$ ſont connus en variations d'élémens, la queſtion eſt réſolue.

De la variation de la longitude du lieu F.

(97.) Nous avons vu *(§§. 72 & 80)* que l'on a les deux équations ſuivantes,

(1) longitude

$$(1)\ \text{longitude vraie} = \text{longit. corrigée} - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{fin.}\,m'P \times \text{fin.}\,D}{r^2}\ \text{perpend.}$$

$$(2)\ \text{fin. (longitude corrigée du lieu } F) = \frac{\text{fin.}\,p \times \text{fin.}\,D}{\text{cof. (latit. corrigée du lieu } F)}.$$

Si donc dans la différenciation de l'équation (1) l'on n'a point égard aux différentielles multipliées par le coëfficient $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}$, on aura

$$(3)\ d(\text{longit. vraie}) = d(\text{longit. corr.}) - 2\,(\text{longit. corr.} - \text{longit. vraie})\,\frac{d\Delta}{\Delta}.$$

De plus, à cause de l'équation (2), on a

$$(4)\ d(\text{longit. corr.}) = \frac{\text{fin.}\,D\ \text{fin.}\,p}{\text{cof. (latitude corrigée)}} \times \frac{\text{cof.}\,D}{\text{fin.}\,D\,\text{cof. (long. corrigée)}}\,dD$$
$$+ \frac{\text{fin.}\,D\ \text{fin.}\,p}{\text{cof. (latitude corrigée)}} \times \frac{\text{cof.}\,p}{\text{fin.}\,p\,\text{cof. (longit. corrigée)}}\,dp$$
$$+ \frac{\text{fin.}\,D\ \text{fin.}\,p}{\text{cof. (lat. corr.)}} \times \frac{\text{fin. (latitude corrigée)}}{\text{cof. (lat. corr.) cof. (long. corr.)}}\,d(\text{lat. corr.})$$
$$= \frac{\text{fin. (long. corr.)}}{\text{cof. (long. cor.)}} \times \frac{\text{cof.}\,D}{\text{fin.}\,D}\,dD + \frac{\text{fin. (long. corr.)}}{\text{cof. (long. corr.)}} \times \frac{\text{cof.}\,p}{\text{fin.}\,p}\,dp$$
$$+ \frac{\text{fin. (long. corr.)}}{\text{cof. (long. corr.)}} \times \frac{\text{fin. (latit. corr.)}}{\text{cof. (latit. corr.)}}\,d\,(\text{latit. corrigée}).$$

Donc enfin, en n'ayant point égard dans l'évaluation des coëfficiens, à la petite différence entre la latitude vraie & la latitude corrigée, la longitude vraie & la longitude corrigée,

$$(5)\ d(\text{long. corr. du lieu } F) = \frac{\text{tang. (long. } F)}{\text{tang. } D}\,dD + \frac{\text{tang. (long. } F)}{\text{tang. } p}\,dp$$
$$+ \frac{\text{tang. (longitude } F)}{\text{cotang. (latit. du lieu } F)}\,d\,(\text{latit. corr. } F).$$

Et comme dp & d (latitude corrigée du lieu F) sont connus en variations d'élémens, la queſtion eſt réſolue.

De la variation de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu F.

(98.) Nous avons vu *(§. 81)* que l'on avoit l'équation ſuivante,

$$(1)\ \text{fin. (angle de la perp. avec le Mér. du lieu } F) = \frac{\text{fin. } D \times \text{fin. } m'P}{\text{cof. (lat. corr. du lieu } F)};$$

on parviendra donc, par une analyſe entièrement ſemblable à celle du *paragraphe précédent*, à l'équation ſuivante,

$$(2)\ d(\text{angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu } F) = \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{tang. } D}\, dD + \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{tang. } m'P}\, d(\text{arc } m'P) + \frac{\text{tang. (angle de la perpend. avec le Mérid. } F)}{\text{cotang. (latitude du lieu } F)}\, d(\text{latit. corr. } F).$$

Au moyen des équations que nous venons de démontrer, on appréciera facilement les variations qu'un petit changement dans les élémens, apporteroit dans les réſultats des ſections précédentes.

Du cas où la ligne eſt perpendiculaire au Méridien de départ.

(99.) Il eſt rare que l'on ait beſoin de faire uſage des calculs précédens dans toute leur généralité; mais il y a un cas particulier qui ſe préſente ſi communément, que j'ai cru devoir m'en occuper avec quelque détail; c'eſt celui où la ligne eſt perpendiculaire au Méridien de départ.

La condition de la perpendicularité au Méridien de départ, ne change rien aux équations (5) du *§. 89*, (3) du *§. 90*, (4) du *§. 91*, (3) du *§. 97*. Quant à l'équation (4) du

Fig. 5. *§. 93*, à cauſe de $\mu'P = m'P$, & de tangente $D =$ infini, elle devient

$$(1)\ d(\text{arc } \mu'P) = d(\text{arc } m'P) = 2(K-k)\frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da.$$

A cauſe de $\text{ſin.}\,\mu'm' = 0$; $\text{coſ.}\,\mu'm' = r$; $\text{tang.}\,\mu'm' = 0$; $\text{coſ.}^2 D\ \text{tang.}^2 D = r^4$; l'équation (3) du *§. 94* devient

$$(2)\ d(\text{arc } \mu'm') = -\frac{\text{tang. } m'P}{r}\, dD,$$

& l'équation (3) du *§. 95*, devient

$$(3)\ dA = \frac{\text{tang.} m'P}{r}\, dD - dP + 2(P-p)\frac{d\Delta}{\Delta};$$

De plus, l'angle A eſt alors le complément de p.

(100.) Il suit de ces remarques, que l'on a

$$(1)\ d(\text{latitude corr. } F) = \frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{cotang. } p}\left[2\,(P-p)\frac{d\Delta}{\Delta} - dP\right]$$

$$-\frac{\text{tang. (latit. du lieu } F)}{\text{cotang. } m'P}\left[2\,(K-k)\,\frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da\right]$$

$$+\frac{\text{tang. (latitude du lieu } F)\ \text{tang. } m'P}{r\ \text{cotang. } p}\,dD.$$

$$(2)\ d(\text{latit. vraie}) = d(\text{latit. corr.}) + 206265''\,\frac{\text{fin. } (2\times\text{latit.})}{2\,r}\,\frac{d\rho}{r}.$$

$$(3)\ d(\text{long. du lieu } F) = 2\ (\text{longit. vraie} - \text{longit. corrigée})\ \frac{d\Delta}{\Delta}$$

$$+\frac{\text{tang. (long. du lieu } F)}{\text{tang. } p}\left[dP - 2\,(P-p)\,\frac{d\Delta}{\Delta}\right]$$

$$+\frac{\text{tang. (longit. du lieu } F)}{\text{cotang. (latit. du lieu } F)}\ d\,(\text{latitude corr. } F).$$

(4) d (angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu F)

$$= \frac{\text{tang. (angle de la perp. avec le Mér. } F)}{\text{tang. } m'P} \times \left[2\,(K-k)\,\frac{d\Delta}{\Delta} - dK - da\right]$$

$$+\frac{\text{tang. (angle de la perp. avec le Mér. } F)}{\text{cotang. (latit. du lieu } F)}\ d\,(\text{latitude corrigée du lieu } F).$$

Remarque sur les §. 84 *&* 85.

(101.) Si l'on calcule au moyen de l'équation (4) du *paragraphe précédent*, la variation de l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien du lieu F, dûe au changement de rapport des axes de la Terre; on verra que, quelque leger que soit ce changement, il est cependant du même ordre que les quantités que l'on emploie pour déterminer le rapport de ces axes. On doit donc conclure que, si l'exactitude des mesures terrestres est suffisante pour déterminer l'aplatissement de notre globe, on ne doit point faire usage de la méthode indiquée dans ces paragraphes pour redresser les opérations géodésiques, puisque les quantités que l'on négligeroit seroient de l'ordre de celles que l'on se propose de connoître.

De la figure des perpendiculaires fur le fphéroïde.

(102.) Quoique la figure que forment les perpendiculaires fur le fphéroïde foit indifférente aux queftions que nous nous fommes propofées, j'ai cru cependant que l'on verroit avec plaifir avec quelle facilité cette figure peut fe déterminer, au moyen des équations que nous avons démontrées.

Pour y parvenir, on fe rappellera que l'on a l'équation fuivante,

$$(1) \text{ long. vraie} = \text{longit. corrigée} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} \times \text{perpend. corrigée.}$$

De plus, la perpendiculaire corrigée eft prife fur un grand cercle de la fphère infcrite.

De cette dernière confidération, il fuit que lorfque la perpendiculaire corrigée eft de 90^d, la longitude corrigée eft de 90^d; lorfque la perpendiculaire corrigée eft de 180^d, la longitude corrigée eft de 180^d; cette longitude eft de 270^d & de 360^d, lorfque la perpendiculaire eft de 270^d & de 360^d, & ainfi de fuite. Mais à mefure que la perpendiculaire augmente, la longitude vraie diffère de plus en plus de la longitude corrigée. Lorfque la perpendiculaire eft de 90^d, la différence eft de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} \times 90^d$; lorfque la perpendiculaire eft de 180^d, de 270^d, de 360^d, & ainfi de fuite, la différence eft de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} 180^d$, de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} 270^d$, de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} 360^d$, & ainfi de fuite. Et fi l'on continue la perpendiculaire, la différence entre les longitudes vraies & corrigées, augmentera toujours de plus en plus, de manière qu'à chaque révolution de 360^d, la différence augmentera de $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{fin. } m'P}{r} \times 360^d$. Si donc l'on nomme

n le nombre des révolutions de la perpendiculaire corrigée,

on aura pour expreffions des longitudes vraies correfpondantes

aux interſections de la perpendiculaire avec l'Équateur, & aux ſommets de la perpendiculaire indéfiniment prolongée,

$$(1)\ \text{longitude vraie} = 90^d - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r}\,n \times 90^d.$$

$$(2)\ \text{longitude vraie} = 180. - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r}\,n \times 180.$$

$$(3)\ \text{longitude vraie} = 270. - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r}\,n \times 270.$$

$$(4)\ \text{longitude vraie} = 360. - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r}\,n \times 360.$$

(103.) On voit par-là que s'il étoit poſſible de continuer indéfiniment une perpendiculaire a la Méridienne ſur un ſphéroïde, & que, par exemple, d'après les circonſtances du Problème, $\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r} \times 90^d$ fût égal à $15'$, &c. cette perpendiculaire rencontreroit l'Équateur ſous une longitude de $89^d\,45'$; elle s'enfonceroit enſuite dans l'hémiſphère auſtral, où elle auroit ſon ſommet ſous une latitude égale à celle du point de départ, avec une longitude de $179^d\ 30'$; elle regagneroit l'Équateur, qu'elle couperoit avec une longitude de $269^d\ 15'$; elle remonteroit enfin dans l'hémiſphère boréal, où elle auroit ſon ſommet ſous une latitude égale à celle du point de départ, mais avec une longitude ſeulement de 359^d; de ſorte qu'après cette première révolution, la longitude des deux ſommets différeroit de 1^d. Et ſi l'on continuoit cette perpendiculaire, on auroit une ſuite de points qui, ſous chaque même latitude, auroient une longitude différente de 1^d de la longitude des points correſpondans de la révolution précédente. Cette perpendiculaire formeroit une eſpèce de ſpirale; & l'on ne retomberoit ſur la première perpendiculaire que lorſque $\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\ m'P}{r}\,n \times 360^d$, ou plus exactement, lorſque la ſuite qui exprime la différence des longitudes vraies & corrigées, ſeroit un multiple de 360^d.

Démonſtration de la propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener ſur le ſphéroïde d'un point à un autre; & de la manière de déterminer l'équation à cette ligne, indépendamment de cette propriété.

(104.) Avant de terminer ce qui regarde la perpendiculaire à la Méridienne, je dois démontrer ſa propriété caractériſtique, d'être la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener ſur le ſphéroïde d'un point à un autre. Je ferai voir enſuite comment l'on peut déterminer l'équation à cette ligne, ſans conſidérer cette propriété.

(105.) Pour démontrer la propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, conſidérons la manière dont on trace cette
Fig. 6. courbe. Soient A & B deux de ſes points infiniment proches, en ſorte que la petite droite AB qui les joint, ſoit un de ſes côtés; on élève au-delà du point B & à une diſtance infiniment petite BC, une perpendiculaire CD à la ſurface du ſphéroïde, de manière que par les points A & B, on puiſſe apercevoir le point C de cette perpendiculaire; & joignant enſuite le point B & le pied D de la perpendiculaire, on a le côté ſuivant BD de la courbe. Ce côté ſe forme conſéquemment en pliant le prolongement BC du côté AB, ſuivant la perpendiculaire CD à la ſurface du ſphéroïde.

Il ſuit de cette conſtruction, que la ligne ABD eſt la plus courte que l'on puiſſe mener du point A au point D du ſphéroïde. Pour s'en convaincre, ſoit $B\partial D\partial$ le plan tangent au ſphéroïde au point D, & par conſéquent perpendiculaire à la ligne CD; imaginons maintenant que la ligne CD tourne autour de l'axe BC, en faiſant conſtamment l'angle BCD; l'on aura un cône dont l'interſection avec le plan $B\partial D\partial$, formera la ſection conique $\partial D\partial$; la ligne BD ſera partie de l'axe de cette ſection; le point D en ſera le ſommet; les lignes BD, $B\partial$, $B\partial$ ſeront des rayons vecteurs;

& ils repréſenteront en même temps les interſections du ſphéroïde avec le côté BC, en ſuppoſant ce côté ſucceſſivement plié dans des directions différentes de la direction perpendiculaire au ſphéroïde. Mais par la nature des ſections coniques, le rayon BD eſt plus petit que les autres rayons vecteurs BD, $B\partial$. Fig. 6.

Conſidérons maintenant un nouveau côté DB' formé par le prolongement $B'C$ du côté $B'A'$, que l'on ſuppoſe pareillement plié dans la direction de la perpendiculaire au ſphéroïde. En vertu des conſtructions précédentes, l'on aura ſur le plan tangent au ſphéroïde au point D, une nouvelle ſection conique $\partial' D \partial'$, dont le rayon vecteur $B'D$ ſera évidemment plus petit que les autres rayons $B'\partial'$, $B'\partial'$; & les rayons BD, DB' pourrront, à un infiniment petit près du premier ordre, être conſidérés comme étant en ligne droite, puiſqu'ils ſeroient rigoureuſement en ligne droite dans la ſphère, & que le ſphéroïde peut ſe confondre avec la ſphère qui auroit pour rayon, le rayon oſculateur au point D. La ſomme des deux côtés BD, DB' eſt donc plus petite que la ſomme de toutes les autres lignes $B\partial$, $\partial B'$, $B\partial'$, $\partial' B'$, qui ſont plus grandes, & qui d'ailleurs font un angle fini entre elles aux points ∂, ∂'. La perpendiculaire à la Méridienne a donc la propriété d'être la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre ſur la ſurface du ſphéroïde.

(106.) La propriété de la perpendiculaire à la Méridienne, d'être la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre ſur la ſurface du ſphéroïde, n'eſt pas particulière aux ſphéroïdes de révolution; elle a généralement lieu pour un ſphéroïde quelconque. En effet, il eſt évident que la démonſtration du *paragraphe précédent*, eſt indépendante de la génération du ſphéroïde par voie de révolution.

(107.) Nous pourrions nous contenter d'avoir démontré la propriété précédente de la perpendiculaire à la Méridienne, puiſque nous en avons déduit, dans la ſeconde ſection,

Fig. 6. l'équation à cette perpendiculaire; nous croyons cependant que le Lecteur verra avec plaisir la manière de déterminer directement l'équation à cette ligne, sans faire entrer dans cette détermination la propriété dont il s'agit.

(108.) Pour y parvenir, nommons x, y, z les trois coordonnées du point A de la surface du sphéroïde, rapportées à trois axes perpendiculaires, & à une origine commune; les coordonnées au point B, auront pour expression $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; & si l'on nomme dp le petit côté AB de la courbe, on aura $dp = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Si l'on prolonge ce côté d'une quantité BC, égale à AB; en pliant ce prolongement suivant la droite CD, perpendiculairement à la surface, il est visible que son extrémité aboutira un peu au-delà du point D; de sorte, que si l'on nomme dp' le côté BD, dp' sera moindre que dp; mais il est facile de s'assurer que la différence est un infiniment petit du troisième ordre; car en faisant $CD = \alpha$, il est clair que α est un infiniment petit du second ordre, puisque BC est un infiniment petit du premier ordre, ainsi que l'angle CBD. De plus, $dp'^2 + \alpha^2 = dp^2$, d'où l'on tire

$$dp = \sqrt{(dp'^2 + \alpha^2)} = dp' + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{dp'};$$

or $\frac{\alpha^2}{dp'}$ est un infiniment petit du troisième ordre. On aura donc, en négligeant cet infiniment petit, $dp = dp'$, ce qui montre que dp doit être supposé constant.

Cela posé, x, y, z étant les coordonnées au point A, & $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, étant celles du point B; $x + 2dx$, $y + 2dy$, $z + 2dz$, seront, par la nature de la ligne droite, les coordonnées du point C, pris sur le prolongement du côté AB. D'ailleurs, les coordonnées du point D, pris sur le sphéroïde, seront $x + 2dx + ddx$, $y + 2dy + ddy$, $z + 2dz + ddz$. Si l'on retranche ces coordonnées de celles du point C, on aura $-ddx$, $-ddy$, $-ddz$, pour les coordonnées du point C, en fixant leur origine au point D.

(109.)

(109.) L'équation différentielle à la ſurface d'un ſphéroïde, eſt en général Fig. 6.

$$(1)\ dz = r\,dx + s\,dy;$$

r & s étant des fonctions de x, y & z. De plus, ſi l'on nomme x', y' & z' les coordonnées de la perpendiculaire CD à la ſurface, on démontre dans la théorie des ſurfaces courbes, que pour déterminer cette perpendiculaire, l'on a les deux équations

$$(2)\ x' + rz' = 0;\quad (3)\ y' + sz' = 0.$$

Dans ces équations, r & s ſont les fonctions de x, y, z, qui entrent dans l'équation (1) au ſphéroïde; elles ſont variables en paſſant d'une perpendiculaire à l'autre, mais elles doivent être conſidérées comme conſtantes pour la même perpendiculaire. Subſtituant donc $-ddx$, $-ddy$, $-ddz$, au lieu de x', y', z' dans les équations (2) & (3), on aura

$$(4)\ ddx + rddz = 0;\quad (5)\ ddy + sddz = 0.$$

Ce ſont les équations de la perpendiculaire à la Méridienne, en obſervant que dp ou ſon égal $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ doit être ſuppoſé conſtant.

(110.) Il eſt aiſé de voir, qu'une ſeule des deux équations (4) ou (5) du *paragraphe précédent*, combinée avec l'équation (1) à la ſurface du ſphéroïde, ſuffit pour déterminer la courbe dont il s'agit, & que l'autre équation donne un réſultat identique. En effet, puiſque dp ou ſon égal $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ eſt une quantité conſtante, on conclura

$$(1)\ dxddx + dyddy + dzddz = 0.$$

Si donc l'on élimine ddy, au moyen de l'équation (5) du *paragraphe précédent*, on aura

$$(2)\ dxddx + (dz - sdy)ddz = 0.$$

Mais l'équation (1) à la ſurface du ſphéroïde, donne $dz - sdy = rdx$; on aura donc

$$(3)\ ddx + rddz = 0.$$

(111.) Examinons maintenant le cas des ſphéroïdes de révolution, & ſuppoſons que l'axe des x ſoit l'axe même de révolution. Si l'on nomme Y l'ordonnée du Méridien correſpondante à x, Y ſera une fonction de x. Soit maintenant u l'angle que forme le Méridien du point A avec un Méridien fixe, que nous ſuppoſerons être le plan des x & des y; on aura

$$(1)\ y = \frac{Y\,\text{coſ.}\,u}{r}, \quad (2)\ z = \frac{Y\,\text{ſin.}\,u}{r};$$

puiſque Y eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, dont y & z ſont les côtés, le côté z étant d'ailleurs oppoſé à l'angle u. Donc

$$(3)\ dp = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{(dx^2 + dY^2 + \frac{Y^2 du^2}{r^2})}.$$

On aura enſuite s, en obſervant que $s = \frac{dz}{dy}$, les différentielles dz & dy étant priſes en regardant x, & par conſéquent, Y qui en eſt une fonction, comme des conſtantes. Or, on a dans cette ſuppoſition,

$$(4)\ dz = \frac{Y\,\text{coſ.}\,u\,du}{r^2}; \quad (5)\ dy = -\frac{Y\,\text{ſin.}\,u\,du}{r^2};$$

donc

$$(6)\ s = -\frac{Y\,\text{coſ.}\,u}{Y\,\text{ſin.}\,u}.$$

L'équation (5) du §. 109 deviendra ainſi,

$$(7)\ Y\,\text{ſin.}\,u\,d^2(Y\,\text{coſ.}\,u) - Y\,\text{coſ.}\,u\,d^2(Y\,\text{ſin.}\,u) = 0;$$

donc, en intégrant

$$(8)\ \tfrac{1}{2}Cr^2dp - Y\,\text{ſin.}\,u\,d(Y\,\text{coſ.}\,u) + Y\,\text{coſ.}\,u\,d(Y\,\text{ſin.}\,u) = 0,$$

ou

$$(9)\ Crdp - Y^2du = 0;$$

C étant une conſtante arbitraire. Cette équation eſt la même que celle que nous avons déduite (*ſection deuxième*) de la ſuppoſition, que la perpendiculaire à la Méridienne eſt la ligne la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point à un autre, ſur la ſurface du ſphéroïde.

ONZIÈME SECTION.

Application des latitudes corrigées au calcul des loxodromiques elliptiques.

De l'équation aux loxodromiques elliptiques.

(112.) On ſait que les loxodromiques ſont des courbes qui coupent tous les Méridiens, ſous un même angle donné. Le calcul de ces courbes ne préſente aucune difficulté, ſi on les ſuppoſe tracées ſur une ſphère; mais il devient plus compliqué lorſque l'on ſuppoſe la Terre elliptique. Quoique j'euſſe pu me diſpenſer de donner la méthode, d'après laquelle on peut calculer les loxodromiques elliptiques, ce ſujet ayant été traité par pluſieurs Géomètres; j'ai cru cependant devoir préſenter une nouvelle manière d'envisager le Problème, en employant les latitudes corrigées; on verra par-là, que le calcul des loxodromiques elliptiques ſe ramène très-facilement au calcul des loxodromiques tracées ſur une ſphère.

(113.) Soit $PAGDF$ un ſphéroïde formé par la révolution d'une courbe quelconque PAG, autour d'un axe PC de révolution. Fig. 1.

Nommons

x l'abſciſſe, Y l'ordonnée } aux différens points de la courbe, dont la révolution engendre le ſphéroïde. Je ſuppoſe que l'origine des coordonnées eſt en C; que les abſciſſes ſont comptées ſur l'axe de rotation CP; les ordonnées Y ſur la perpendiculaire CG à l'axe CP de rotation: je ſuppoſe de plus, que l'on connoît la relation entre x & Y;

r la diſtance CP du point C au pôle P de rotation: nous ſuppoſerons d'ailleurs, cette diſtance égale au rayon des Tables;

u l'angle des différens Méridiens du ſphéroïde avec un premier Méridien donné de poſition: nous ſuppoſerons que cet angle eſt meſuré ſur un cercle dont le rayon $= r$;

P le périmètre de la ligne tracée ſur le ſphéroïde;

dP l'élément de ce périmètre;

D l'angle de la courbe avec les différens Méridiens qu'elle coupe ſucceſſivement.

Nous avons vu (*§. 6 & 10*) que l'on a généralement les équations ſuivantes,

$$(1) \quad dP = \frac{\sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)}}{r},$$

$$(2) \quad \text{ſin.}\, D = \frac{rYdu}{\sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)}}.$$

Si donc l'on ſuppoſe l'angle D conſtant, ce qui eſt la propriété caractériſtique des loxodromiques, l'on aura pour équation de ces courbes,

$$(3) \quad \text{ſin.}\, D \sqrt{(Y^2 du^2 + r^2 dx^2 + r^2 dY^2)} - rYdu = 0;$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad du = \text{tang.}\, D \frac{\sqrt{(dx^2 + dY^2)}}{Y},$$

& ſubſtituant cette valeur dans l'équation (1),

$$(5) \quad dP = \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \sqrt{(dx^2 + dY^2)}.$$

Pour réduire la courbe à deux variables, il ne ſeroit queſtion que de faire uſage des équations à l'ellipſe,

$$(6) \quad \rho^2 x^2 + r^2 Y^2 - \rho^2 r^2 = 0; \quad (7) \quad \rho^2 x dx + r^2 YdY = 0;$$

ρ étant d'ailleurs le demi-grand axe de l'ellipſe génératrice, & r le demi-petit axe.

De l'équation aux loxodromiques ſphériques, & des principes pour calculer ces courbes.

(114.) Imaginons maintenant que ſur la ſphère inſcrite, on trace une loxodromique qui faſſe avec les Méridiens de cette ſphère, un angle égal à celui que la loxodromique elliptique fait avec les Méridiens qu'elle rencontre, & qui s'étende ſous les latitudes correſpondantes à celle de la loxodromique elliptique.

Nommons

v l'angle des différens Méridiens rencontrés par la loxodromique ſphérique avec un premier Méridien donné de poſition;

y l'ordonnée du cercle inſcrit correſpondante à l'ordonnée Y de l'ellipſe;

p le périmètre de la loxodromique ſphérique;

dp l'élément de ce périmètre;

$dk = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$;

& conſervons d'ailleurs toutes les autres définitions précédentes, l'on aura évidemment

$$(1)\ \text{ſin.}\ D\sqrt{(y^2dv^2 + r^2dx^2 + r^2dy^2)} - rydv = 0.$$

$$(2)\ dv = \text{tang.}\ D\ \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{y} = \text{tang.}\ D\ \frac{dk}{y}.$$

$$(3)\ dp = \frac{r}{\text{coſ.}\ D}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{r}{\text{coſ.}\ D}\,dk.$$

$$(4)\ x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

$$(5)\ xdx + ydy = 0.$$

(115.) De l'équation (3) du *paragraphe précédent*, on conclut tout de ſuite

$$(1)\ p + \text{conſtante} = \frac{r}{\text{coſ.}\ D}\,k.$$

Mais lorſque $p = 0$, k eſt égal à la latitude du point de départ; donc conſtante $= \frac{r}{\text{coſ.}\ D}$ latitude du point de départ: donc

$$(2)\ p = \frac{r}{\text{coſ.}\ D}\ (\text{latit. du point d'arrivée} - \text{latit. du point de départ}).$$

Donc

$$(3)\ \text{chemin en latitude} = \frac{\text{coſ.}\ D}{r}\,p.$$

(116.) Puiſque $\frac{dk}{y} = \frac{rdx}{y^2} = \frac{rdx}{r^2 - x^2}$, l'équation (2) du *§. 114*, devient

$$(1)\ dv = \text{tangente}\ D\ \frac{rdx}{r^2 - x^2};$$

donc en intégrant,

$$(2)\ v + \text{conſt.} = \text{tang.}\ D\ \tfrac{1}{2}\ \text{log.}\left(\frac{r+x}{r-x}\right) = \text{tang.}\ D\ \text{log.}\ \sqrt{\left(\frac{r+x}{r-x}\right)}.$$

Nommons maintenant

X l'angle dont x eſt le ſinus, c'eſt-à-dire la latitude du lieu d'arrivée;

puiſque généralement $\frac{r+x}{r-x} = \frac{\text{tangente}^2}{r^2}\ (45^d + \tfrac{1}{2}X)$, l'équation (2) deviendra

$$(3)\ v + \text{conſt.} = \text{tang.}\ D\ \text{log.}\left\{\frac{\text{tang.}\ [45^d + \frac{1}{2}\ (\text{lat. du point d'arrivée})]}{r}\right\}.$$

Mais v doit être égal à zéro lorſque X exprime la latitude du point de départ; donc

$$(4)\ v = \text{tang.}\ D\ \text{log.}\left\{\frac{\text{tangente}\ [45^d + \frac{1}{2}\ (\text{latitude du point d'arrivée})]}{\text{tangente}\ [45^d + \frac{1}{2}\ (\text{latitude du point de départ})]}\right\}.$$

(117.) Les logarithmes qu'il faut employer pour calculer la formule précédente, ſont les logarithmes hyperboliques. Si donc l'on emploie les logarithmes des Tables, il faudra multiplier le réſultat par le nombre 2,3025851, c'eſt-à-dire par le nombre qui ramène les logarithmes des Tables aux logarithmes hyperboliques. Si l'on veut faire uſage des logarithmes des Tables, & que de plus v ſoit exprimé en degrés, minutes & ſecondes, on pourra employer la formule ſuivante, dans laquelle toutes les réductions néceſſaires ont été faites.

$$(1)\ v = \frac{\text{tang.}\ D}{r}\ \text{log.}\left\{\frac{\text{tang.}\ (45^d + \frac{1}{2}\ \text{latit. du point d'arrivée})}{\text{tang.}\ (45^d + \frac{1}{2}\ \text{latit. du point de départ})}\right\}\ 474943''.$$

Du rapport entre le périmètre de la loxodromique elliptique & le périmètre de la loxodromique correſpondante de la ſphère inſcrite.

(118.) Soit

P le périmètre de la loxodromique elliptique;

p le périmètre de la loxodromique correſpondante, tracée ſur la ſphère inſcrite;

ρ le demi-grand axe du ſphéroïde;
r le demi-petit axe du ſphéroïde;
$\Delta^2 = \rho^2 - r^2$.

Nous avons vu que

$$(1)\ dP = \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \sqrt{(dx^2 + dY^2)},$$

$$(2)\ dp = \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{r}{\text{coſ.}\, D}\, dk.$$

Mais $dY^2 = \frac{\rho^2 dy^2}{r^2} = dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2}$; l'équation (1) peut donc avoir la forme ſuivante,

$$(3)\ dP = \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})} = \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \sqrt{(dk^2 + \frac{\Delta^2 dy^2}{r^2})}.$$

Je réduis cette dernière expreſſion en ſérie, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$, & j'ai

$$(4)\ dP = \frac{r}{\text{coſ.}\, D}\, dk + \frac{r}{\text{coſ.}\, D}\, \frac{1}{2}\, \frac{\Delta^2}{r^2}\, \frac{dy^2}{dk} = dp + \frac{r}{\text{coſ.}\, D}\, \frac{1}{2}\, \frac{\Delta^2}{r^2}\, \frac{dy^2}{dk}:$$

mais $\frac{dy}{dk} = -\frac{x}{r}$, & $dy = -\frac{x\, dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$; donc

$$(5)\ P + \text{conſt.} = p + \frac{r}{\text{coſ.}\, D}\, \frac{1}{2}\, \frac{\Delta^2}{r^2} \int \frac{x^2\, dx}{r\sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$

Nous avons vu que $\int \frac{x^2\, dx}{r\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{1}{2} X - \frac{1}{4} \text{ſin.}\, 2\, X$; de plus, P & p ſont à la fois égaux à zéro au point de départ; ſi donc l'on nomme

a la latitude corrigée du point de départ,
X la latitude corrigée du point d'arrivée,

& que l'on ſuppoſe d'ailleurs

$$(6)\ k' = X - a = \text{chemin en latitude},$$

on aura

$$(7)\ P = p + \frac{r}{\text{coſ.}\, D} \times \frac{1}{2}\, \frac{\Delta^2}{r^2} \left[\frac{k'}{2} - \frac{\text{coſin.}\,(2a + k')\, \text{ſin.}\, k'}{2r}\right].$$

Mais [*équation* (3) du *ſ. 115*] $k' = \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,p$; donc

$$(8)\; P = p + \frac{r}{\text{coſ.}\,D}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,\frac{p}{2} - \frac{\text{coſ.}(2a + \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,p)\,\text{ſin.}(\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,p)}{2r}\right],$$

ou enfin

$$(9)\; P = p + \frac{r}{\text{coſ.}\,D}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,\frac{p}{2} - 206265''\,\frac{\text{coſ.}(2a + \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,p)\,\text{ſin.}(\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,p)}{2r^2}\right].$$

(119.) Comme les quantités P & p ne diffèrent que par des termes de l'ordre $\frac{\Delta^2}{r^2}$, l'équation ſuivante ſera également vraie, aux termes près de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$,

$$(1)\; P = p + \frac{r}{\text{coſ.}\,D}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}\left[\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,\frac{P}{2} - 206265''\,\frac{\text{coſ.}(2a + \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,P)\,\text{ſin.}(\frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,P)}{2r^2}\right].$$

(120.) Nous obſerverons que la quantité $\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}$ &c. qui entre dans le petit terme des équations précédentes, ſe calcule facilement par le moyen des Tables du *ſ. 62;* on fera cependant la remarque ſuivante. Dans les Tables du *ſ. 62*, les arcs, ſoit de l'ellipſe, ſoit du cercle inſcrit dont on cherche la différence, ſont comptés en partant du ſommet du petit axe; les arcs, au contraire, dont les différences donnent le petit coëfficient $\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{r^2}$ &c. ſont comptés en partant du ſommet du grand axe de l'ellipſe; il faudra donc, pour faire uſage des Tables du *ſ. 62*, employer les différences qui répondent aux complémens des arcs a & $a + \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,P$.

On voit par-là que ſi l'on nomme

γ l'excès de l'arc de l'ellipſe ſur l'arc correſpondant du cercle inſcrit, qui répond dans la Table à l'arc exprimé par $90^d - a - \frac{\text{coſ.}\,D}{r}\,P$,

γ' l'excès

γ' l'excès de l'arc de l'ellipſe ſur l'arc correſpondant du cercle inſcrit, qui répond dans la Table, à l'arc exprimé par $90^d - a$,

l'équation (1) du *§. 119* pourra être exprimée par

$$(1)\ p = P - \frac{r}{\text{coſ.}\ D}(\gamma' - \gamma).$$

(121.) L'uſage des formules précédentes eſt on ne peut pas plus ſimple. Suppoſons, en effet, que l'on connoiſſe la latitude vraie du point de départ, ainſi que l'angle D de la route avec les Méridiens, & le chemin P du Vaiſſeau; on conclura tout de ſuite la latitude corrigée du lieu de départ, & l'on réduira en degrés, minutes & ſecondes le chemin P du Vaiſſeau. On aura donc tous les élémens néceſſaires pour calculer p, au moyen de l'équation (1) du *paragraphe précédent.* Cette dernière valeur une fois connue, on calculera la latitude corrigée du lieu d'arrivée, au moyen de l'équation (2) du *§. 115;* on conclura ſa latitude vraie par l'équation (1) du *§. 19;* on aura enfin la longitude corrigée du lieu d'arrivée, au moyen de l'équation (1) du *§. 117.* Il n'eſt plus queſtion maintenant que de conclure la longitude vraie.

Du rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie.

(122.) Il eſt facile de déterminer le rapport entre la longitude corrigée & la longitude vraie. Nous avons vu en effet que l'on avoit les équations ſuivantes:

$$(1)\ du = \text{tang.}\ D\ \frac{\sqrt{(dx^2 + dY^2)}}{Y}.$$

$$(2)\ dv = \text{tang.}\ D\ \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{y} = \text{tang.}\ D\ \frac{dk}{y}.$$

On ſait de plus, que $Y = \frac{\rho y}{r}$, & que $dY^2 = \frac{\rho^2 dy^2}{r^2}$; donc

$$(3)\ du = \text{tang.}\ D\ \frac{r}{\rho}\ \frac{\sqrt{(dx^2 + \frac{\rho^2 dy^2}{r^2})}}{y}.$$

Mais à cauſe de $r^2 = \rho^2 - \Delta^2$, $\sqrt{(dx^2 + \frac{\rho^2 dy^2}{r^2})}$ $= \frac{\rho}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2 - \frac{\Delta^2 dx^2}{\rho^2})} = \frac{\rho}{r}\sqrt{(dk^2 - \frac{\Delta^2}{\rho^2}dx^2)}$ $= \frac{\rho}{r}(dk - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{dx^2}{dk})$, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{\Delta^4}{\rho^4}$. Donc

$$(4)\ du = \text{tangente}\ D\ (\frac{dk}{y} - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{dx^2}{ydk});$$

mais tang. $D \times \frac{dk}{y} = dv$, & $\frac{dx^2}{ydk} = \frac{dx}{r}$: donc en intégrant

$$(5)\ u + \text{conſtante} = v - \frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{tang.}D}{r}x;$$

donc en ajoutant convenablement la conſtante, & conſervant les définitions des *paragraphes précédens*,

$$(6)\ u = v - \frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{tang.}D}{r} \times \frac{\text{cof.}(a + \frac{\text{cof.}D}{r} \times \frac{P}{2})\,\text{fin.}(\frac{\text{cof.}D}{r} \times \frac{P}{2})}{r},$$

ou enfin

$$(7)\ u = v - \frac{\Delta^2}{\rho^2}\frac{\text{tang.}D}{r} \times \frac{\text{cof.}(a + \frac{\text{cof.}D}{r} \times \frac{P}{2})\,\text{fin.}(\frac{\text{cof.}D}{r} \times \frac{P}{2})}{r^2}\,206265''.$$

On conclura donc, avec la dernière facilité, la longitude vraie du lieu d'arrivée.

Dans l'uſage de ces formules, on fera ſinus D, coſin. D, tang. D poſitifs, lorſque l'on s'avancera vers le Pôle ; on fera ſin. D poſitif, coſin D, tang. D négatifs, lorſque l'on s'avancera vers l'Équateur. On n'oubliera pas auſſi que les longitudes ſont comptées du point de départ; de ſorte que la longitude n'eſt autre choſe que le chemin en longitude.

(123.) Je ne m'étendrai pas davantage ſur les loxodromiques elliptiques ; il me ſuffit d'avoir fait voir ce que devient le Problème, en y appliquant la conſidération des latitudes corrigées. Je paſſe aux applications des propriétés des perpendiculaires à la Méridienne, aux uſages géodéſiques.

DOUZIÈME SECTION.

Application des recherches précédentes aux principaux usages géodésiques.

(124.) Je dois maintenant appliquer les recherches précédentes aux principaux usages géodésiques. Dans ces recherches, j'appellerai, conformément à ce qui a été dit ci-dessus,

Distance perpendiculaire du lieu F *à la Méridienne du lieu* M, la distance du lieu F à la Méridienne du lieu M, comptée sur la perpendiculaire FM' à cette Méridienne. Fig. 2.

Distance du lieu M *au pied de la perpendiculaire du lieu* F, la distance MM' du lieu M au point M', où la perpendiculaire menée du lieu F au Méridien $MM'P$, rencontre ce Méridien.

Longitude vraie du lieu F, l'angle au pôle P compris entre les Méridiens MP, FP.

Angle de la perpendiculaire, avec les Méridiens successifs qu'elle rencontre, l'angle en F formé sur le sphéroïde, par les Méridiens PF, & la perpendiculaire $M'F$.

Arc $m'P$, l'arc de la sphère inscrite compris entre le pôle & la projection m' du point M' intersection du Méridien du lieu M, & de la perpendiculaire à ce Méridien.

Perpendiculaire corrigée à la Méridienne, l'arc $m'F'$ du triangle $m'PF'$ de la sphère inscrite.

Longitude corrigée du lieu F', l'angle au pôle P du triangle $m'PF'$ de la sphère inscrite.

Latitude corrigée du lieu F, le complément de l'arc $F'P$ du triangle $m'PF'$.

Angle de la perpendiculaire corrigée avec les Méridiens de la sphère inscrite, l'angle en F' du triangle $m'PF'$; cet angle est égal à l'angle de la perpendiculaire vraie, avec les Méridiens correspondans du sphéroïde.

PREMIÈRE QUESTION.

(125.) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante:

Fig. 2. *Étant données la latitude & la longitude vraies d'un lieu* F; *déterminer la diſtance* M′ M *du lieu* M, *au point* M′, *où la ligne* F M′ *perpendiculaire au Méridien du lieu* M, *rencontre ce Méridien; ainſi que la diſtance* F M′ *entre cette interſection* M′ *& le lieu* F, *meſurée ſur la perpendiculaire* F M′.

Pour réſoudre cette première queſtion, on commencera par déterminer la longitude corrigée, ou, ce qui revient au même, l'angle P du triangle $m'PF'$, au moyen des équations (1), (2), (3) du *§. 76.* On connoîtra maintenant dans ce triangle, le côté PF', complément de la latitude corrigée du lieu F, & l'angle P; on conclura donc l'arc $m'P$, & la perpendiculaire corrigée $m'F'$ à la Méridienne, au moyen des équations

$$(1)\ \text{tangente}\ m'P = \frac{\text{cotang. (latit. corr. du lieu } F\text{) coſ. (longit. corr.)}}{r}.$$

$$(2)\ \text{ſin. (perp. corr.)} = \frac{\text{coſin. (latit. corr. du lieu } F\text{) ſin. (longit. corrigée)}}{r}.$$

On conclura la perpendiculaire vraie, au moyen de l'équation (1) du *§. 52*, après avoir déterminé l'angle A qui entre dans ſon expreſſion, au moyen de l'équation (1) du *§. 51.* On réduira cette perpendiculaire vraie en toiſes, au moyen de l'équation (3) du *§. 52.*

De la valeur de $m'P$, on conclura k, au moyen de l'équation (1) du *§. 34;* on conclura K, au moyen de l'équation (2) du *§. 28;* on réduira K en toiſes, au moyen de l'équation (2) du *§. 32*, & la queſtion ſera réſolue.

Si l'on ſuppoſoit que le lieu M fût l'Obſervatoire de Paris, l'on ſuppléeroit à ces derniers calculs, au moyen des Tables du *§. 44.*

Si l'on vouloit déterminer l'angle de la perpendiculaire dont eſt queſtion avec le Méridien du lieu F, on auroit recours à l'équation (1) du *§. 87.*

SECONDE QUESTION.

(126.) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante:

Étant donnée la latitude vraie du lieu F, *& l'angle que fait la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu* F; *déterminer, 1.° la diſtance* M′M *du lieu* M, *au point* M′, *où la ligne* FM′ *perpendiculaire au Méridien du lieu* M, *rencontre ce Méridien; 2.° la diſtance* FM′ *entre cette interſection* M′ *& le lieu* F, *c'eſt-à-dire la longueur de la perpendiculaire ſur le ſphéroïde; 3.° la longitude du lieu* F *par rapport au lieu* M. Fig. 2.

Pour réſoudre cette queſtion, on commencera par déterminer l'arc $m'P$ du triangle $m'PF'$ de la ſphère inſcrite, en obſervant que le côté PF' eſt le complément de la latitude corrigée du lieu F, & que l'angle $m'F'P$ eſt égal à l'angle de la perpendiculaire à la Méridienne, avec le Méridien du lieu F ſur le ſphéroïde; on aura donc,

$$(1)\ \text{ſin. } m'P = \frac{\text{ſin. (ang. de la perp. avec le Mér. du lieu } F\text{) coſ. (lat. corr. du lieu } F\text{)}}{r}.$$

On conclura k, au moyen de l'équation (1) du §. 34; on conclura K, au moyen de l'équation (2) du §. 28; on réduira K en toiſes, au moyen de l'équation (2) du §. 32, ou plutot, l'on ſera uſage des Tables du §. 44, ſi l'on ſuppoſe que le lieu M eſt l'Obſervatoire de Paris; & l'on connoîtra la diſtance $M'M$.

On conclura le côté $m'F'$, ou la quantité p, qui lui eſt égale, au moyen de l'équation (1) du §. 54; on conclura P, au moyen de l'équation (1) du §. 52; on réduira P en toiſes, au moyen de l'équation (3) du §. 52; & l'on connoîtra la longueur de la perpendiculaire ſur le ſphéroïde.

On calculera la longitude corrigée du lieu F, au moyen de l'équation (1) du §. 58; l'on conclura enfin la longitude vraie du lieu F, au moyen de l'équation (15) du §. 74, & la queſtion ſera complètement réſolue.

TROISIÈME QUESTION.

(127.) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante:

Fig. 2. *Étant donnée la diſtance* M′M *du lieu* M *au point* M′ *où la ligne* FM′ *perpendiculaire au Méridien du lieu* M *rencontre ce Méridien, ainſi que la longueur* FM′ *de la perpendiculaire ſur le ſphéroïde; déterminer la latitude du lieu* F, *& ſa longitude par rapport au lieu* M.

Nous remarquerons que le cas dont il s'agit eſt de l'uſage le plus général; c'eſt par lui que l'on peut calculer les latitudes & les longitudes des différens points de la Carte de France, d'après les opérations géodéſiques de M.[rs] Caſſini; puiſqu'en effet chaque lieu eſt déſigné par ſa diſtance perpendiculaire à la Méridienne de Paris, & par la diſtance de l'interſection de cette perpendiculaire, à l'Obſervatoire de Paris.

(128.) Puiſque l'on connoît le nombre T de toiſes que contient MM', on conclura la valeur de K, au moyen de l'équation (2) du *§. 32;* on conclura la valeur de k, au moyen de l'équation (2) du *§. 28,* & enfin la valeur de $m'P$, au moyen de l'équation (1) du *§. 34;* ou plutôt l'on fera uſage des Tables du *§. 44,* pour avoir directement la valeur de $m'P$, ſi l'on ſuppoſe que le lieu M eſt l'Obſervatoire de Paris.

On réduira en degrés la perpendiculaire FM', au moyen de l'équation (3) du *§. 52,* & l'on conclura la valeur de p, au moyen de l'équation (1) du même paragraphe; on conclura enſuite la latitude corrigée du lieu F, au moyen de l'équation (1) du *§. 57,* & ſa longitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du *§. 58;* on ramènera la latitude corrigée du lieu F à la latitude vraie, au moyen des Tables du *§. 20,* ou au moyen de l'équation (1) du *§. 19;* on conclura la longitude vraie au moyen de l'équation (15) du *§. 75;* & le Problème ſera complètement réſolu.

Si l'on vouloit de plus connoître l'angle de la perpendiculaire à la Méridienne avec le Méridien du lieu *F*, l'on feroit usage de l'équation (1) du §. 87.

Comme la question présente est du plus grand usage, je vais donner le type du calcul; je l'appliquerai à la détermination de la position de Brest.

EXEMPLE.

(129.) *On demande la longitude & la latitude de Brest, en supposant ce lieu situé à la distance de 259168 toises de la Méridienne de Paris, prise sur une perpendiculaire qui rencontre cette Méridienne à la distance de 14614 toises du côté du Midi. On suppose de plus que les axes de la Terre sont dans le rapport de 177 à 178.*

TYPE DU CALCUL.

Détermination de m'P.

Dans la première Table du §. 44, je vois que la valeur de *m'P* qui convient à la distance de 10105 toises du côté du Midi, est $41^d\ 30'$; je soustrais 10105 du nombre 14614 donné, & j'ai pour différence 4509 toises. Suivant la même Table, la différence pour 10' de variation de *m'P*, est de 9503 toises; j'ai donc, 9503 est à 600″ comme 4509 est au nombre de secondes qu'il faut ajouter à $41^d\ 30'$ pour avoir *m'P*.

2,7781513.....	log. 600″.
3,6540802.....	log. 4509.
+ 6,4322315.	
− 3,9778607.....	log. 9503.
2,4543708.....	log. 285.

$$m'P = \begin{cases} 41^d\ 30'\ \ 0''. \\ +\ \ \ \ \ \ \ 4.\ 45. \\ 41.\ 34.\ 45. \end{cases}$$

Détermination de p.

Je réduis en degrés le nombre 259168 de toises que contient *P*, au moyen de l'équation (3) du §. 52,

& j'ai

$$5,4135813\ldots\ \log.\ 259168 \text{ toifes}$$
$$-\ 1,1983286\ldots\ \log.\ \frac{3600''}{\theta}.$$
$$4,2152527\ldots\ \log.\ 16415''.$$
$$P = 4^d\ 33'\ 35''.$$

Dans la première Table du *§. 62*, je vois 1.° que la différence entre l'arc de l'ellipſe & l'arc correſpondant du cercle inſcrit, eſt de 81″,6 pour une valeur de P de 4^d; 2.° que 10″,2 répondent à 30′ de variation de P; 3.° que 1″,7 répond à 5′ de variation de P: donc

Différence entre l'arc de l'ellipſe & l'arc correſpondant du cercle inſcrit, qui ſatisfait à la queſtion = 93″,5.

J'ai donc

$$1,9708116\ldots\ \log.\ 93'',5.$$
$$9,7478400\ldots\ \log.\ \text{cofin.}^2\ m'P.$$
$$1,7186516\ldots\ \log.\ 52''.$$

donc

$$p = 4^d\ 33'\ 35'' - 52'' = 4^d\ 32'\ 43'' = 16363''.$$

Détermination de la Latitude.

Je conclus la latitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du *§. 57*: je ramène cette latitude à la latitude vraie, au moyen des Tables du *§. 20*.

$$9,8739200\ldots\ \text{cof.}\ m'P.$$
$$9,9986325\ldots\ \text{cof.}\ p.$$
$$9,8725525\ldots\ \text{fin. latit. corrigée.}$$

$$\text{Latitude corr.} = 48^d\ 13'\ 4'',5$$

$$\text{Latitude vraie} = \begin{cases} 48.\ 13.\ 4,5. \\ +\quad 9.\ 37,5. \\ 48.\ 22.\ 42,0. \end{cases}$$

Détermination

Détermination de la Longitude.

Je calcule la longitude corrigée, au moyen de l'équation (1) du §. 58; & je ramène cette longitude à la longitude vraie, au moyen de l'équation (15) du §. 75.

$+18{,}9003500$... log. r tang. p.	$4{,}2138629$..... log. p.
$-\ 9{,}8219420$... log. ſin. $m'P$.	$9{,}8219420$..... log. ſin. $m'P$.
$9{,}0784080$... log. tang. long. corr.	$+4{,}0358049$.
	$-2{,}2516199$..... log. $\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}$.
	$1{,}7841850$..... log. $61''$.

Longitude corrigée $= 6^d\ 49'\ 50''$.

Longitude vraie $= 6.\ 49.\ 50. - 1'\ 1'' = 6^d\ 48'\ 49''$.

Longit. vraie en temps $= 27.\ 15$.

Détermination de l'angle de la perpendiculaire, avec le Méridien de Breſt.

Je calcule enfin l'angle de la perpendiculaire avec le Méridien de Breſt, au moyen de l'équation (1) du §. 87.

$+19{,}9480174$..... log. r tang. $m'P$.
$-\ 8{,}8990000$..... log. ſin. p.
$11{,}0490174$..... log. tang. angle.

Angle de la perpendiculaire avec le Méridien de Breſt $= 84^d\ 53'\ 43''$.

(130.) Par de ſemblables calculs, on trouvera les valeurs ſuivantes :

Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.

Latitude vraie de Breſt.................... $= 48^d\ 22'\ 42''$.
Longitude en temps...................... $= 27.\ 15$.

Rapport des axes de la Terre, comme 200 à 201.

Latitude de Breſt.......................... $= 48^d\ 22'\ 42''$.
Longitude en temps...................... $= 27.\ 16$.

Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.

Latitude de Breſt.......................... = 48^d 22′ 41″.
Longitude en temps....................... = 27. 17.

Rapport des axes de la Terre, comme 299 à 300.

Latitude de Breſt.......................... = 48^d 22′ 40″.
Longitude en temps....................... = 27. 18,5.

Rapport des axes de la Terre, comme 1 à 1.

Latitude de Breſt.......................... = 48^d 22′ 39″.
Longitude en temps....................... = 27. 23.

QUATRIÈME QUESTION.

(131.) On peut ſe propoſer la queſtion ſuivante:

Fig. 7. *Étant donnée la diſtance perpendiculaire* F M′, *d'un lieu* F *à une ligne* M′ M′ *perpendiculaire au Méridien d'un lieu* M; *ainſi que la diſtance* M′ M′ *du point* M′ *au point* M′ *interſection des deux perpendiculaires* M′ M′, F M′; *on demande la latitude du lieu* F, *&* *ſa longitude relativement au lieu* M. *On ſuppoſe d'ailleurs que l'on connoît la poſition du point* M′ *pris ſur le Méridien du lieu* M, *relativement au lieu* M.

Cette queſtion ſe réſout par les méthodes précédentes; il ne s'agit que de décompoſer la ſolution en deux parties. On regardera d'abord l'interſection *M′* des deux perpendiculaires, comme un premier lieu dont on déterminera la poſition par les méthodes précédentes; c'eſt-à-dire par les méthodes relatives au cas où la ligne eſt perpendiculaire au Méridien au point de départ. Et en effet, ces méthodes s'y appliquent, puiſque, relativement à cette interſection, l'on connoît ſa diſtance perpendiculaire *M′ M′* au Méridien du lieu *M*, ainſi que la poſition du point *M′* pris ſur ce Méridien, par rapport au lieu *M*. On déterminera donc la poſition du point *M′*, c'eſt-à-dire ſa latitude, & ſa longitude par rapport

au lieu *M*; on déterminera de plus l'angle de la perpendiculaire *Mm'* avec le Méridien *m'P*. Fig. 7.

Quand on aura ces données, on regardera le point *m'* comme un lieu relativement auquel il s'agira de déterminer la position du point *F*. Il est bien évident qu'il faudra alors faire usage des méthodes relatives aux lignes inclinées sur le Méridien au point de départ; & comme la ligne *Fm'* est perpendiculaire à la ligne *m'M'*, elle fait évidemment, avec le Méridien *m'P*, un angle qui diffère de 90ᵈ de celui que fait la ligne *M'm'* avec le même Méridien *m'P*.

(132.) Pour rendre cette solution plus sensible, cherchons la position d'un lieu *F*, par rapport à Paris, d'après la condition que la distance perpendiculaire *Fm'* de ce lieu, à la ligne *m'M'* perpendiculaire au Méridien de Paris & menée par Paris, est de 14614 toises du côté du Midi; & que de plus la distance *m'M* de l'intersection *m'* des deux perpendiculaires, au point *M'* où la perpendiculaire *m'M'* coupe le Méridien de Paris, est de 259168 toises.

(133.) Je cherche d'abord, conformément à ce qui a été dit, la position de l'intersection *m'*, par rapport à Paris; c'est-à-dire, je cherche la position du lieu situé sur la perpendiculaire passant par Paris, à une distance de 259168 toises du côté de l'Occident, & j'ai, en supposant les axes de la Terre dans le rapport de 177 à 178,

Latitude corrigée de l'intersection *m'*.........	=	48ᵈ	28'	22."
Latitude vraie de l'intersection *m'*..........	=	48.	37.	59.
Longitude corrigée de l'intersection *m'*......	=	6.	51.	53.
Longitude vraie de l'intersection *m'*........	=	6.	50.	52.
Longitude en temps..................	=		27.	24.
Angle de la perpendic. avec le Méridien *m'P*.	=	84.	51.	0.

Il ne s'agit plus que de déterminer la position du lieu *F*, relativement au point *m'*.

(134.) Pour y parvenir, j'observe, conformément au §. 131, que puisque l'angle de la perpendiculaire *Fm'*,

Fig. 7. avec le Méridien $\mathcal{M}'P$, diffère de 90 degrés de l'angle de la perpendiculaire $\mathcal{M}'M'$ avec le même Méridien, on a angle $D = 174^d\ 51'\ 0''$. Il faut donc chercher la position du point F, par rapport au point $\mathcal{M}'$, en regardant la ligne $F\mathcal{M}'$ comme une courbe du genre des perpendiculaires, mais qui fait avec le Méridien $\mathcal{M}'P$, un angle de $174^d\ 51'\ 0''$ au point de départ.

(135.) Si l'on calcule dans cette dernière hypothèse, on aura $P = 15'\ 26''$; $m'P$ = complément de la latitude corrigée de l'intersection $\mathcal{M}' = 41^d\ 31'\ 38''$. D'ailleurs, à cause de l'équation (1) du §. 68, $\mu'P = 3^d\ 24'\ 43''$; à cause de l'équation (1) du §. 69, $A' = 48^d\ 35'\ 12''$; à cause des équations du §. 73, $\gamma = 713'',3$; $\gamma' = 710'',4$; $p = 15'\ 23''$; à cause des équations (2), (3) & (4) du §. 72, $A = 48^d\ 19'\ 49''$; latitude corrigée du lieu $F = 48^d\ 12'\ 59''$; longitude corrigée du lieu $F = 2'\ 5''$; à cause de l'équation (1) du §. 19, latitude vraie du lieu $F = 48^d\ 22'\ 36''$; & enfin, à cause de l'équation (3) du §. 80, longitude vraie du lieu F par rapport au point $\mathcal{M}' = 2'\ 5''$; longitude vraie en temps $= 8''$.

Ces résultats ne diffèrent que de 6″ en latitude, & de 1″ de temps en longitude, des résultats trouvés précédemment.

Remarque sur le calcul des Longitudes.

(136.) Lorsque l'on calcule la position du point $\mathcal{M}'$ relativement au point M, ainsi que la position du lieu F relativement au point $\mathcal{M}'$, on peut remarquer que les formules qui donnent les longitudes, sont absolument indifférentes au sens dans lequel ces longitudes sont comptées. Que la longitude du point $\mathcal{M}'$ soit orientale ou occidentale par rapport au lieu M, que la longitude du lieu F soit orientale ou occidentale par rapport au point $\mathcal{M}'$, les formules sont absolument les mêmes. Comme cependant ces résultats doivent être combinés, il est indispensable de fixer le sens respectif des longitudes. En général, si le lieu F est plus boréal que

l'interfection m' des perpendiculaires Fm', $m'M'$, il faudra ajouter à la différence en longitude du point m' par rapport au lieu M, la différence en longitude du lieu F par rapport au point m'; il faudra au contraire fouftraire la différence en longitude du lieu F par rapport au point m', de la différence en longitude du point m' par rapport au lieu M, fi le lieu F eft plus auftral que l'interfection m' des perpendiculaires Fm', $m'M'$. Ce dernier cas eft celui de l'exemple propofé. Fig. 7.

Examen d'une Queftion importante.

(137.) Lorfque l'on veut calculer la pofition d'un lieu F par rapport à un lieu M, peut-on indifféremment regarder ce lieu comme fitué fous une certaine perpendiculaire $F\mu$, qui coupe le Méridien du lieu M à la diftance μM du lieu M, & dont la diftance perpendiculaire au Méridien du lieu M égale $F\mu$; ou doit-on confidérer abfolument la diftance perpendiculaire Fm', du lieu F, à la ligne $m'M'$ perpendiculaire au Méridien du lieu M, ainfi que la diftance $m'M'$ de l'interfection m', au Méridien du lieu M? En un mot peut-on rapporter fur le Méridien du lieu M, la diftance Fm' du lieu F à la perpendiculaire $m'M'$?

(138.) Les calculs auxquels nous venons de nous livrer, nous mettent en état de réfoudre cette queftion. Il fuit de ces calculs, que ces deux Problèmes font réellement différens. Si cependant les diftances que l'on confidère n'étoient que d'un petit nombre de degrés, l'on pourroit, fans erreur notable, fubftituer l'une des queftions à l'autre; il feroit néanmoins néceffaire d'avoir égard à cette différence dans des calculs très-rigoureux.

CINQUIÈME QUESTION.

(139.) On peut encore fe propofer la queftion fuivante:

Étant données la latitude vraie de deux lieux M, F, *&* Fig. 8.
leur différence en longitude, déterminer la diftance de ces deux lieux, fur le fphéroïde.

Fig. 8. Pour résoudre cette queſtion, on ſe rappelera que l'on a l'équation ſuivante,

$$(1)\ \text{longit. corr.} = \text{long. vraie} + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^2}\,\frac{\text{ſin.}\, m'P \times \text{ſin.}\, D}{r^2}\,\text{perpend. corr.}$$

Dans cette équation, $m'P$ eſt le complément de la latitude corrigée du lieu M; quant à l'angle D, c'eſt l'angle de la perpendiculaire vraie avec le Méridien du lieu M; & cet angle eſt égal à l'angle de la perpendiculaire corrigée avec le Méridien corrigé du lieu M; de plus, la perpendiculaire corrigée n'eſt autre choſe que la ligne qui, ſur le ſphéroïde, joint les points m, F'. Il eſt évident, que dans le triangle ſphérique mPF', le côté mP eſt le complément de la latitude corrigée du lieu M, le côté PF' eſt le complément de la latitude corrigée du lieu F, & l'angle P eſt la différence en longitude corrigée de ces deux lieux; ſi donc l'on prend pour valeur de l'angle P, la longitude vraie, l'on aura des expreſſions de l'angle PmF', & du côté mF', qui ne différeront des véritables valeurs, que par des termes de l'ordre $\frac{\Delta^2}{r^2}$; & comme ces quantités entrent dans un terme multiplié par $\frac{\Delta^2}{\rho^2}$, on aura une valeur de la longitude corrigée, exacte aux termes près de l'ordre $\frac{\Delta^4}{r^4}$. D'ailleurs, l'angle que nous avons nommé D, n'eſt autre choſe que l'angle PmF'.

(140.) La Trigonométrie ſphérique nous apprend que l'on a

$$(1)\ \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}PF'm\right) = \frac{\text{cotang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{long.}\right)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(\text{lat. corr. } M - \text{lat. corr } F)}{\text{coſin.}\tfrac{1}{2}(\text{latitude corr. } M + \text{latitude corr. } F)},$$

$$(2)\ \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}PF'm\right) = \frac{\text{cotang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{long.}\right)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(\text{lat. corr. } M - \text{lat. corr } F)}{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(\text{latitude corrigée } M + \text{latitude corrigée } F)},$$

$$(3)\ \text{ſin. (perpend. corrigée)} = \frac{\text{ſin. (longitude)} \times \text{coſ. (latitude corrigée du lieu } F)}{\text{ſin. } D}.$$

Nous pouvons donc connoître exactement la longitude

corrigée du lieu F par rapport au lieu M, au moyen de l'équation (1) du *§. 139.* Fig. 8.

(141.) On connoîtra pareillement le véritable angle D & la véritable perpendiculaire corrigée qui satisfont au Problème, au moyen des équations (1), (2), (3) du *§. 140*, dans lesquelles on emploira la longitude corrigée déterminée ci-dessus, au lieu de la longitude vraie dont on aura fait usage dans le premier calcul. Au moyen des équations (1) des *§§. 68 & 69*, on calculera la valeur de $\mu'P$ & de A', en remarquant que $m'P$ qui entre dans l'expression de $\mu'P$ est le complément de la latitude corrigée du lieu M; on déterminera ensuite la valeur de P, au moyen des équations du *§. 73*, en observant que dans la valeur de γ l'on peut substituer p à P; l'on réduira P en toises, au moyen de l'équation (3) du *§. 52*, & la question sera résolue.

On n'oubliera pas aussi que nous entendons par F, celui des deux lieux dont la latitude est la plus petite, & par M celui dont la latitude est la plus grande.

Remarques sur les Questions résolues dans ce Mémoire.

(142.) Dans la Connoissance des Temps, on donne pour longitude occidentale de Brest, 27′ 23″ de temps; & pour latitude, 48ᵈ 22′ 55″.

Les Éclipses du 1.er Avril 1764 & du 4 Juin 1769, m'ont donné chacune pour longitude de Brest, 23′ 14″,5 de temps. Cet accord m'a paru d'autant plus frappant, que dans mon calcul, tout ce qui dépend des élémens de la Lune est évanoui, & qu'il ne reste absolument que les erreurs des observations; de sorte que, si les Observateurs ont bien observé, ainsi qu'ils l'attestent, les résultats sont hors de toute atteinte. J'ajouterai que le dernier passage de Vénus sur le disque du Soleil, a conduit M. de la Lande à une semblable conclusion, quoiqu'il ait cru devoir s'y refuser & suspecter les observations.

Fig. 8. (143.) Si l'on rapproche ces déterminations, des calculs de ce Mémoire, on conclura que les mesures géodésiques calculées rigoureusement, ne s'éloignent pas du résultat trouvé par les observations astronomiques; & que même un des rapports des axes de la Terre, regardé comme probable (celui de 177 à 178), donne à une demi-seconde près la longitude de Brest trouvée astronomiquement.

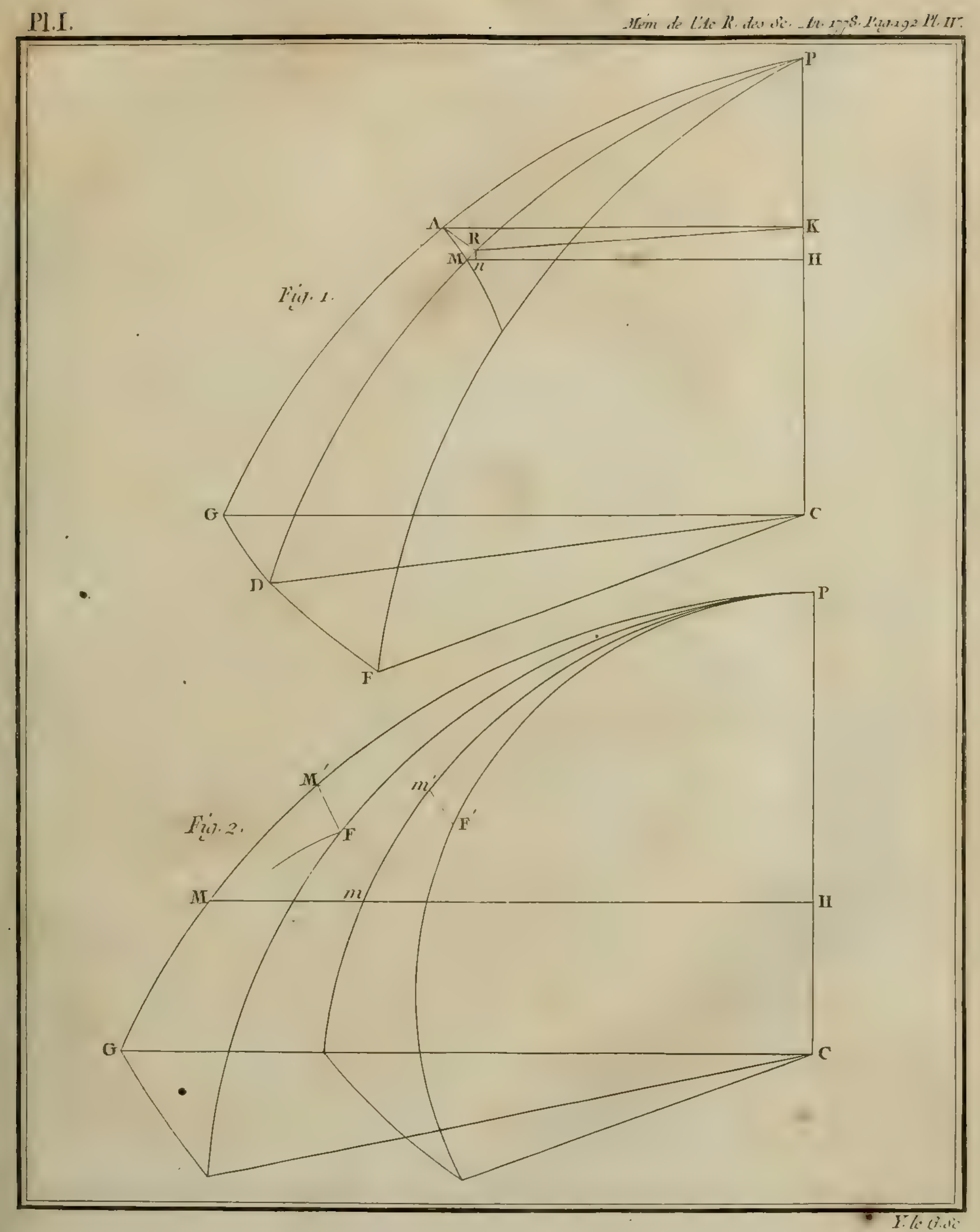
(144.) Ne doit-on pas conclure de ces recherches, qu'en combinant de très-bonnes observations astronomiques avec des opérations géodésiques très-exactes, & des calculs rigoureux, il ne seroit peut-être pas impossible de déterminer le degré d'aplatissement de la Terre, qui satisfait aux observations faites en France?

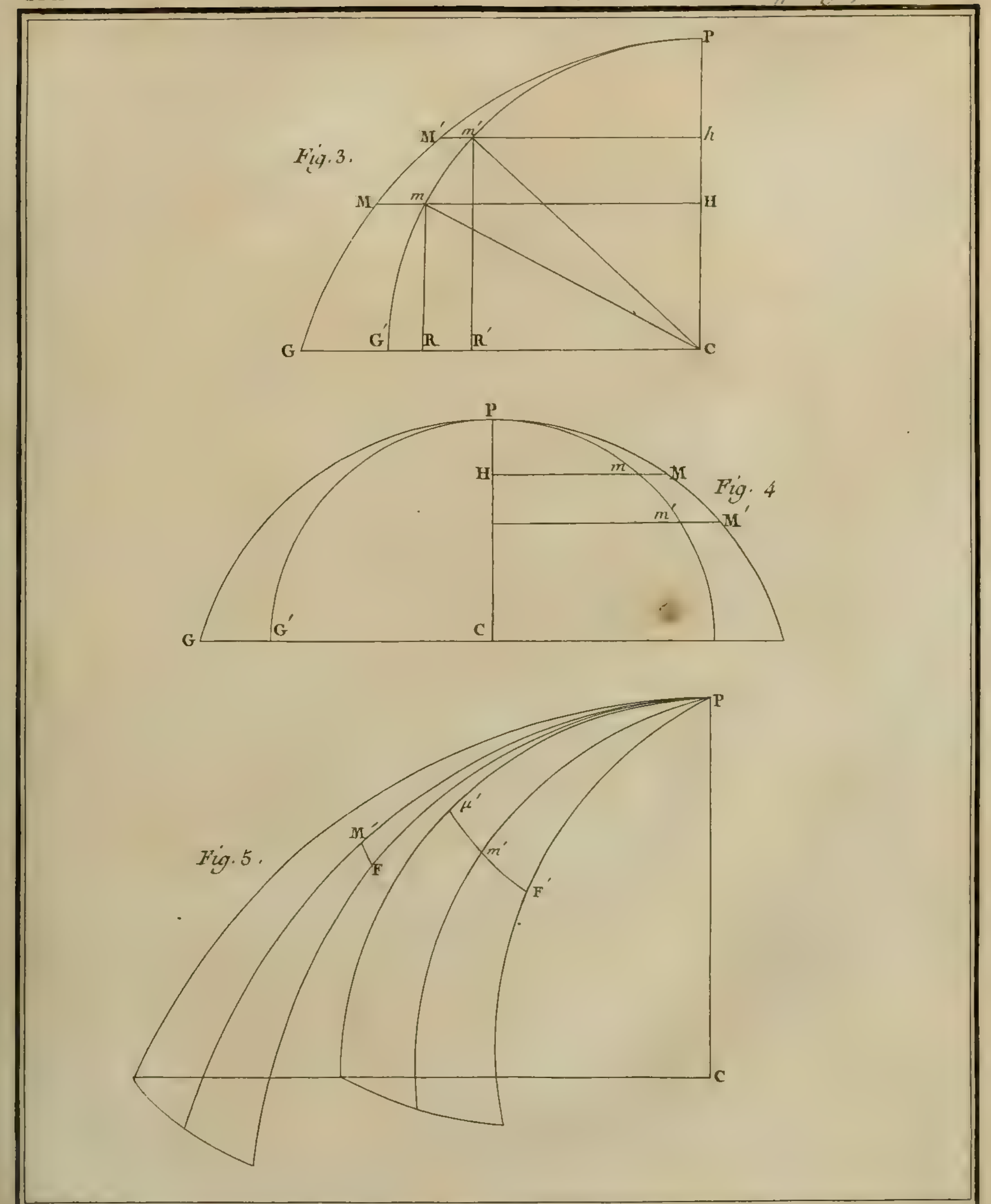
(145.) Je ne puis cependant dissimuler que, si l'on suppose avec M.rs Cassini, la distance de Perpignan à la Méridienne de Paris, de 23805 toises du côté de l'Orient, la distance du pied de cette perpendiculaire, à l'Observatoire de Paris, de 350098 toises du côté du midi, & la latitude de Perpignan de $42^d\ 41'\ 55''$; cette latitude est plus grande de $13''$, $10''$, $7''$, $2''$, & plus petite de $12''$, que la latitude que l'on conclut respectivement des rapports de 177 à 178, de 200 à 201, de 229 à 230, de 299 à 300 & de 1 à 1. Je soumets ces réflexions aux Astronomes.

(146.) Je ne m'étendrai pas davantage sur les perpendiculaires à la Méridienne. Je crois n'avoir omis aucune des considérations qui peuvent être utiles dans la pratique; & l'on peut regarder ce Mémoire, comme un Traité complet de ces courbes.



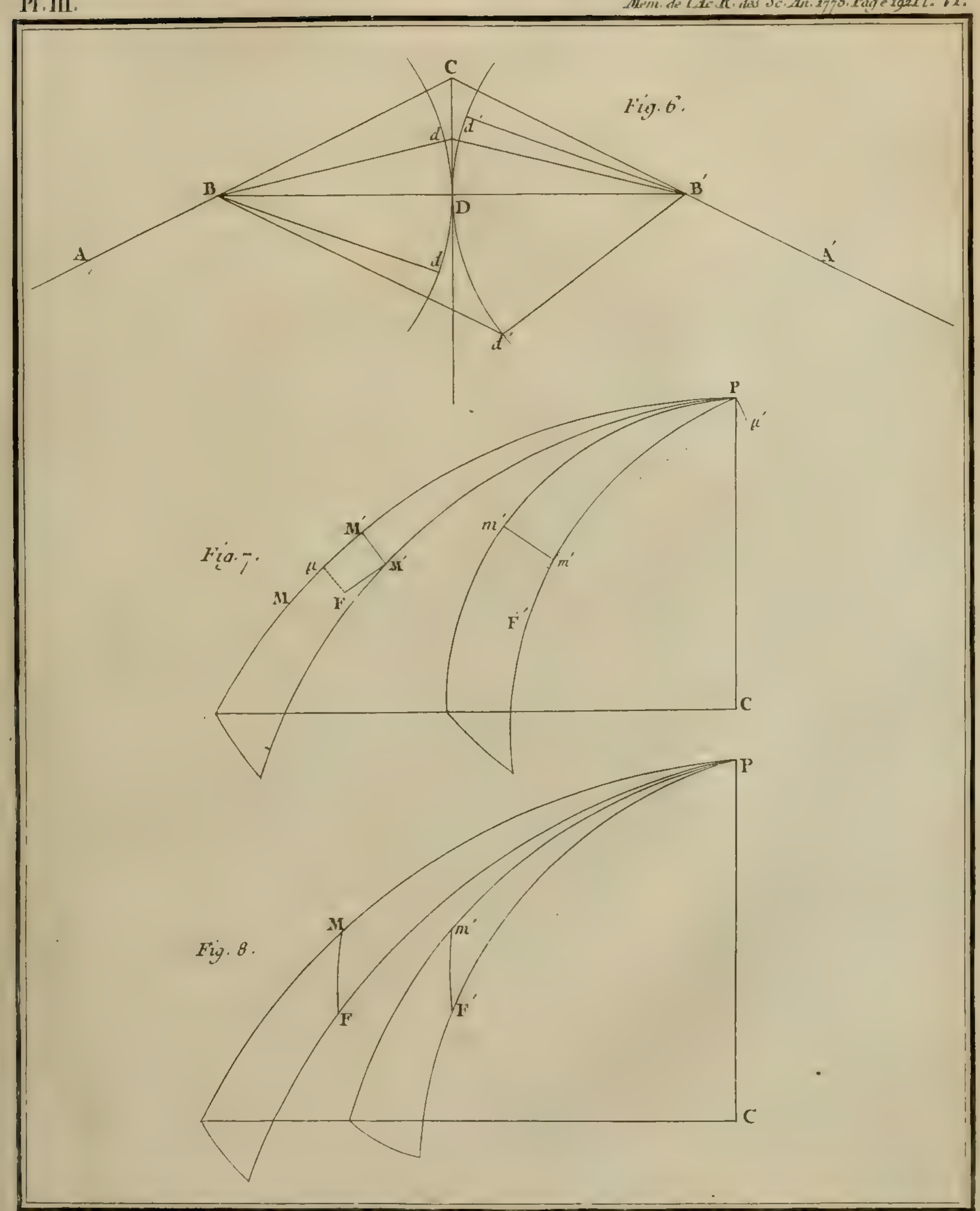
OBSERVATIONS


Fig. 1.
P
A
K
R
M
n
H
G
C
D
F
Fig. 2.
P
M'
m'
F'
F
M
m
H
G
C



Y. le G. S.





Y. le G. Sc.



OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES AU CHÂTEAU DE SARON (a), PENDANT L'AUTOMNE DE 1778.

Par M. MESSIER.

Présenté le 23 Déc. 1778. Lû le 4 Août 1779.

JE passai les Vacances de notre Académie dans la Terre de Saron, qui appartient à M. le Président Bochart de Saron, située en Champagne à vingt-cinq lieues de Paris, & presque à la réunion des deux rivières de la Seine & de l'Aube.

Par plusieurs Observations, faites précédemment à Saron, la position du Château avoit déjà été déterminée d'une manière fort précise ; & principalement lors de l'Observation du passage de Vénus au-devant du Soleil, le 3 Juin 1769: elle fut faite par M. de Saron, avec sa lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, qui grossissoit soixante-huit fois. Voici les détails de cette Observation. « Des nuages très-épais & très-noirs, empêchèrent d'observer le premier contact de Vénus; « mais au-dessous de ces nuages, qui formoient comme un « rideau, l'horizon étoit fort net, & M. de Saron vit aussi- « bien qu'il fut possible de voir, le contact du bord intérieur « de Vénus avec le Soleil; mais l'ondulation excessive, causée « par les vapeurs de l'horizon, rendoit le disque du Soleil « très-mal terminé, & Vénus paroissoit toute raboteuse, ce qui « pouvoit produire sur cette observation une incertitude estimée « d'environ 10 secondes de temps. »

Temps vrai à Saron du dernier contact de Vénus, à $7^h 44' 2''$ du soir *(b)*.

(a) Ce château est à l'Orient de Paris de 52,902 toises, & plus au Sud de 14,823 : la différence des Méridiens entre l'Observatoire royal, de 5' 39" de temps à l'Orient, & la hauteur du Pôle de $48^d\ 33'\ 45''$.

(b) Cette observation est rapportée & discutée dans nos Mémoires, par M. le Monnier, *année 1770, page 232.*

La Pendule à secondes avoit été réglée le même jour par des hauteurs correspondantes du Soleil.

L'éclipse de Soleil, le lendemain du passage de Vénus, le 4 Juin matin, y fut aussi observée par M. de Saron, avec la même lunette achromatique.

M. du Séjour a déduit de cette Observation, la différence des Méridiens entre l'Observatoire royal de Paris & le château de Saron; par le commencement de l'Éclipse, il a trouvé 5′ 39″, & par la fin, également 5′ 39″ *(c)*.

La hauteur du Pôle du château de Saron, a été déterminée en 1766 & 1767, par des hauteurs méridiennes du Soleil, & par des hauteurs d'Étoiles circonpolaires dans leurs médiations inférieures & supérieures, prises avec deux quarts-de-cercle de 18 pouces & d'un pied de foyer, faits à Londres par Bird.

Résultat des Observations pour la hauteur du Pôle de Saron.

1766. Septembre 29, par le Soleil	48d	33′	56″
Septembre 30, *idem*	48.	33.	47.
Octobre 2, *idem*	48.	33.	51.
Octobre 3, *idem*	48.	33.	50.
Octobre 4, *idem*	48.	33.	48.
Octobre 4, par γ du Capricorne	48.	33.	16.
Octobre 4, par ε de Pégase	48.	33.	5.
Octobre 23, par le Soleil	48.	33.	48.
Octobre 27, *idem*	48.	34.	2.
Octobre 27, *idem*	48.	34.	4.
Novembre 10, *idem*	48.	34.	10.
1767. Novembre 28, par l'Étoile polaire	48.	33.	42.
Décembre 3, *idem*	48.	33.	23.
Par un milieu	48.	33.	45.

M. de Saron avoit réuni à sa Terre, l'automne dernier 1778, plusieurs instrumens, savoir, sa lunette achromatique

(c) Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 235.*

de 3 pieds $\frac{1}{2}$; un petit téleſcope Grégorien d'un pied de foyer, monté ſur une machine parallactique, garnie d'un micromètre filaire; un quart-de-cercle d'un pied de rayon, & pluſieurs Pendules à ſecondes.

Le ciel fut preſque continuellement couvert, avec pluie & grand vent pendant l'automne: ces mauvais temps rendirent les obſervations peu nombreuſes.

Le 29 Septembre, j'arrivai au château de Saron; le ſoir, le ciel étoit beau & ſerein: je dirigeai à la Lune, la lunette achromatique, & je vis dans le voiſinage de cette Planète, deux Étoiles de cinquième & de ſixième grandeur, toutes deux appartenantes à la conſtellation du Sagittaire, déſignées dans les Catalogues, ſous la lettre *h* 1 & 2, & je reconnus que l'une des deux h^1, ſixième grandeur, ſeroit éclipſée par le bord obſcur de la Lune: elle n'étoit pas annoncée.

M. de Saron fit l'obſervation avec ſon téleſcope d'un pied, & il obſerva

L'immerſion au bord obſcur à.............. $9^h\ 26'\ 17''\frac{1}{2}$.
Je l'obſervai avec la lunette achromatique à..... 9. 26. 16 $\frac{1}{2}$.

L'Étoile h^2 paſſa au-deſſous du bord de la Lune.

Le même ſoir, comme la Pendule n'étoit pas encore réglée, M. de Saron, pour avoir l'heure, prit des hauteurs de deux Étoiles, l'une au Levant, l'autre au Couchant: ces deux Étoiles étoient α du Bélier & α d'*Ophiucus;* les hauteurs obſervées ayant été calculées, il en conclud l'heure de la Pendule; & les réſultats entre l'heure déduite des hauteurs obſervées de α du Bélier & l'heure déduite des hauteurs obſervées de α d'*Ophiucus*, ne différant que d'environ 3 ſecondes: par un milieu, il a conclu l'heure auſſi exactement qu'on l'obtiendroit par des hauteurs correſpondantes à la manière ordinaire, & l'erreur qui auroit pu ſe trouver dans les hauteurs abſolues, ſe trouve détruite, ou du moins corrigée.

M. Méchain, attaché au Bureau des Plans de la Marine, obſerva à Paris, le 29 Septembre 1778, la même Étoile h^1 du

Sagittaire au bord obſcur de la Lune, à 9^h $17'$ $50''$ de temps vrai; l'Obſervation fut faite à 6 ſecondes $\frac{1}{2}$ de temps à l'Orient de l'Obſervatoire royal. De l'Obſervation de M. de Saron & de la ſienne, il a déduit la différence des Méridiens entre le château de Saron & l'Obſervatoire royal de Paris, de $5'$ $38''\frac{1}{2}$ de temps, Saron à l'Orient; ce qui s'accorde avec ce qu'a donné l'Obſervation de l'éclipſe de Soleil du 4 Juin 1769.

Le 19 Octobre matin, j'obſervai, par un beau temps, l'immerſion du premier ſatellite de Jupiter; j'employai pour cette Obſervation, la lunette achromatique qui groſſiſſoit ſoixante-huit-fois; je ceſſai de voir le Satellite entrant dans l'ombre, à $5^h 48' 15''$ de temps vrai: obſervation excellente.

Le 27 Novembre matin, par un beau temps, mais le ciel n'étoit pas pur, Jupiter paroiſſoit mal terminé, & les bandes ſe voyoient avec peine; j'obſervai l'immerſion du premier Satellite avec la lunette achromatique; je ceſſai de le voir entrant dans l'ombre à $4^h 9' 52''$, temps vrai: Obſervation un peu douteuſe.

On avoit annoncé une Éclipſe de Lune pour le 4 Décembre matin; nous avions préparé nos inſtrumens pour faire cette obſervation; le mauvais temps de la veille & des jours précédens ne donnoient preſque aucune eſpérance de pouvoir la faire; le Ciel fut conſtamment couvert juſqu'à 6 heures du matin qu'il commença à s'éclaircir, & peu de minutes après il devint preſque entièrement ſerein: l'éclipſe étoit dans ſon milieu alors; l'ombre étoit terminée, & elle ſe diſtinguoit très-bien de la pénombre. J'obſervois la ſortie des taches de l'ombre avec la lunette achromatique qui groſſiſſoit ſoixante-huit fois, tandis que M. de Saron obſervoit la diſtance des cornes de l'ombre, avec ſon téleſcope d'un pied, au moyen du micromètre filaire qui y étoit adapté. Voici nos Obſervations:

Observations des TACHES.

TEMPS VRAI.	NUMER. des TACHES.	
6h 12′ 20″	3	*Ariſtarchus* quitte l'ombre.
6. 15. 35	11	*Copernicus* quitte l'ombre.
6. 17. 20	*G*	*Mare fecunditatis* preſque à moitié ſortie.
6. 19. 20	*E*	*Mare tranquillitatis* à moitié ſortie.
6. 26. 52	24	*Manilius* ſort.
6. 28. 52	32	*Promontorium acutum* quitte l'ombre.
6. 32. 22	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.
6. 33. 32	7	*Harpalus* au bord de l'ombre.
6. 36. 56	25	*Menelaüs* au bord de l'ombre.
6. 38. 8	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
6. 38. 53	*C*	*Mare imbrium* à moitié ſortie.
6. 40. 53	*F*	*Mare ſerenitatis* commence à ſortir.
6. 40. 53	18	*Archimedes* au bord de l'ombre.
6. 46. 9	17	*Plato* à moitié ſorti.
6. 47. 9	*G*	*Mare fecunditatis* quitte l'ombre.
6. 48. 24	*F*	*Mare ſerenitatis* à moitié ſortie.
6. 50. 24	34	*Promontorium ſomnii* quitte l'ombre.
6. 54. 24	*H*	*Mare criſium* commence à ſortir.
6. 54. 24	*F*	*Mare ſerenitatis* quitte l'ombre.
6. 55. 25	27	*Poſſidonius* quitte l'ombre.
6. 59. 5	*H*	*Mare criſium* à moitié ſortie.
7. 1. 25	36	*Cleomedes* quitte l'ombre.
7. 3. 45	*H*	*Mare criſium* quitte l'ombre.
7. 5. 55	33	*Meſſahala* quitte l'ombre.

Quelques ſecondes après cette dernière Obſervation, un nuage épais qui bordoit l'horizon au-deſſous de la Lune, s'éleva & la couvrit entièrement, peut-être une minute ou deux au plus, avant la fin; & l'obſervation de la fin ne pût avoir lieu.

Distances des Cornes de l'Ombre.

TEMPS VRAI.	PARTIES du MICROM.	DISTANCE des CORNES.
6ʰ 24′ 24″	2400	30′ 37″
6. 26. 14	un peu moins.	
6. 27. 34	2374	30. 17
6. 29. 44	un peu moins.	
6. 30. 40	*idem.*	
6. 31. 30	*idem.*	
6. 42. 0	2236	28. 31
6. 44. 40	2194	27. 59
6. 46. 30	2021	25. 47
6. 52. 30	1790	22. 23
6. 54. 30	1704	21. 17
7. 1. 50	1055	13. 27
7. 6. 14	726	9. 16

Les premières distances des cornes, ainsi que les premières Observations des taches, sont un peu douteuses : l'ombre vers son milieu paroissoit comme stationnaire.

La marche de la Pendule à secondes, pendant le cours des Observations, avoit été connue par des hauteurs correspondantes du Soleil & par des hauteurs d'Étoiles, savoir, les 29 Septembre, 5, 10 & 27 Octobre, 2 Novembre, 2, 3 & 4 Décembre.



MÉMOIRE
SUR LE MOUVEMENT D'UN PENDULE DONT LA LONGUEUR EST VARIABLE.

Par M. l'Abbé BOSSUT.

I.

LE mouvement des Pendules ſimples ou composés, qui oſcillent autour d'un axe, en demeurant conſtamment à la même diſtance de cet axe, eſt connu depuis long temps des Géomètres; mais perſonne, du moins que je ſache, n'a encore examiné le mouvement d'un poids ſuſpendu par un fil, qui ſe raccourcit ou s'alonge ſuivant une certaine loi, tandis que le corps oſcille à droite & à gauche de la verticale. On trouve à la vérité dans le Recueil de l'Académie pour l'*année 1707*, un Écrit de M. Carré ſur le mouvement d'un Pendule qui ſe raccourcit uniformément; mais l'auteur ſuppoſe que le raccourciſſement ſe fait par intervalles, & lorſque le fil eſt arrivé à la verticale, de manière que le poids décrit toujours des arcs-de-cercle : ici je ſuppoſe que le fil ſe raccourcit ou s'alonge continuellement pendant que le poids oſcille, ce qui change totalement la nature de la queſtion. Ce nouveau Problème m'a paru curieux en lui-même; & je crois qu'il peut avoir quelque application dans la mécanique-pratique: par exemple, qu'un ſeau d'eau attaché à une longue corde qui le tire, ait été détourné par une cauſe quelconque de la verticale, & qu'en conſéquence il oſcille en montant, on peut avoir intérêt de connoître ſi ces oſcillations ne ralentiront pas d'une manière ſenſible le mouvement aſcenſionnel du ſeau; on peut demander auſſi les variations que le mouvement oſcillatoire produira dans les tenſions de la corde, &c. Ces conſidérations me font eſpérer que l'Académie voudra bien accorder quelques momens d'attention à l'examen

Lû le 5 Septembre 1778.

théorique de ces différentes queſtions, que j'ai l'honneur de mettre ſous ſes yeux.

I I.

Fig. 1 & 2. Soit donc un ſeau S attaché à une corde conſidérée comme non-peſante, qui va paſſer ſur la poulie fixe C, & qui eſt tirée continuellement par un agent quelconque; cet agent eſt, par exemple, une main appliquée à la manivelle d'un cylindre K, autour duquel la corde s'enveloppe, ou bien un poids N qui deſcend verticalement. Que ce ſeau, au lieu de monter directement ſuivant la verticale AC, ait été détourné, au premier inſtant, de cette ligne, par telle cauſe qu'on voudra, & qu'il décrive la courbe SMB; on demande la nature de cette courbe, & tout ce qui eſt relatif au mouvement du ſeau, en ſuppoſant que le fil conſerve toujours la direction rectiligne?

I I I.

Je ſuppoſe que le ſeau partant du point donné S & parvenu au point indéterminé M au bout d'un certain temps, décrive l'élément Mm pendant le premier élément de ce temps. Ayant prolongé Mm, je prends ſur ce prolongement la petite partie mh, pour exprimer l'eſpace que le corps M décriroit pendant le ſecond élément du temps, ſi étant arrivé en m, il conſervoit ſimplement par ſon inertie ſa vîteſſe ſuivant Mm; de plus, je repréſente par la petite verticale mr, l'eſpace que la gravité fait parcourir au corps M pendant qu'il décriroit mh. On voit, en conſtruiſant le parallélogramme $mrqh$, que la diagonale mq exprimera l'eſpace que le corps M parcourroit librement, en vertu des deux vîteſſes mh, mr combinées enſemble: mais réellement le corps ſera ramené de q en m' par la puiſſance qui tire le fil & décrira la diagonale mm' du ſecond parallélogramme $mqm't$, laquelle eſt ainſi l'élément de la courbe conſécutif à Mm; d'où l'on voit que ſi l'on nomme M la maſſe du ſeau, T la tenſion accélératrice du fil, dt l'élément variable du temps, on aura d'abord $T = \frac{M \times qm'}{(dt + ddt)^2}$.

IV.

IV.

Du point S, ſoit menée la perpendiculaire SA à CA; & ſoient AP, PM les coordonnées perpendiculaires pour le point M de la courbe SMB; qu'on décrive du point C, avec les rayons CM, Cm, les arcs QMZ, qm, dont le premier rencontre en Z la droite Cm prolongée; du point m, avec les rayons mq, mm', ſoient décrits les petits arcs qu, $m'l$ dans les angles qmh, $m'mh$; & des points M, m, ſoient menées les perpendiculaires MR, mR, l'une à l'ordonnée MP, l'autre à l'axe CP.

Suppoſons:

la diſtance initiale du ſeau S au point C... $= a$.
la droite donnée CA.................. $= b$.
AP.......................... $= x$.
PM.......................... $= y$.
SQ.......................... $= q$.
CM.................. $= a - q = r$.
l'angle PCM pour le rayon 1.......... $= z$.
Mm.......................... $= ds$.
la gravité...................... $= g$.

Chacune des deux petites lignes égales mr, hq, aura pour expreſſion $g(dt + ddt)^2$: de plus, on aura la proportion

$$dt : dt + ddt :: Mm\ (ds) : mh = \frac{ds\,(dt + ddt)}{dt}.$$

Les deux triangles rectangles ſemblables MRm, huq, donnent $hu = \frac{MR \times hq}{Mm}$; $qu = \frac{mR \times hq}{Mm}$: donc, en ſubſtituant pour les lignes Mm, MR, mR, hq, leurs valeurs analytiques, on aura $hu = \frac{g\,dx\,(dt + ddt)^2}{ds}$; $qu = \frac{g\,dy\,(dt + ddt)^2}{ds}$. Ainſi $mu = mh - hu = \frac{ds\,(dt + ddt)}{dt} - \frac{g\,dx\,(dt + ddt)^2}{ds}$; & $ul = ml - mu$

$= mm' - mu = (ds + dds) - \frac{ds(d + ddt)}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}$
$= dds - \frac{ds\,ddt}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}$.

V.

Les trois triangles rectangles semblables qui, $m'li$, MZm, donnent $qm' = ul \times \frac{iq}{iu} = ul \times \frac{Mm}{mZ} = \frac{ds\,dds}{dq} - \frac{ds^2\,ddt}{dq\,dt} + \frac{gdx\,(dt + ddt)^2}{dq}$; & $uq + lm' = ul \times \frac{uq}{iu} = ul \times \frac{MZ}{mZ}$; ou bien $lm' = ul \times \frac{MZ}{mZ} - uq = \frac{rdz}{dq}\left[dds - \frac{ds\,ddt}{dt} + \frac{gdx(dt + ddt)^2}{ds}\right] - \frac{gdy(dt + ddt)^2}{ds}$.

V I.

Cela posé, en substituant pour qm' sa valeur dans l'équation $T = \frac{-M \times qm'}{(dt + ddt)^2}$, & négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on aura

$$(A)\ T = M\left(\frac{ds\,dds}{dq\,dt^2} - \frac{ds^2\,ddt}{dq\,dt^3} + \frac{gdx}{dq}\right);$$

quantité qu'on pourra changer en une autre qui ne contienne qu'une seule variable, lorsqu'on aura l'expression du temps, & l'équation de la courbe SMB.

De plus, en égalant la valeur trouvée ci-dessus pour lm', à sa valeur générale, qui est, comme on sait, $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds}$, on aura l'équation

$$\frac{rdz}{dq}\left(dds - \frac{ds\,ddt}{dt} + \frac{gdx\,dt^2}{ds}\right) - \frac{gdy\,dt^2}{ds} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds},$$

laquelle devient (en observant que $dq = - dr$; $x = b - r\cos. z$; $y = r\sin. z$; $ds^2 = dr^2 + rrdz^2$)

$$r dr^2 dt ddz + 2 dr^3 dt dz + r^3 dt dz^2 ddz + 2 r^2 dr dz^3 dt + g \text{ sin. } z dr^2 dt^3 + g \text{ sin. } z . r^2 dz^2 dt^3 - r dr^2 dz ddt - r^3 dz^3 ddt = 0;$$

ou bien (en divisant tout par $dr^2 + rrdz^2$),

$$(B)\ r dt ddz + 2 dr dz dt - r dz ddt + g dt^3 \text{ sin. } z = 0.$$

Substituant dans cette dernière équation pour dt & ddt, leurs valeurs données par la nature du mouvement de la puissance qui tire la corde, on aura l'équation de la courbe *SMB*, exprimée en r, z, dr, dz, ddr & ddz.

VII.

Supposons, par exemple, que le fil soit tiré par un cylindre *K*, autour duquel il s'enveloppe, & qui tourne uniformément sur son axe; alors on a $dt = \frac{dq}{n} = - \frac{dr}{n}$, n étant la quantité dont le fil se raccourcit ou s'enveloppe sur le cylindre *K* pendant l'unité de temps. Faisons dt constant, ou $ddt = 0$, & par conséquent aussi $ddr = 0$, l'équation *(B)* deviendra Fig. 1.

$$(C)\ r ddz + 2 dr dz + \frac{g dr^2}{n^2} \text{ sin. } z = 0;$$

ou bien, en supposant $\frac{g}{n^2} = m$, cos. $z = p$,

$$(D)\ r ddp (1 - pp) + 2 dr dp (1 - pp) + r p dp^2 - m dr^2 (1 - pp)^2 = 0.$$

VIII.

L'équation *(D)* n'est généralement intégrable par aucune méthode connue; mais si on suppose que les oscillations du corps *M* soient fort petites, alors, en prenant sin. $z = z$, l'équation *(C)* deviendra $r ddz + 2 dr dz + m z dr^2 = 0$; d'où il suit que si l'on suppose $z = c^{\int p dr}$, on aura l'équation differentielle du premier ordre,

$$(E)\ rdp + pprdr + 2pdr + mdr = 0.$$

Maintenant je fais $p = u - \frac{1}{r}$, & j'obtiens la transformée

$$(F)\ du + uudr + mr^{-1}dr = 0,$$

qui se rapporte à l'un des cas de l'équation de *Riccati;* mais ce cas est un de ceux où l'équation n'est pas intégrable par les méthodes connues jusqu'ici. Ainsi, pour achever la solution de notre Problème, on sera réduit à construire l'équation précédente par points, ou à l'intégrer par approximation, au moyen des séries. *Voyez le Calcul intégral de M. Euler, t. I.*

I X.

Le cylindre K tournant uniformément sur son axe, on voit, par l'équation (A) de l'*article VI*, c'est-à-dire ici, $T = - M\left(\frac{n^2 ds dds}{dr^3} + \frac{gdx}{dr}\right)$, que la tension du fil est variable d'un instant à l'autre, & que par conséquent l'agent qui fait tourner le cylindre est aussi variable.

X.

Supposons maintenant que les oscillations du seau M étant toujours fort petites, la puissance qui fait tourner le cylindre soit constante, en sorte que le mouvement de rotation du cylindre ne soit plus uniforme; alors en nommant f la tension constante du fil, & faisant dt constant, on aura $f = - M\left(\frac{ds dds}{dt^2 dr} + \frac{gdx}{dr}\right)$; ce qui donne sensiblement $dt^2 = \frac{-Mddr}{f - gM}$. Donc (en faisant, pour abréger, $\frac{f - gM}{M} = k$), $ddr = - kdt^2$ & $dr = Adt - ktdt$, la constante A doit être telle, qu'à l'origine S lorsque $t = 0$, la vîtesse $\frac{dr}{dt}$ soit donnée. Nommons n cette vîtesse; on

aura $A = n$; donc $dr = ndt - ktdt$ & $r = B + nt - \frac{ktt}{2}$. La conſtante B doit être telle, que $t = 0$ donne $r = a$; donc en général $r = \frac{2a + 2nt - ktt}{2}$, & $t = \frac{n \pm \sqrt{[n^2 + 2k^2(a - r)]}}{k}$; $dt = \frac{-kdr}{\sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}}$; on a donc r en t, & réciproquement t en r.

Cela poſé, en faiſant dt conſtant, & ſuppoſant $z = c\int p\,dt$, l'équation *(B)* devient $rdp + pprdr + 2pdr + gdt = 0$; ou bien $dp + ppdr + 2pr^{-1}dr - \frac{gkdr}{r\sqrt{[n^2 + 2k^2(a-r)]}} = 0$. Soit $p = u - \frac{1}{r}$; on aura la transformée $du + uudr - \frac{gkdr}{r\sqrt{[n^2 + 2k^2(a - r)]}} = 0$, qui ſe rapporte encore à un cas non intégrable de l'équation de *Riccati:* on aura donc recours aux méthodes d'approximation de M. Euler.

X I.

Si le ſeau *M,* toujours oſcillant, au lieu de monter en vertu du mouvement de rotation du cylindre *K,* étoit tiré par un poids *N* attaché à une corde qui va paſſer ſur la poulie *D* de renvoi, & deſcendant verticalement en ligne droite, le Problème ſe réſoudroit par les mêmes principes. En effet, que le ſeau *M* partant de *S,* le poids *N* parte de *D,* en ſorte qu'on ait toujours $DN = SQ$; ſoit faite pour le corps *M,* la même conſtruction que dans les *articles III & IV;* & ſuppoſons ici pour le corps *N,* que *Nn* eſt l'élément correſpondant à *Mm; nk* le petit eſpace correſpondant à *mh; kf* l'eſpace parcouru en un inſtant, en vertu de la gravité; *nn'* l'élément conſécutif à *Nn.* Fig. 2.

Faiſons comme ci-deſſus:

CS	....	$= a$.
CA	....	$= b$.
AP	....	$= x$.
PM	....	$= y$.
SQ ou *DN*	....	$= q$.

Faisons comme ci-dessus
- CM . . . . $= a - q = r$.
- L'angle PCM pour le rayon . . . . $= z$.
- Mm . . . . $= ds$.
- La gravité . . . . $= g$.
- L'élément variable du temps t . . . . $= dt$.

Il est clair qu'en nommant T la tension absolue du fil $MCDN$, on aura, comme dans l'*art. III*, $T = \frac{M \times qm'}{(dt + ddt)^2}$. Semblablement on aura pour le corps N, $T = \frac{N \times n'f}{(dt + ddt)^2}$; donc $M \times qm' = N \times n'f$: or (V) $qm' = \frac{dsdds}{dq} - \frac{ds^2 ddt}{dq.dt} + \frac{gdx(dt+ddt)^2}{dq}$; & on voit que $n'f = nf - nn' = nk + kf - nn' = \frac{dq(dt + ddt)}{dt} + g(dt + ddt)^2 - (dq + ddq) = \frac{dqddt}{dt} + g(dt + ddt)^2 - ddq$. Substituant ces valeurs de qm' & de $n'f$ dans l'équation $M \times qm' = N \times n'f$, on aura

$$M\left(\frac{dsdds}{dq} - \frac{ds^2 ddt}{dqdt} + \frac{gdxdt^2}{dq}\right) = N\left(\frac{dqddt}{dt} + gdt^2 - ddq\right),$$

ou bien,

$$M\left(\frac{dt^2 dsdds - ds^2 dtddt}{dt^4}\right) + N\left(\frac{dt^2 dqddq - dq^2 dtddt}{dt^4}\right) = gNdq - gMdx,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{Mds^2 + Ndq^2}{2dt^2} = gNq - gMx + C;$$

équation que donneroit immédiatement le principe de *la conservation des forces vives*.

Je suppose qu'aux points S & D, les vîtesses des deux corps soient nulles; ainsi $C = 0$, & l'équation précédente devient

$$Mds^2 + Ndq^2 = 2gdt^2(Nq - Mx),$$

ou (parce que $ds^2 = dr^2 + rrdz^2$, $x = b - r \text{ cof. } z$, $y = r \text{ fin. } z$, $q = a - r$),

$$(G)\ (M + N)\, dr^2 + Mrrdz^2 = 2gdt^2\,[N(a - r) - M(b - r \text{ cof. } z)].$$

Au moyen de cette équation, on pourra éliminer dt & ddt de l'équation (B) de l'*article VI*, qui a également lieu ici, & l'on aura la nature de la courbe SMB, exprimée en r, z, dr, dz, ddr, ddz.

XII.

Comme on ne peut pas espérer d'intégrer en général l'équation que je viens d'indiquer pour la courbe SMB, revenons au cas où les oscillations du corps M sont très-petites; alors on aura sensiblement $\text{fin. } z = z$, $ds^2 = dr^2$. De plus, dans le dénominateur de l'équation.....

$$dt^2 = \frac{(M + N)\, dr^2 + Mrrdz^2}{2g[N(a - r) - M(b - r \text{ cof. } z)]},$$

on pourra faire $a = b$, $r \text{ cof. } z = r$; donc cette équation deviendra $dt^2 = \frac{M + N}{2g(N - M)} \times \frac{dr^2}{a - r}$, ou bien $dt = -\sqrt{(\frac{M + N}{2g(N - M)})} \times \frac{dr}{\sqrt{(a - r)}}$, dont l'intégrale est $t = 2\sqrt{(\frac{M + N}{2g(N - M)})} \times \sqrt{(a - r)}$, en supposant $t = 0$ lorsque $r = a$; ainsi on a l'expression du temps.

Faisons dt constant, & supposons $z = c^{\int pdt}$; l'équation (B) devient $rdp + pprdr + 2pdr + gdt = 0$; ou bien

$$dp + ppdr + 2pr^{-1}dr - g\sqrt{(\frac{(N + M)}{2g(N - M)})} \times \frac{dr}{r\sqrt{(a - r)}} = 0;$$

ou bien (en supposant $p = u - \frac{1}{r}$),

$$du + uudr - g\sqrt{(\frac{N + M}{2g(N - M)})} \times \frac{dr}{\sqrt{(a - r)}} = 0,$$

qui ſe rapporte, comme les précédentes, à l'équation de *Riccati*.

XIII.

Les queſtions que nous avons examinées juſqu'ici deviendroient beaucoup plus ſimples, s'il étoit permis de négliger la peſanteur du corps *M*, ou ſi cette peſanteur étoit ſoutenue d'une manière quelconque. Par exemple, ſuppoſons que le corps *M* ſe meuve ſur un plan horizontal; que ce corps ait reçu une impulſion quelconque, oblique à la direction du fil, & que le fil s'enveloppe, comme dans l'*article VII*, autour d'un cylindre *K* qui tourne uniformément; alors, dans l'équation *(C)*, il faudra faire $\frac{g}{u^2}$ ou $m = 0$, & on aura ſimplement $rddz + 2drdz = 0$, ou bien $rrddz + 2rdrdz = 0$, dont l'intégrale eſt $rrdz = Adt = \frac{Adr}{n}$; donc $\frac{dr}{rr} = \frac{ndz}{A}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{r} = B - \frac{nz}{A}$, équation de la courbe droite par le corps *M*.

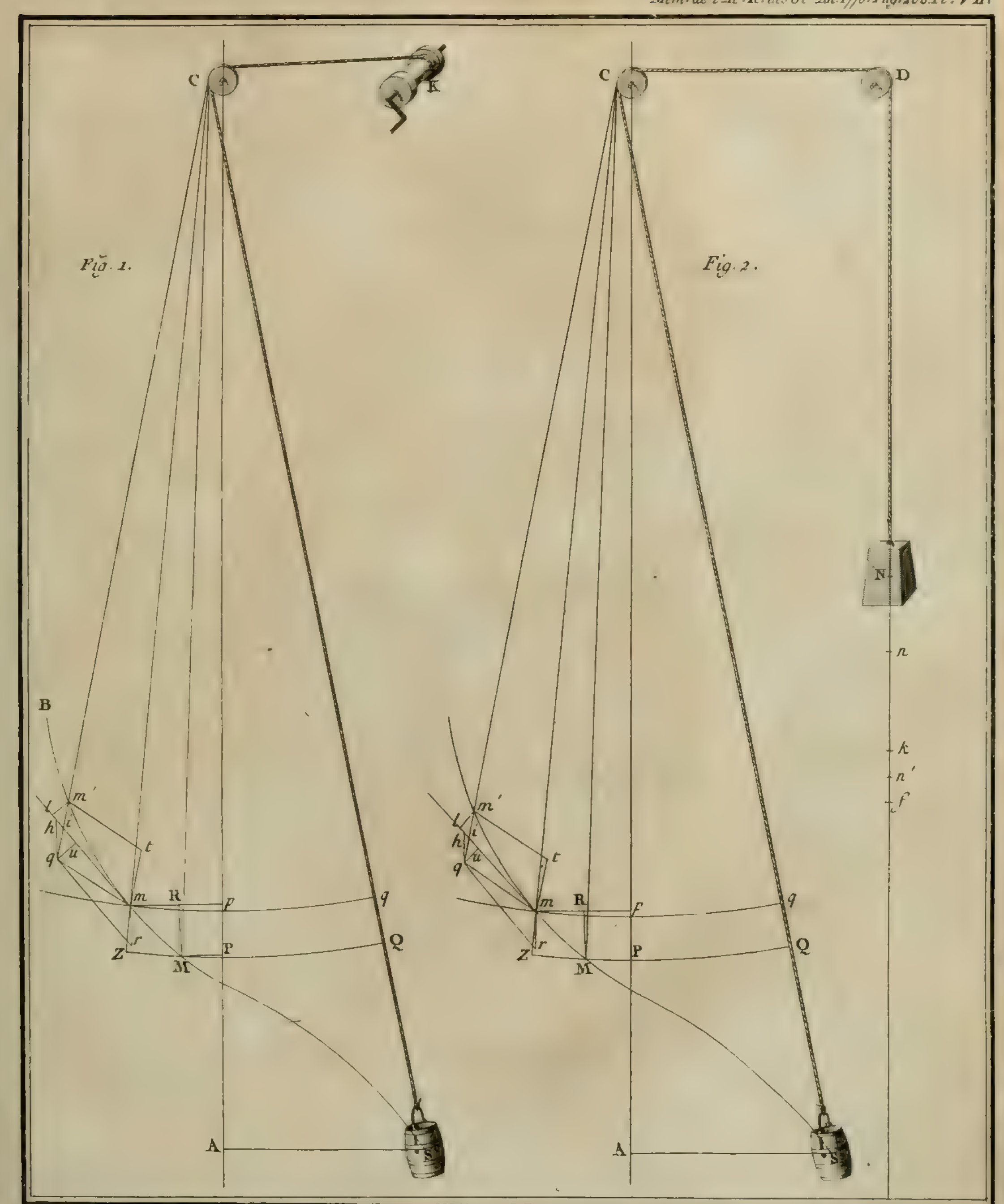
Les deux conſtantes *A* & *B* doivent être telles, 1.° qu'à l'origine *S*, la vîteſſe du corps *M* ſoit donnée; 2.° qu'en faiſant $r = a$, l'angle z, pris négativemenr, ſoit l'angle donné *ACS*.

XIV.

Suppoſons, pour ſecond exemple, que le corps *M* étant toujours poſé ſur un plan horizontal & ayant reçu une impulſion quelconque, le fil ſoit tiré par le corps *N* qui deſcend verticalement en ligne droite par ſa peſanteur; alors, en faiſant dt conſtant dans l'équation *(B)* de l'*article VI*, & effaçant le terme qui contient g, on aura $rddz + 2drdz = 0$; d'où l'on tire $rrdz = Adt$, ou $dt^2 = \frac{r^4dz^2}{A^2}$.

D'un autre côté, l'équation *(G)* de l'*article XI* donne $dt^2 = \frac{(M+N)dr^2 + Mr^2dz^2}{2gN(a-r)}$, en négligeant ici le terme

2 g M



Y. le G. Sc.



$2gM(b - r \text{ cos. } z)$; ainsi on aura

$$\frac{r^4dz^2}{A^2} = \frac{(M+N)dr^2 + Mrrdz^2}{2gN(a-r)};$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{A\sqrt{(M+N)} \cdot dr}{r\sqrt{[2gNr^2(a-r) - MA^2]}},$$

équation séparée qui exprime la nature de la courbe décrite par le corps M.

Substituant pour dz sa valeur dans l'équation $Adt = rrdz$, on aura $dt = \frac{rdr\sqrt{(M+N)}}{\sqrt{[2gN(a-r) - MA^2]}}$, équation qui donne le temps en r.



OBSERVATIONS SUR LA MINE ROUGE DE CUIVRE.

Par M. SAGE.

Lû le 6 Mai 1778.

LES Expériences dont je vais rendre compte, feront connoître que la mine rouge de Cuivre, n'eſt qu'une altération du cuivre natif, ou ce métal privé d'une portion de ſon phlogiſtique, & tendant à ſe décompoſer par l'efflo-reſcence, ce qui eſt conforme à ce que Cronſtedt a dit dans ſa Minéralogie, où il définit la mine rouge de cuivre: *Minera cupri calaformis pura friabilis vel indurata, colore rubro.*

La plus belle eſpèce de ces mines rouges de cuivre, ſe trouve dans la mine de Prédannah, dans la province de Cornouailles. M. Lehmann dit que ſa couleur, ſon tiſſu & ſes criſtaux font qu'elle reſſemble parfaitement à la mine d'argent rouge *: c'eſt ce qu'on peut vérifier en examinant les morceaux que je préſente à l'Académie; la mine rouge ſe trouve dans trois états.

1.° En criſtaux octahèdres tranſparens, d'un rouge de rubis: cette eſpèce a été nommée par Henckel, *mine de cuivre vitreuſe rouge.* Il dit qu'elle eſt ſi riche en cuivre que ce métal y eſt preſque tout pur; *Introduction à la Minéralogie, tome II, page 218.*

2.° En mamelons d'un rouge mat.

3.° En fibres ou petits filets opaques, dont la couleur approche de celle du cinabre: cette dernière eſpèce eſt connue ſous le nom de *fleurs de cuivre rouge.*

La mine rouge de cuivre criſtalliſée & tranſparente, ſe trouve preſque toujours avec le cuivre natif, dont elle n'eſt qu'une altération: c'eſt une vraie chaux de cuivre qui devient

* Art des Mines métalliques, *I.er volume, page 121.*

noirâtre après avoir été exposée au feu, & passe aussi-tôt à l'état de verre brun & chatoyant, lorsqu'on lui fait éprouver un degré de feu propre à faire rougir le creuset.

Lorsque le cuivre passe de l'état métallique à celui de rouille verte, qu'on nomme *patine*, on trouve que sous cette espèce de malachite solide, le cuivre est friable, & qu'il a pris une couleur d'un rouge mat; cette chaux rouge de cuivre cristallise souvent lorsqu'elle n'est point couverte de patine: c'est ce que je viens d'avoir occasion d'observer dans des fragmens de cuivre doré, qui avoient fait partie de la jambe de cheval qui fut trouvée en 1766 dans la Saône, auprès de S.te Claire. En rompant ces morceaux de cuivre on trouve de petites cavités tapissées de cristaux rouges octahèdres, transparens: la surface de ce cuivre, qui n'étoit point doré, étoit enduite de patine très-fine.

Un fragment de jambe de cheval en cuivre doré que M. Rigot de Terrebasse a trouvé dans la ville de Lyon, au mois de Novembre 1777, présente dans sa fracture des cavités avec des cristaux rouges transparens, & quelquefois des cristaux blancs transparens qui m'ont paru séléniteux: M. de la Tourette, qui a rendu compte à M. Bertin de la découverte de cette jambe, dit qu'elle n'a aucun rapport avec celle qui a été trouvée dans la Saône, que leurs proportions sont entièrement différentes.

L'analyse comparée de la mine rouge de cuivre & des cristaux rouges de cuivre que j'ai trouvés dans les fragmens de la jambe de cheval, m'ont fait connoître qu'il n'y avoit point de différence entre ces deux productions.

Ces cristaux rouges de cuivre étant exposés au feu dans un creuset, décrépitent, noircissent & deviennent opaques; par un feu plus violent, ils se changent en un émail brun chatoyant.

J'ai fondu de ces cristaux rouges avec deux parties de poudre de charbon, & j'ai reconnu qu'ils produisoient par quintal soixante-dix livres de cuivre.

L'expérience suivante démontre que ces cristaux rouges

ne contiennent que du cuivre. J'ai pulvérisé de ces cristaux, je les ai mis dans de l'alkali volatil, ils s'y sont dissous entièrement; l'alkali volatil a pris la plus belle couleur bleue.

Il résulte de ce que je viens de rapporter, que la mine rouge de cuivre est semblable, non-seulement par sa forme, mais encore par ses parties intégrantes, aux cristaux rouges de cuivre trouvés dans les fragmens de la cuisse de cheval; & l'un & l'autre paroissent produits par l'altération du cuivre le plus pur.



REMARQUES SUR LE MOUVEMENT DES CÔTES DANS LA RESPIRATION.

Par M. BORDENAVE.

L'ACTION des organes qui servent à la Respiration a mérité jusqu'à présent l'attention des Anatomistes. Depuis Galien jusqu'à nous, cette fonction importante a été l'objet d'une infinité de recherches. On a tâché d'établir par l'inspection anatomique, par l'observation & les expériences, l'usage des parties qui y sont destinées; mais, malgré ces travaux, nous croyons pouvoir avancer qu'il y a encore beaucoup de choses incertaines & beaucoup d'éclaircissemens à desirer.

Présenté le 20 Déc. 1777, achevé de lire le 21 Mars 1778.

On sait que la respiration est composée de deux mouvemens: l'un d'inspiration, dans lequel les dimensions de la poitrine sont augmentées; l'autre d'expiration, dans lequel elles sont diminuées. Le premier de ces mouvemens a été attribué à l'élévation des côtes & à leur rapprochement en même temps, & le second a été regardé comme l'effet de leur abaissement & de leur écartement : mais toutes les côtes s'élèvent-elles & se rapprochent-elles également dans l'inspiration? S'abaissent-elles & s'écartent-elles de même dans l'expiration? C'est ce que je me propose de discuter particulièrement dans ce Mémoire.

La respiration douce & naturelle pouvant se faire d'une manière presque insensible de la part des côtes, nous considèrerons spécialement l'action des côtes dans la respiration forte ou forcée.

Galien, en traitant de l'usage des parties *(a)*, après avoir

---

(a) De usu partium, lib. VII, cap. XX. *Monstrata sanè in illis sunt multa & admiranda naturæ in Thoracis actione artificia ; nam & in inspirationibus partium ejus alias quidem sursùm ferri, alias verò deorsùm : & rursùs in expirationibus quæ priùs deorsùm ferebantur, contra sursùm tendere ; quæ verò ante sursùm ferebantur, tunc in suam pristinam sedem reverti.*

exposé le mécanisme admirable de la Nature dans l'action de la poitrine, a avancé « que pendant l'inspiration, quelques-
» unes de ses parties sont portées en haut & les autres en bas;
» & qu'au contraire dans l'expiration, celles qui ont été portées
» en haut s'abaissent, & celles qui ont été abaissées retournent au lieu où elles étoient auparavant. »

On n'observe pas cette diversité d'action dans les côtes, à moins qu'on ne regarde comme une espèce d'abaissement, le défaut d'action des dernières fausses côtes qui ne suivent pas l'élévation des autres: toutes les côtes ont une action qui tend à la même fin, c'est-à-dire, à l'augmentation ou à la diminution de la capacité de la poitrine; mais elles opèrent cette augmentation ou cette diminution en agissant d'une façon différente relativement à leur disposition.

Si toute la poitrine paroît s'élever en même temps dans les inspirations fortes, subites & étendues, ce mouvement dépend beaucoup plus de la partie moyenne antérieure des côtes, que de la postérieure qui est retenue par des ligamens courts & forts, & par une double articulation avec le corps des vertèbres & leurs apophyses transverses: cette jonction, naturellement disposée en une direction oblique, est si ferme que, selon les expériences de M. de Haller, elle peut à peine permettre un mouvement égal à la sixième partie d'une ligne *(b)*; cependant elle n'empêche pas les côtes d'être élevées & déjetées en dehors en même temps.

Il n'en est pas de même de la partie antérieure des côtes; quoique terminée par un cartilage qui s'insère au sternum par une arthrodie si serrée, qu'on peut presque douter qu'il en résulte une articulation mobile, elle est beaucoup plus susceptible de mouvement; ces cartilages qui font angle plus ou moins obtus avec la portion osseuse des côtes, ainsi qu'avec le sternum, éprouvent quelque changement dans leur disposition pendant l'inspiration, par l'action simultanée de la poitrine, & en conséquence l'insertion solide des cartilages

(b) Opuscul. anat. pag. 86 & 87.

n'empêche pas que le mouvement ne s'opère particulièrement à la partie moyenne antérieure des côtes.

La première côte étant plus courte que les autres, & n'ayant qu'une portion cartilagineuſe très-peu étendue, inſérée au ſternum immédiatement au-deſſous de l'extrémité antérieure de la clavicule qui y eſt contiguë, eſt à peine ſuſceptible d'aucun mouvement ſenſible, & elle peut être regardée comme fixe, relativement aux autres côtes dont le mouvement eſt dirigé vers celle-ci.

Le mouvement de ces côtes n'eſt pas le même dans toutes; la ſeconde & la troiſième s'élèvent peu & s'approchent moins vers la première proportionnellement; la quatrième & les ſuivantes s'élèvent davantage en dehors, &, proportion gardée, s'approchent plus vers la première par leur partie moyenne. Diſpoſées obliquement pendant l'expiration, elles quittent cette obliquité pour prendre une direction qui approche plus alors de celle d'un cercle, & les angles remarquables à leur articulation avec les vertèbres & le ſternum deviennent ſeulement un peu plus grands. Ce mouvement paroît dépendre des arcs poſtérieurs des côtes, dont l'inclinaiſon eſt manifeſte, mais qui dans l'inſpiration ſont un peu tirées vers le haut & jetées en dehors. Les fauſſes-côtes dont les cartilages ne s'insèrent pas immédiatement au ſternum, ne s'élèvent pas autant que les vraies; les deux dernières flottantes ſe déjettent ſimplement en dehors.

Cette diverſité dans le mouvement des côtes paroît dépendre de ce que les ſupérieures ont ſur le corps des vertèbres de petites facettes articulaires ſur leſquelles elles ſont plus appuyées par la facette inférieure, par conſéquent plus libre vers le haut par la facette ſupérieure. Les côtes inférieures, par une diſpoſition différente, ayant leurs facettes ſupérieures plus appuyées ſur le corps des vertèbres, réſiſtent davantage au mouvement vers le haut & s'abaiſſent plus aiſément *(c)*. De-là il ſuit que

---

(c) Véſale, & Winſlow, Mémoires de l'Académie des Sciences, *année 1738, page 88.*

les vraies côtes s'élèvent; que les fausses, & sur-tout les inférieures, s'élèvent peu, & s'écartent seulement en dehors; on peut même dire, avec raison, que les dernières ne s'élèvent point, & même ne peuvent s'élever, étant retenues par le muscle quarré des lombes qui s'oppose à ce mouvement; ce qui confirme en quelque sorte le sentiment de Galien sur le défaut d'élévation qu'éprouvent les côtes inférieures, pendant que les supérieures s'élèvent.

Le mouvement des côtes est en général plus remarquable vers leur partie moyenne & un peu antérieure, c'est le lieu où elles s'élèvent davantage; ce qui doit être ainsi, leur écartement étant plus considérable en cet endroit. On auroit tort de les regarder comme des léviers, dont le centre du mouvement est à leur articulation avec les vertèbres, & qui décrivent des arcs d'autant plus grands par leurs extrémités, qu'elles en sont plus éloignées; leur distance n'étant pas parallèle dans toute leur étendue, elles ne peuvent conserver un rapport égal entr'elles pendant leur élévation. D'ailleurs, elles ne sont point libres vers leur extrémité antérieure; les cartilages qui les attachent au sternum permettent à peine en ce lieu aucun mouvement: elles ne peuvent donc être mues qu'en faisant éprouver au cartilage une légère torsion, qui permet au bord supérieur de la côte de se contourner un peu en dedans, pendant que le bord inférieur se déjette en dehors; en conséquence, elles diminuent l'angle qu'elles forment avec le cartilage.

Ainsi, le mouvement des côtes, peu considérable dans l'extrémité vertébrale, encore moins sensible du côté du sternum, se trouve être plus remarquable dans le milieu de ces os, particulièrement dans la partie antérieure voisine des cartilages *(d)*: c'est la partie moyenne antérieure des côtes qui parcourt le plus grand espace; c'est elle qui véritablement s'élève, pendant que les extrémités postérieures, perdant seulement de leur obliquité, deviennent plus parallèles entre

(d) Fabricius ab Aquapendente, de respirat. & ejus instrumentis, lib. II, cap. VI.

elles

elles, en ſe portant en dehors en même temps, & étant ainſi un peu tirées vers le haut, elles ſont dans un état violent. L'inſpiration forte eſt donc un état qu'accompagne l'élévation ſimultanée des côtes, & dans lequel elles ſont même un peu écartées les unes des autres poſtérieurement; mais le mouvement qui ſe paſſe particulièrement vers la partie antérieure voiſine des cartilages, diminue avec l'âge; & alors, les cartilages étant durcis & même oſſifiés, la reſpiration devient plus lente & plus difficile.

On pourroit conclure de-là, qu'en général dans l'inſpiration, la poitrine augmente ainſi dans toutes ſes dimenſions, c'eſt-à-dire, & de capacité & de longueur. Nous conviendrons que la capacité de la poitrine augmente dans cet état, ſes diamètres de devant en arrière, & d'un côté à l'autre, étant plus étendus; mais elle ne peut augmenter en longueur, la première côte étant à peu-près fixe, & les dernières fauſſes-côtes étant plutôt ſuſceptibles d'élévation que d'abaiſſement.

C'eſt ce que l'inſpection paroît démontrer ſur les animaux vivans: ſi la longueur de la poitrine augmente intérieurement, cela ne peut être que par l'aplaniſſement du diaphragme pendant ſa contraction; & on ne peut pas admettre avec Borelli, que ce muſcle contracté entraîne vers le bas la portion oſſeuſe & cartilagineuſe des côtes, ainſi que le ſternum, auxquels il eſt attaché, pour augmenter la longueur de la poitrine *(e)*. Autrement, les côtes éprouveroient deux actions contraires pendant l'inſpiration, ou ſi les côtes étoient abaiſſées, le diaphragme agiroit comme expirateur. En élevant les côtes pour imiter l'inſpiration, on peut ſe convaincre, ſur un cadavre, que la poitrine a plus de longueur pendant l'expiration, les côtes étant redeſcendues & ayant repris leur obliquité naturelle.

Fabrice d'Aquapendente a avancé que dans les oiſeaux, les intervalles des côtes ſont augmentés par leur mouvement vers le haut, & que par leur mouvement en bas, leurs

---

(e) De motu animalium, part. II, prop. 90.

intervalles se resserrent: *Clarè conspicies*, a-t-il dit, *ad motum costarum sursùm intercostalia spatia dilatari, contrâ verò costis deorsùm motis angustari (f).* Tous les Anatomistes paroissent avoir admis ce même mouvement dans l'homme; mais la disposition de toutes les côtes n'étant pas également solide, & leur direction, ainsi que leur longueur, étant aussi différentes, elles ne doivent pas se mouvoir également, ni garder dans leurs mouvemens le même rapport entre elles.

La première côte étant à peu-près fixe, le mouvement de toutes les autres doit se rapporter vers celle-ci, en proportion de leur mobilité: la seconde côte, moins mobile que les suivantes, terminée par un cartilage assez court, qui s'insère au sternum dans une direction droite, s'approche un peu de la première pendant l'inspiration, & diminue l'espace intercostal qui les séparoit pendant l'expiration: la troisième côte, plus mobile que la seconde, en s'approchant un peu de celle-ci, s'élève plus en dehors: les choses se passent de même de la quatrième côte vers la troisième, de la cinquième vers la quatrième, & ainsi des autres; en sorte que depuis la quatrième jusqu'aux dernières, l'intervalle des côtes devient plus grand pendant l'inspiration entre leur partie postérieure, quoiqu'il diminue réellement entre la partie antérieure à sa jonction au cartilage. Les sixième, septième & huitième côtes étant à peu-près également longues, s'élèvent, s'écartent également, & conservent une direction presque parallèle; enfin les trois dernières fausses-côtes étant un peu moins susceptibles d'élévation, s'approchent moins vers le haut proportionnellement, sur-tout la dernière qui est retenue par le muscle quarré des lombes; elles se jettent seulement un peu en-dehors.

Ainsi nous croyons pouvoir avancer que l'écartement des côtes n'a pas également lieu dans toutes; que les trois ou quatre premières se rapprochent véritablement dans l'inspiration, & que l'écartement postérieur n'est remarquable que dans les suivantes. Cette observation ne paroît pas avoir été

(f) *De Respirat. & ejus instrumentis,* lib. II, cap. 10.

faite, & nous ne connoiſſons que M. Haller qui ait ſemblé l'indiquer : *In univerſum ſuperiora intervalla vidi diminui (g).*

Pour établir cette diverſité d'action des côtes, qui cependant tend à la même fin, nous avons cru devoir tenter quelques expériences ſur les animaux vivans; mais le mouvement continuel de la poitrine dans un animal qui ſouffre, peut ſouvent en impoſer, ne permet pas d'obtenir des réſultats aſſez certains, & l'obſervation de la Nature échappe pour ainſi-dire : il n'en eſt pas de même après la mort, & dès-lors j'ai cru qu'en cet état je pourrois obtenir des notions plus poſitives. La vie étant terminée par une expiration, l'inſpection de l'état des côtes ſur des cadavres nous a paru plus propre à éclaircir notre objet, & à déterminer d'une manière fixe ce qui doit arriver dans l'inſpiration, l'une étant un état contraire de l'autre : or en examinant des cadavres, nous avons remarqué que les vraies côtes étoient écartées en-devant & qu'elles étoient rapprochées en arrière; que les eſpaces entre la première & la ſeconde, la ſeconde & la troiſième côtes, même entre la troiſième & la quatrième, étoient en général beaucoup plus conſidérables dans toute leur étendue; enfin que les muſcles intercoſtaux placés dans les premiers eſpaces, étoient comme diſtendus, pendant que ceux qui occupent l'intervalle des autres côtes étoient ſenſiblement raccourcis : les deux dernières fauſſes-côtes nous ont paru écartées, & les muſcles qui en occupent les eſpaces comme tendus.

Cette conſidération qu'il faut faire ſur des cadavres bien conformés, morts naturellement, particulièrement ſur ceux des hommes, nous a paru propre à faire connoître le mécaniſme de l'inſpiration, & à démontrer que dans cet état les premières côtes s'approchent dans preſque toute leur étendue; que les ſuivantes ſe rapprochent par leur portion antérieure particulièrement; qu'en s'élevant par leur partie moyenne, elles reſtent plutôt un peu écartées entre elles poſtérieurement,

(g) Dans une note, *Phyſ. element.* tom. III, p. 25.

& que les dernières fausses-côtes se rapprochent; qu'en conséquence on ne peut pas dire, comme on l'a avancé trop généralement, que toutes les côtes s'élèvent également, & se rapprochent dans toute leur étendue pendant l'inspiration.

La poitrine, considérée dans l'état d'expiration sur deux cadavres féminins, a fait voir de même les côtes écartées en-devant, même dans la partie cartilagineuse des dernières vraies côtes, & plus rapprochées dans la partie postérieure. L'écartement étoit plus grand & à peu-près égal dans toute l'étendue, entre la première & la deuxième, la seconde & la troisième côtes; il étoit moindre postérieurement entre la troisième & la quatrième côtes & les suivantes. Les muscles intercostaux étoient tendus entre les côtes supérieures; entre les autres côtes, depuis la quatrième en descendant, ces muscles étoient resserrés postérieurement, & distendus antérieurement. Les dernières fausses-côtes rentroient en-dedans, ce qui est évidemment l'effet des corps à baleine, ou des corsets.

Malgré cette diversité d'action dans les côtes, il n'en résulte pas moins une uniformité dans le mouvement de la poitrine. Sans entrer dans le détail de la disposition particulière de chaque côte, sur-tout des supérieures, dont la première est presque horizontale, la seconde est contournée obliquement, la troisième & les suivantes sont presque posées de champ, on conçoit, qu'afin que la surface de la poitrine reste lisse & égale en augmentant sa capacité, il faut que les côtes supérieures s'élèvent & se rapprochent, pendant que les autres, en se déjetant en-dehors, s'écartent. Le rapprochement des premières est une suite nécessaire du défaut de mobilité de la première côte & de la contraction des muscles qui occupent les deux espaces supérieurs, & qui, étant trouvés tendus sur le cadavre, ne peuvent se contracter sans diminuer l'intervalle qu'ils occupent.

De même, les côtes suivantes vraies, étant plus écartées en-devant qu'en arrière, ont les muscles intercostaux tendus en-devant, pendant qu'ils sont sensiblement relâchés en arrière;

mais ces muſcles ne peuvent agir & ſe contracter en-devant ſans rapprocher l'eſpace antérieur des côtes, qui ſera au contraire écarté poſtérieurement par le changement qui arrive dans la continuité de la côte & dans la direction des fibres des muſcles intercoſtaux, qui eſt fort oblique en cet endroit. D'ailleurs, l'eſpèce de torſion qu'éprouvent les cartilages dans l'inſpiration, contribue encore à favoriſer l'écartement des côtes poſtérieurement, aidé en ces endroits de l'action des muſcles intercoſtaux.

La diſpoſition des muſcles intercoſtaux ſemble démontrer intuitivement ce que nous venons d'avancer. On voit que le plan interne, qui ſe porte obliquement de devant en arrière, & qui remplit antérieurement l'intervalle des côtes, doit opérer preſque ſeul le rapprochement de la portion cartilagineuſe. Le plan externe, en ſe portant obliquement de derrière en-devant, préſente en quelques endroits des fibres ſi obliques, qu'elles approchent preſque de la direction tranſverſale; & comme en ſe contractant, ces fibres diminuent de leur obliquité pour approcher d'une direction plus droite, dès-lors elles doivent favoriſer l'écartement des côtes, vers la partie poſtérieure. Enfin, l'intervalle des dernières fauſſes-côtes étant rempli par un plan de fibres preſque droit, que forment ſouvent ſeuls les intercoſtaux externes, elles doivent être un peu rapprochées. Ces obſervations, que nous faiſons en paſſant ſeulement ſur l'uſage des muſcles intercoſtaux, confirment de plus en plus ce que de ſavans Anatomiſtes ont avancé ſur l'uſage de ces muſcles pour l'inſpiration.

Le mouvement des côtes eſt plus remarquable à la partie antérieure & latérale de la poitrine, que dans le reſte de leur étendue, & il ſe paſſe plus particulièrement vers l'angle qu'elles forment avec le cartilage. En effet, les vraies côtes étant inclinées de derrière en-devant, excepté les deux ſupérieures, leur inclinaiſon ceſſe dans l'endroit où elles s'uniſſent avec le cartilage qui remonte vers le ſternum; elles forment ainſi un angle qui devient moins aigu pendant l'inſpiration, & en conſéquence de cette diſpoſition, non-ſeulement

l'élaſticité naturelle de ces parties, mais encore l'angle qui avoit été diminué, tendant à ſe rétablir, contribuent à produire en cet endroit un mouvement ſenſible. De-là il ſuit, que ce mouvement ſe paſſe particulièrement à la partie moyenne antérieure des côtes, où l'élévation de leur arc peut aller à quelques lignes, & que s'il y a du mouvement vers les extrémités poſtérieures, ce ne peut être qu'un mouvement peu ſenſible & ſur un même point.

Les côtes étant terminées au ſternum, elles lui communiquent une partie de leur mouvement, qui, en conſéquence, eſt plus ſenſible vers la partie inférieure de cet os, lieu où les côtes ont plus de mobilité. Pendant une inſpiration forte, le ſternum eſt ſeulement un peu élevé par ſa partie ſupérieure, qui ſuit en cela le mouvement peu ſenſible de la première côte, ſans être jeté en-dehors; mais les vraies côtes, depuis la troiſième juſqu'aux dernières, qui ſont fort mobiles, en augmentant la capacité de la poitrine, pendant leur élévation, lui font faire une ſaillie qui eſt d'autant plus ſenſible, que le mouvement ſe paſſe plus près du cartilage xiphoïde: ce mouvement eſt fort remarquable dans les enfans.

Le mouvement des côtes & du ſternum paroît plus ſenſible chez les femmes, & non-ſeulement on peut dire qu'elles ont la poitrine plus mobile, mais encore on peut ajouter que la mobilité y eſt en général plus remarquable vers la partie ſupérieure. Cette diſpoſition, plus ordinaire à ce ſexe, peut-elle être regardée comme une précaution de la Nature, qui, dans le temps de la groſſeſſe, où le diaphragme eſt fort élevé par le volume de la matrice, a voulu ſuppléer à ſon action par le mouvement des côtes? Ou n'eſt-elle pas plutôt l'effet du mauvais uſage des corps à baleine, dont les femmes font uſage pour ſe former la taille? Cette dernière conjecture paroît plus fondée.

Nous connoiſſons peu la conformation de la poitrine des femmes dans l'état de nature. Accoutumées dès l'enfance à des corps qui, évaſés par le haut & reſſerrés par le bas, forment une figure inverſe de celle de la poitrine, il faut

pendant qu'elles respirent, que les côtes inférieures n'agissent pas, ou au moins fort peu; l'action doit donc être plus considérable du côté des parties supérieures qui sont moins gênées: les côtes, qui éprouvent moins de résistance en cet endroit, se jettent plus en-dehors, & telle paroît être la raison naturelle pour laquelle la poitrine des femmes est plus large à sa partie supérieure, & plus mobile en cet endroit que celle des hommes.

Nous avons remarqué à l'ouverture des cadavres des femmes, que l'on dit être bien faites à raison de la finesse de la taille, & qui payent souvent cet avantage factice aux dépens de leur vie, nous avons remarqué, dis-je, que la poitrine n'avoit pas plus de largeur en bas qu'en haut; que les vraies côtes inférieures étoient plus inclinées en bas, & beaucoup moins mobiles qu'elles ne doivent l'être; enfin quelquefois même nous les avons trouvé beaucoup moins en forme d'arc & presque aplaties. D'ailleurs cette disposition n'est pas également remarquable chez les femmes qui ne portent pas de corps.

Nous croyons avoir suffisamment démontré que toutes les côtes ne s'élèvent pas également dans l'inspiration; qu'elles ne s'écartent pas toutes, même que quelques-unes se rapprochent, & qu'elles s'élèvent plus spécialement par leur partie antérieure où leur mouvement est plus sensible; qu'elles conservent à peu-près la même distance entre elles postérieurement, ce qui ne paroît pas avoir été assez observé jusqu'à présent.

Les remarques que nous venons d'exposer, sont appuyées sur l'inspection réitérée des cadavres; & nous serons flattés si elles peuvent contribuer à la perfection de nos connoissances sur l'action des organes qui servent à une des plus importantes fonctions de l'économie animale.



OBSERVATION SUR UNE OUVERTURE FISTULEUSE AU BAS-VENTRE,

Par laquelle le malade rendoit preſque toutes ſes urines.

Par M. SABATIER.

Lû le 18 Juin 1777.

UN Homme d'environ quarante ans, après avoir eu pendant quelque temps des difficultés d'uriner, accompagnées de douleurs aſſez vives, fut attaqué il y a deux ans, d'une ſuppreſſion totale d'urine, pour laquelle on lui adminiſtra tous les remèdes connus. Il ne tarda pas à ſe former à la partie moyenne, antérieure & inférieure du ventre, une tumeur qui fut priſe pour un abcès, & dont l'ouverture ſpontanée laiſſa ſortir une grande quantité de pus & d'urine mêlés enſemble. Dès ce moment il ſe ſentit ſoulagé; une partie des urines reprit ſon cours par les voies ordinaires, & l'autre continua de s'échapper par la crevaſſe de l'abcès qui ſe rétrécit peu-à-peu, & dégénéra en une ouverture fiſtuleuſe, dont les bords ſe froncèrent comme ceux d'une bourſe. Cette fiſtule devint bientôt la ſeule voie que les urines priſſent; mais comme elle tendoit toujours à ſe rétrécir, & que ſouvent même elle ſe fermoit en entier, le malade eſt reſté ſujet à de nouvelles difficultés d'uriner, & à des ſuppreſſions totales d'urine, qui n'étoient pas à la vérité de longue durée, mais qui lui occaſionnoient des douleurs plus ou moins fortes. L'écoulement continuel des urines, qui avoit lieu dans les temps les moins fâcheux, lui cauſoit des incommodités preſque auſſi difficiles à ſupporter. J'ai pluſieurs fois eſſayé de lui paſſer une ſonde dans la veſſie, par le canal de l'urètre, perſuadé que ſi je parvenois à rappeler le cours ordinaire des urines, je les empêcherois de ſe porter vers l'ouverture fiſtuleuſe du ventre. Les tentatives que j'ai faites à cet égard ont été infructueuſes:

la

la ſonde ne pénétroit qu'à très-peu de diſtance ; & les bougies, au moyen deſquelles j'eſpérois favoriſer ſon introduction, n'alloient guère plus avant. Dans les derniers temps, il étoit rare que le malade rendît quelques gouttes d'urine par la verge. A la fin, il a ſuccombé aux douleurs, aux inſomnies & à la fièvre lente que ſon infirmité lui cauſoit. L'ouverture de ſon cadavre, m'a fait voir qu'elle dépendoit de la préſence d'une pierre qui, s'étant engagée dans le col de la veſſie, étoit enfin venue occuper la partie membraneuſe de l'urètre, entre la pointe de la proſtate & le bulbe de l'urètre. La veſſie contenoit diverſes autres petites pierres qui n'offrent rien de particulier. Sans doute que la ſuppreſſion d'urine, à laquelle la première a donné lieu, aura été ſuivie d'une crevaſſe à la partie ſupérieure de la veſſie, & enſuite de l'abcès urineux dont il a été parlé au commencement de cette Obſervation. L'ouverture qui en eſt réſultée, ſe voit à la partie la plus élevée de ce viſcère, près l'ouraque ; elle communique avec la fiſtule des tégumens, par un canal de deux travers de doigt de longueur.

Il y a quelques exemples d'ouvertures fiſtuleuſes au voiſinage du nombril, par leſquelles les urines ſortoient. Cabrole a parlé d'une jeune demoiſelle qui rendoit toutes les ſiennes par cette voie, parce que l'orifice de l'urètre étoit fermé par une membrane contre nature. Cheſelden dit tenir de gens dignes de ſoi, qu'un jeune enfant, dont les parties génitales extérieures manquoient, étoit dans ce cas. Littre a vu deux perſonnes qui avoient une ſemblable infirmité : l'une d'elles, étoit un garçon de douze ans, *dont le col de la veſſie étoit bouché*, & chez qui l'ouraque s'étoit maintenu en forme de canal : la ſeconde étoit un homme de trente ans, qu'il penſe avoir eu quelqu'obſtacle naturel au col de la veſſie, mais dont il n'a pas examiné les parties après la mort ; ces deux malades avoient toujours uriné de cette manière. Littre ajoute avoir diſſéqué le cadavre d'un jeune homme de dix-huit ans, chez qui le col de la veſſie étoit occupé par une pierre, & qui avoit l'ouraque ouvert dans une longueur de cinq travers de doigt ; d'où il conclud, que la Nature cherchoit à procurer aux

urines une iſſue qu'elles ne trouvoient plus par les voies ordinaires ; mais en même temps il juge que cela ne peut arriver que chez les jeunes gens , dont l'ouraque n'eſt pas encore trop fortement deſſéché. Fabrice de Hilden ſait mention d'un homme parvenu à l'âge adulte, de qui le nombril s'étoit ulcéré à la ſuite d'une iſchurie , & qui rendoit des urines par cet endroit , d'une manière continue , & non goutte à goutte. On trouve enfin dans l'Hiſtoire de l'Académie de Chirurgie, *tome III*, l'obſervation d'un homme de trente-deux ans , dont le nombril s'eſt ouvert tout-à-coup en pareille circonſtance , & qui a continué pendant quelque temps à uriner à la fois par la fiſtule qui s'y étoit établie , & par la verge ; mais cet état n'a pas été de longue durée , parce que le malade ayant ceſſé les efforts qu'il ſavoit procurer l'expulſion de ſes urines par le nombril , elles ont repris leur route ordinaire. Ces deux faits, & celui que j'ai l'honneur de mettre ſous les yeux de l'Académie, ſont les ſeuls qui me ſoient connus où les urines ſe ſoient fait jour par une ouverture au ventre, en des perſonnes parvenues à l'âge adulte. Ils ne prouvent point que l'ouraque ſe ſoit dilaté pour leur donner iſſue; mais la poſſibilité de cette dilatation eſt ſuffiſamment établie par les obſervations de Littre. Si j'euſſe pu porter la ſonde juſqu'au lieu que la pierre occupoit, ou que j'euſſe eu d'autres indices aſſurés de ſa préſence, il eſt vraiſemblable qu'en rendant aux urines la facilité de s'écouler par les voies ordinaires, au moyen de ſon extraction, je les aurois détournées de la route qu'elles s'étoient pratiquée , ou que du moins j'aurois conſidérablement diminué la quantité de celles qui s'y portoient. Peut-être auſſi qu'en inciſant le trajet fiſtuleux qui leur donnoit iſſue, & en diminuant ainſi de ſa longueur, j'aurois rendu leur excrétion plus facile, & calmé les douleurs dont cette excrétion étoit accompagnée; mais j'en ai été retenu par la circonſpection que la rareté du fait a dû naturellement m'inſpirer. Ne pouvant eſpérer de guérir ce malade, ce m'eût été une conſolation bien grande de pouvoir rendre ſon exiſtence moins pénible, & d'en prolonger la durée.

MÉMOIRE SUR LES PROBABILITÉS.

Par M. DE LA PLACE.

I.

Remis le 19 Juillet 1780.

JE me propoſe de traiter dans ce Mémoire deux points importans de l'analyſe des haſards, qui ne paroiſſent point avoir encore été ſuffiſamment approfondis: le premier a pour objet, la manière de calculer la probabilité des évènemens composés d'évènemens ſimples dont on ignore les poſſibilités reſpectives; l'objet du ſecond eſt l'influence des évènemens paſſés ſur la probabilité des évènemens futurs, & la loi ſuivant laquelle en ſe développant, ils nous font connoître les cauſes qui les ont produits. Ces deux objets qui ont beaucoup d'analogie entr'eux, tiennent à une métaphyſique très-délicate, & la ſolution des Problèmes qui leur ſont relatifs, exige des artifices nouveaux d'analyſe; ils forment une nouvelle branche de la théorie des probabilités, dont l'uſage eſt indiſpenſable lorſqu'on veut appliquer cette théorie à la vie civile. Je donne relativement au premier, une méthode générale pour déterminer la probabilité d'un évènement quelconque, lorſqu'on ne connoît que la loi de poſſibilité des évènemens ſimples; & dans le cas où cette loi eſt inconnue, je détermine celle dont on doit faire uſage. La conſidération du ſecond objet me conduit à parler des naiſſances: comme cette matière eſt une des plus intéreſſantes auxquelles on puiſſe appliquer le calcul des probabilités, je fais en ſorte de la traiter avec tout le ſoin dû à ſon importance, en déterminant quelle eſt dans ce cas, l'influence des évènemens obſervés ſur ceux qui doivent avoir lieu, & comment en ſe multipliant, ils nous découvrent le véritable rapport des poſſibilités des naiſſances d'un garçon & d'une fille. En généraliſant enſuite ces recherches, je

parviens à une méthode pour déterminer non-ſeulement les poſſibilités des évènemens ſimples, mais encore la probabilité d'un évènement futur quelconque, lorſque l'évènement obſervé eſt très-compoſé, quelle que ſoit d'ailleurs ſa nature. Je donne à cette occaſion, la ſolution de quelques Problèmes intéreſſans dans l'Hiſtoire naturelle de l'Homme, tels que celui du plus ou moins de facilité des naiſſances des garçons relativement à celles des filles dans différens climats: c'eſt ici ſur-tout qu'il eſt néceſſaire d'avoir une méthode rigoureuſe pour diſtinguer parmi les phénomènes obſervés, ceux qui peuvent dépendre du haſard, de ceux qui dépendent de cauſes particulières, & pour déterminer avec quelle probabilité ces derniers indiquent l'exiſtence de ces cauſes. La principale difficulté que l'on rencontre dans ces recherches, tient à l'intégration de certaines fonctions différentielles qui ont pour facteurs des quantités élevées à de très-grandes puiſſances, & dont il faut avoir les intégrales approchées par des ſuites convergentes: j'oſe me flatter que l'analyſe dont je me ſuis ſervi pour cet objet, pourra mériter l'attention des Géomètres. Enfin je termine ce Mémoire par quelques réflexions dans leſquelles je préſente ce que le calcul des probabilités m'a paru fournir de lumières ſur le milieu que l'on doit choiſir entre les réſultats de pluſieurs obſervations.

I I.

DANS l'analyſe des haſards, on ſe propoſe de connoître les probabilités des évènemens compoſés ſuivant une loi quelconque, d'évènemens ſimples dont les poſſibilités ſont données: celles-ci peuvent être déterminées de ces trois manières; 1.° *a priori*, lorſque par la nature même des évènemens, on voit qu'ils ſont poſſibles dans un rapport donné; c'eſt ainſi qu'au jeu de *croix* & de *pile*, ſi la pièce que l'on jette en l'air eſt homogène, & que ſes deux faces ſoient entièrement ſemblables, on juge *croix* & *pile* également poſſibles; 2.° *a poſteriori*, en répétant un grand nombre de fois l'expérience qui peut amener l'évènement dont il s'agit, &

en examinant combien de fois il eſt arrivé; 3.° enfin par la conſidération des motifs qui peuvent nous déterminer à prononcer ſur l'exiſtence de cet évènement; ſi, par exemple, les adreſſes reſpectives de deux Joueurs *A* & *B* ſont inconnues, comme on n'a aucune raiſon de ſuppoſer *A* plus fort que *B*, on en conclud que la probabilité de *A* pour gagner une partie eſt $\frac{1}{2}$. Le premier de ces moyens donne la poſſibilité abſolue des évènemens; le ſecond la fait connoître à peu-près, comme nous le ferons voir dans la ſuite, & le troiſième ne donne que leur poſſibilité relative à l'état de nos connoiſſances.

Chaque évènement étant déterminé en vertu des loix générales de cet Univers, il n'eſt probable que relativement à nous, & par cette raiſon, la diſtinction de ſa poſſibilité abſolue & de ſa poſſibilité relative peut paroître imaginaire; mais on doit obſerver que parmi les circonſtances qui concourent à la production des évènemens, il y en a de variables à chaque inſtant, telles que le mouvement que la main imprime aux dés, & c'eſt la réunion de ces circonſtances que nous nommons *haſard*: il en eſt d'autres qui ſont conſtantes, telles que l'habileté des Joueurs, la pente des dés à retomber ſur une de leurs faces plutôt que ſur les autres, &c. celles-ci forment la *poſſibilité abſolue* des évènemens, & leur connoiſſance plus ou moins étendue forme leur *poſſibilité relative*; ſeules, elles ne ſuffiſent pas pour les produire, il eſt de plus néceſſaire qu'elles ſoient jointes aux circonſtances variables dont j'ai parlé: elles ne ſont ainſi qu'augmenter la probabilité des évènemens, ſans déterminer néceſſairement leur exiſtence.

Les recherches que l'on a faites juſqu'ici ſur l'analyſe des haſards, ſuppoſent la connoiſſance de la poſſibilité abſolue des évènemens, & à l'exception de quelques remarques que j'ai données dans les *tomes VI* & *VII* des Mémoires des Savans Étrangers, je ne ſache pas que l'on ait conſidéré le cas où l'on n'a que leur poſſibilité relative. Ce cas renferme un grand nombre de queſtions intéreſſantes, & la plupart des Problèmes

ſur les jeux s'y rapportent; on peut donc croire que ſi les Géomètres n'y ont pas fait une attention particulière, cela vient de ce qu'ils l'ont regardé comme ſuſceptible des mêmes méthodes que celui où l'on connoît la poſſibilité abſolue des évènemens; cependant la différence eſſentielle de ces poſſibilités ne peut manquer d'influer ſur les réſultats du calcul, en ſorte que l'on s'expoſeroit ſouvent à des erreurs conſidérables, en les employant de la même manière: c'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre par l'exemple ſuivant.

Suppoſons que deux Joueurs A & B, dont les adreſſes reſpectives ſont inconnues, jouent à un jeu quelconque; & propoſons-nous de déterminer la probabilité que A gagnera les n premières parties.

S'il ne s'agiſſoit que d'une ſeule partie, il eſt clair que A ou B devant néceſſairement la gagner, ces deux évènemens ſont également probables, en ſorte que la probabilité du premier eſt $\frac{1}{2}$; d'où en ſuivant la règle ordinaire de l'analyſe des haſards, on conclut que la probabilité de A pour gagner les n premières parties, eſt $\frac{1}{2^n}$. Cette conſéquence ſeroit exacte, ſi la probabilité $\frac{1}{2}$ étoit fondée ſur une égalité abſolue entre les poſſibilités des deux évènemens dont il s'agit; mais il n'y a d'égalité que relativement à l'ignorance où nous ſommes ſur les adreſſes de deux Joueurs, & cette égalité n'empêche pas que l'un ne puiſſe être plus fort que l'autre. Suppoſons conſéquemment que $\frac{1 + \alpha}{2}$ repréſente la probabilité du Joueur le plus fort pour gagner une partie, & $\frac{1 - \alpha}{2}$ celle du plus foible; en nommant P la probabilité que A gagnera les n premières parties, on aura

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot (1 + \alpha)^n, \text{ ou } P = \frac{1}{2^n} \cdot (1 - \alpha)^n,$$

ſuivant que A ſera le plus fort ou le plus foible: or comme on n'a aucune raiſon de le ſuppoſer plutôt l'un que l'autre,

il eſt viſible que pour avoir la véritable valeur de P, on doit prendre la moitié de la ſomme des deux valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot [(1 + \alpha)^n + (1 - \alpha)^n].$$

En développant cette expreſſion, on a

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot [1 + \frac{n.(n-1)}{1.2} . \alpha^2 + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} . \alpha^4 + \&c.]$$

Cette valeur de P étant plus grande que $\frac{1}{2^n}$, lorſque n eſt plus grand que l'unité, on voit que l'inégalité qui peut exiſter entre les adreſſes des deux Joueurs, favoriſe celui qui parie 1 contre $2^n - 1$ que A gagnera les n premières parties, pourvu que l'on ignore de quel côté ſe trouve la plus grande adreſſe. Cette remarque que j'ai déjà faite ailleurs, eſt, ſi je ne me trompe, très-utile dans l'analyſe des haſards, non-ſeulement en ce qu'elle montre la néceſſité d'avoir égard à l'inégalité inconnue des adreſſes des Joueurs, mais encore en ce que l'on peut ſouvent déterminer ſi cette inégalité eſt favorable ou contraire à celui qui parie d'après le calcul ordinaire des probabilités.

III.

Considérons encore deux Joueurs A & B, chacun avec un nombre donné de jetons, & jouant enſemble de manière qu'à chaque coup, celui qui perd donne un jeton à ſon adverſaire; ſuppoſons que la partie ne doive finir que lorſqu'il ne reſtera plus de jetons à l'un des Joueurs, & déterminons dans ce cas leurs probabilités reſpectives pour gagner cette partie.

Pour cela, nommons généralement p l'adreſſe de A, $1 - p$ celle de B, & y_x la probabilité de A pour gagner la partie, lorſqu'il a x jetons; il peut arriver au coup ſuivant qu'il gagne un jeton à B, & dans ce cas ſa probabilité ſe change en y_{x+1}; il peut arriver qu'il en donne un à B, ce qui réduit ſa probabilité à y_{x-1}: or la probabilité du premier de ces deux

évènemens eſt p, & celle du ſecond eſt $1 - p$; on aura donc l'équation aux différences finies,

$$y_x = p \cdot y_{x+1} + (1 - p) \cdot y_{x-1}.$$

Pour l'intégrer, ſoit $y_x = C a^x$, on aura

$$a = p\, a^2 + 1 - p;$$

les deux racines de cette équation ſont $a = 1$, & $a = \frac{1-p}{p}$; partant, ſi C & C' repréſentent deux conſtantes arbitraires, l'expreſſion complète de y_x ſera

$$y_x = C + C' \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^x.$$

Pour déterminer ces deux conſtantes, on obſervera 1.° que x étant nul, on a $y_x = 0$, & que x étant égal au nombre total des jetons de A & de B, on a $y_x = 1$; ſoit n ce nombre, m le nombre des jetons de A au commencement de la partie, & par conſéquent $n - m$ celui des jetons de B, on aura

$$0 = C + C';$$

$$1 = C + C' \left(\frac{1-p}{p}\right)^n;$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n};$$

$$C' = -\frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n};$$

partant,

$$y_x = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}.$$

On aura la probabilité y_x de A pour gagner la partie, en changeant

changeant dans cette expreſſion x en m, ce qui donne

$$y_m = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^m}{1 - (\frac{1-p}{p})^n};$$

& en changeant m en $n - m$, p en $1 - p$, & réciproquement, on aura la probabilité de B pour gagner la partie, & l'on trouvera $1 - y_m$ pour cette probabilité: c'eſt ce dont il eſt facile de s'aſſurer d'ailleurs, en conſidérant que A ou B devant néceſſairement gagner la partie, la ſomme de leurs probabilités doit être égale à l'unité.

Maintenant, ſi l'on ſuppoſe les adreſſes des deux Joueurs égales, & par conſéquent $p = \frac{1}{2}$, l'expreſſion précédente de y_m devient $\frac{0}{0}$, ce qui ne fait rien connoître; mais en différenciant le numérateur & le dénominateur de cette expreſſion par rapport à p, on trouve que dans ce cas $y_m = \frac{m}{n}$, en ſorte que les probabilités des deux Joueurs A & B ſont en raiſon du nombre de leurs jetons: leurs miſes reſpectives doivent donc être dans le même rapport. Examinons préſentement le changement que doit occaſionner dans leur ſort une inégalité quelconque entre leurs adreſſes.

Soit $\frac{1+\alpha}{2}$ la plus grande, & $\frac{1-\alpha}{2}$ la plus petite; on changera ſucceſſivement dans l'expreſſion de y_m, p en $\frac{1+\alpha}{2}$ & $\frac{1-\alpha}{2}$; on aura ainſi deux valeurs qui auront lieu ſuivant que A ſera le plus fort ou le plus foible: la véritable expreſſion de y_m ſera donc égale à la moitié de la ſomme de ces deux valeurs; d'où l'on tire,

$$y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{[(1+\alpha)^{n-m} + (1-\alpha)^{n-m}] \cdot [(1+\alpha)^m - (1-\alpha)^m]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n};$$

on peut mettre cette expreſſion ſous cette forme,

$$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha^2)^m \cdot \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}.$$

Dans le cas de $\alpha = 0$, nous venons de voir que $y_m = \frac{m}{n}$, en ſorte qu'alors

$$(1 - \alpha^2)^m \cdot \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n} = \frac{n-2m}{n};$$

or ſi l'on ſuppoſe m moindre que $\frac{n}{2}$, il eſt clair que α augmentant, la fraction $\frac{(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}$ diminue, ainſi que le facteur $(1 - \alpha^2)^m$; on aura donc dans la ſuppoſition de α plus grand que zéro,

$$(1-\alpha^2)^m \cdot \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n} = \frac{n-2m}{n} - 2h;$$

h étant néceſſairement poſitif. Partant

$$y_m = \frac{m}{n} + h;$$

d'où il ſuit que l'inégalité des adreſſes de A & de B, eſt favorable à celui des deux Joueurs qui a le plus petit nombre de jetons.

α reſtant le même, ſi m & n augmentant en conſervant toujours le même rapport, il eſt clair que

$$(1 - \alpha^2)^m \cdot \frac{[(1+\alpha)^{n-2m} - (1-\alpha)^{n-2m}]}{(1+\alpha)^n - (1-\alpha)^n}$$ deviendra

plus petit, & que l'on peut tellement faire croître n & m, que cette quantité ſoit plus petite qu'aucune grandeur donnée; donc ſi les deux Joueurs conviennent de doubler, de tripler, &c. leurs jetons, leur ſort qui, dans le cas où les adreſſes ſont égales, n'en ſera point changé, deviendra très-différent, s'il y a une inégalité quelconque entre leurs adreſſes; la probabilité de celui qui a le plus petit nombre de jetons augmentera de plus en plus, juſqu'au point de différer infiniment peu de $\frac{1}{2}$, & par conſéquent de la probabilité de ſon adverſaire.

I V.

En général, si dans un Problème quelconque relatif aux deux Joueurs *A* & *B*, on représente par $\frac{1+\alpha}{2}$ l'adresse du plus fort, & par $\frac{1-\alpha}{2}$ celle du plus foible; le sort *P* du Joueur *A* supposé le plus fort, sera exprimé par une fonction de α, qui réduite en série, aura la forme suivante,

$$P = a + a_1 . \alpha + a_2 . \alpha^2 + a_3 . \alpha^3 + \&c.$$

En changeant α en $-\alpha$, on aura pour l'expression de *P*, dans le cas où le Joueur *A* est le plus foible,

$$P = a - a_1 . \alpha + a_2 . \alpha^2 - a_3 . \alpha^3 + \&c.$$

On aura donc la véritable valeur de *P* en prenant la moitié de la somme des deux séries précédentes, ce qui donne

$$P = a + a_2 . \alpha^2 + a_4 . \alpha^4 + \&c.$$

Lorsque α est très-petit, on peut s'en tenir aux deux premiers termes de cette série, & l'on a sensiblement

$$P = a + a_2 . \alpha^2;$$

on connoîtra donc alors par le signe de a_2, si *P* est plus grand ou moindre que dans le cas où les adresses sont égales; il sera plus grand si a_2 est positif, & moindre s'il est négatif.

De ce qu'il ne reste dans la valeur de *P* que des puissances paires de α, il résulte que le cas de $\alpha = 0$ indique toujours un *maximum* ou un *minimum* pour cette valeur; mais il est possible qu'elle soit susceptible de plusieurs *maxima* ou *minima*, & c'est ce qui aura lieu si la différentielle de *P*, prise par rapport à α, & égalée à zéro, donne pour α une ou plusieurs valeurs positives, comprises entre les limites

dans lesquelles α peut être renfermé; dans ce cas, on cherchera si la supposition de $\alpha = 0$ donne le plus grand de tous ces *maxima*, ou le plus petit de tous ces *minima*; si cela est, on pourra s'assurer que le sort P de A est ou n'est pas plus avantageux, que lorsque les adresses sont égales; mais si cela n'est pas, il sera impossible de prononcer sur cet objet, à moins que de connoître la loi de possibilité des adresses respectives.

V.

Il est facile d'étendre les remarques précédentes à un nombre quelconque de Joueurs; supposons par exemple, i Joueurs A, B, C, D, &c, & que l'on propose de déterminer la probabilité P, que les r Joueurs A, B, C, &c, gagneront les n premières parties. Il est clair que si leurs adresses étoient égales, la probabilité de chacun des Joueurs pour gagner une partie, ou ce qui revient au même, leur adresse respective seroit $\frac{1}{i}$, en sorte que la probabilité cherchée P seroit $(\frac{r}{i})^n$; mais s'il existe une inégalité quelconque entre les adresses des Joueurs; en nommant $\frac{1+\alpha}{i}$ la plus grande, $\frac{1+\alpha^{\text{I}}}{i}$ la deuxième dans l'ordre de grandeur, $\frac{1+\alpha^{\text{II}}}{i}$ la troisième, & ainsi de suite; on aura d'abord

$$\alpha + \alpha^{\text{I}} + \alpha^{\text{II}} + \&c. = 0,$$

puisque la somme de toutes ces adresses doit être égale à l'unité.

Si l'on nomme ensuite $s, s^{\text{I}}, s^{\text{II}}$, &c, les différentes sommes que l'on peut former, en ajoutant un nombre r des adresses précédentes; on aura autant de valeurs correspondantes de P, qui seront $P = s^n$, $P = s^{\text{I}\,n}$, $P = s^{\text{II}\,n}$, &c; le nombre de ces valeurs est égal à celui des combinaisons de

i quantités prises r à r, & par conséquent égal à $\frac{i.(i-1)...(i-r+1)}{1.2.3...r}$ on aura donc la véritable valeur de P, en divisant par ce nombre, la somme des valeurs précédentes, ce qui donne

$$P = \frac{1.2.3...r}{i.(i-1).(i-2)...(i-r+1)} . (s^n + s^{\prime n} + s^{\prime\prime n} + \&c.).$$

Il est aisé de voir que chaque adresse se trouve répétée dans la somme $s + s^{\prime} + s^{\prime\prime} + s^{\prime\prime\prime} +$ &c, autant de fois que l'on peut combiner $i - 1$, quantités, $r - 1$ à $r - 1$; d'où il suit que cette somme est indépendante de $\alpha, \alpha^{\prime}, \alpha^{\prime\prime}$, &c, & égale à

$$\frac{(i-1).(i-2)...(i-r+1)}{1.2.3...(r-1)};$$

or, on prouvera facilement que dans ce cas, la somme $s^n + s^{\prime n} + s^{\prime\prime n} +$ &c, est la plus petite possible, lorsque $s = s^{\prime} = s^{\prime\prime} =$ &c, ce qui suppose $\alpha = \alpha^{\prime} = \alpha^{\prime\prime} =$ &c. $= 0$; donc la valeur de P est la plus petite, lorsque les adresses des Joueurs sont égales, en sorte que l'inégalité de ces adresses favorise celui qui parie que les n premières parties seront gagnées par les r Joueurs A, B, C, &c.

Il est visible que l'on peut faire des remarques analogues sur les jeux dans lesquels on fait usage de polyèdres, tels que le jeu des dés; car avec quelque soin qu'on ait formé ces polyèdres, il s'y rencontre nécessairement entre leurs différentes faces, des inégalités qui résultent de l'hétérogénéité de la matière qu'on emploie, & des défauts inévitables dans leur construction. En général, ces remarques ont lieu pour tous les évènemens dont la possibilité est inconnue & peut varier dans certaines limites; & si dans la suite nous considérons particulièrement les évènemens du jeu entre plusieurs Joueurs dont les adresses sont inconnues, ce n'est que pour nous rendre plus clairs, en fixant les idées sur un objet déterminé.

V I.

Il eſt infiniment peu probable que les adreſſes de deux Joueurs *A* & *B*, ſont parfaitement égales; mais en même temps que l'on ignore de quel côté ſe trouve la plus grande ou la plus petite adreſſe, on ignore également la quantité de leur différence: ainſi tout ce que l'on peut conclure de la théorie précédente, c'eſt que le ſort de tel ou tel Joueur eſt plus favorable que ſuivant le calcul ordinaire des probabilités, ſans que l'on ſoit en état d'aſſigner de combien il eſt augmenté.

Cependant ſi l'on connoiſſoit la limite & la loi de poſſibilité des valeurs de α, rien ne ſeroit plus facile que de réſoudre exactement ce Problème; car ſi l'on nomme q cette limite, & que l'on repréſente par $\psi(\alpha)$ la probabilité de α; on voit d'abord que α devant néceſſairement tomber entre o & q, la fonction $\psi(\alpha)$ doit être telle que l'on ait $\int \partial\alpha \,.\, \psi(\alpha) = 1$, l'intégrale étant priſe depuis $\alpha = 0$ juſqu'à $\alpha = q$; on multipliera donc par $\partial\alpha \,.\, \psi(\alpha)$ les probabilités déterminées par ce qui précède, & en intégrant ces produits depuis $\alpha = 0$ juſqu'à $\alpha = q$, on aura les probabilités cherchées: on trouvera de cette manière, pour la valeur de P dans l'*article XI*,

$$P = \int \frac{\partial\alpha \,.\, \psi(\alpha)}{2^{n+1}} \,.\, \{(1 + \alpha)^n + (1 - \alpha)^n\}.$$

Si, par exemple, $\psi(\alpha)$ eſt égal à une conſtante l, en ſorte que toutes les valeurs de α ſoient également poſſibles, l'équation

$\int \partial\alpha \,.\, \psi(\alpha) = 1$, donnera $l = \frac{1}{q}$, & l'on aura

$$P = \frac{1}{(n+1)\,q\,.\,2^{n+1}} \,.\, \{(1+q)^{n+1} - (1-q)^{n+1}\}.$$

La quantité α eſt une fonction du rapport des adreſſes abſolues des deux Joueurs: au lieu donc de ſuppoſer la loi de ſa poſſibilité immédiatement connue, il eſt beaucoup plus naturel de la déduire de celle qui repréſente la poſſibilité de

l'adreſſe abſolue d'un Joueur quelconque. Pour cela, comparons les adreſſes de tous les Joueurs à celle d'un Joueur unique, que nous prendrons pour unité d'adreſſe ; & en repréſentant par l'abſciſſe x tous ces rapports, concevons élevées ſur chaque point de l'abſciſſe, des ordonnées y proportionnelles au nombre ſuppoſé infini de tous les Joueurs dont l'adreſſe eſt x; nous aurons ainſi une courbe renfermée entre les limites h & h', h étant la plus petite adreſſe & h' la plus grande; & il eſt viſible que le rapport de l'ordonnée y à la ſomme de toutes les ordonnées, ou, ce qui revient au même, à l'aire entière de la courbe, exprimera la probabilité que l'adreſſe d'un Joueur quelconque eſt x. Cela poſé, pour en conclure la loi de poſſibilité des valeurs de α, ſoit $y = \varphi(x)$, & nommons a l'intégrale $\int \partial x \,.\, \varphi(x)$, priſe depuis $x = h$ juſqu'à $x = h'$; ſoit de plus x l'adreſſe de celui des deux Joueurs A & B qui eſt le plus foible, & $x + u$ celle du Joueur le plus fort; on aura $\frac{x}{x + u} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$, ce qui donne $x + u = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \,.\, x$: or la probabilité que l'adreſſe de l'un des Joueurs étant x, celle de l'autre ſera $x + u$, eſt égale au double du produit des probabilités de x & de $x + u$, & par conſéquent égale à $\frac{2 \,.\, \varphi(x) \,.\, \varphi(x + u)}{a^2}$ $= \frac{2\varphi(x) \,.\, \varphi\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \,.\, x\right)}{a^2}$; on aura donc $2\int \partial x \,.\, \frac{\varphi(x) \,.\, \varphi\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \,.\, x\right)}{a^2}$ pour la probabilité entière de α, l'intégrale étant priſe depuis $x = h$ juſqu'à $x = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \,.\, h'$. Quant à la limite q de α, on obſervera que h étant la plus petite adreſſe, & h' la plus grande, on a $\frac{h'}{h} = \frac{1 + q}{1 - q}$; d'où l'on tire $q = \frac{h' - h}{h' + h}$.

Lorſque la fonction $\varphi(x)$ eſt inconnue, il eſt impoſſible

de connoître exactement le sort des deux Joueurs *A* & *B*, & l'on est réduit à choisir les fonctions les plus vraisemblables. Nous nous occuperons de cet objet dans la suite; mais auparavant nous allons exposer une méthode générale pour déterminer le sort respectif d'un nombre quelconque de Joueurs, lorsqu'on ne connoît touchant leurs adresses, que la loi de leur possibilité: cette matière présente quelques difficultés assez considérables d'analyse, dont la solution est renfermée dans celle du Problème suivant.

VII.

PROBLÈME.

Soient n *quantités variables & positives* $t, t_1, t_2 \ldots . t_{n-1}$, *dont la somme soit* s, *& dont la loi de possibilité soit connue; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction donnée* $\psi\,(t, t_1, t_2, \&c.)$ *de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur.*

SOLUTION.

SUPPOSONS pour plus de généralité, que les fonctions qui expriment la possibilité des variables t, t_1, t_2, &c. soient discontinues, & représentons par q la plus petite valeur de t; par $\varphi\,(t)$, la possibilité de t, depuis $t = q$ jusqu'à $t = q^{\mathrm{I}}$; par $\varphi^{\mathrm{I}}\,(t) + \varphi\,(t)$, sa possibilité depuis $t = q^{\mathrm{I}}$ jusqu'à $t = q^{\mathrm{II}}$; par $\varphi^{\mathrm{II}}\,(t) + \varphi^{\mathrm{I}}\,(t) + \varphi\,(t)$, cette possibilité depuis $t = q^{\mathrm{II}}$ jusqu'à $t = q^{\mathrm{III}}$, & ainsi de suite jusqu'à $t = \infty$. Désignons ensuite les mêmes quantités relatives aux variables t_1, t_2, t_3, &c. par les mêmes lettres, en écrivant au bas les nombres 1, 2, 3, &c. en sorte que q_1, q_2, q_3, &c. expriment les plus petites valeurs de t_1, t_2, t_3, &c. que $\varphi_1 \cdot (t_1)$ exprime la possibilité de t_1 depuis $t_1 = q_1$ jusqu'à $t_1 = q_1^{\mathrm{I}}$, & ainsi du reste; dans cette manière de représenter les possibilités des variables, il est clair que la fonction $\varphi\,(t)$ a lieu depuis $t = q$ jusqu'à $t = \infty$, que la fonction $\varphi^{\mathrm{I}}\,(t)$ a lieu depuis $t = q^{\mathrm{I}}$ jusqu'à $t = \infty$, ainsi

ainsi de suite. Pour reconnoître les valeurs de t, t_1, t_2, &c. lorsque ces fonctions commencent à avoir lieu, nous multiplierons $\varphi\ (t)$ par l^q; $\varphi'\ (t)$ par $l^{q'}$; $\varphi_1\ (t_1)$ par l^{q_1}, &c. les exposans des puissances de l qui multiplient chaque fonction, indiqueront alors ces valeurs; il suffira ensuite de supposer $l = 1$ dans le dernier résultat du calcul: c'est à ces artifices très-simples que nous devons la facilité avec laquelle nous allons résoudre le Problème proposé.

La probabilité de la fonction $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$ est évidemment égale au produit des probabilités de t, t_1, t_2, &c; en sorte que si l'on substitue pour t, sa valeur $s - t_1 - t_2 - \&c$, que donne l'équation

$$t + t_1 + t_2 + \&c. = s,$$

le produit de la fonction proposée par sa probabilité, sera

$$\left.\begin{array}{l} \psi(s - t_1 - t_2 - \&c.\ t_1, t_2, \&c.) \\ \quad \times \{ l^q . \varphi . (s - t_1 - t_2 - \&c.) + l^{q'} . \varphi' . (s - t_1 - t_2 - \&c.) + \&c. \} \\ \quad \times \{ l^{q_1} . \varphi_1 . (t_1) + l^{q'_1} . \varphi'_1 . (t_1) + \&c. \} \\ \quad \times \{ l^{q_2} . \varphi_2 . (t_2) + l^{q'_2} . \varphi'_2 . (t_2) + \&c. \} \\ \quad \times \&c. \end{array}\right\} ; (A)$$

on aura donc la somme de tous ces produits, 1.° en multipliant la quantité précédente par ∂t_1, & en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_1 est susceptible; 2.° en multipliant cette intégrale par ∂t_2, & en l'intégrant pour toutes les valeurs dont t_2 est susceptible, & ainsi de suite, jusqu'à la dernière variable t_{n-1}; mais ces intégrations successives exigent quelques attentions particulières.

Considérons un terme quelconque de la quantité (A), tel que

$$l^{q^{(i)} + q_1^{(i')} + q_2^{(i'')} + \&c.} \psi(s - t_1 - t_2 - \&c.)$$
$$. \varphi^{(i)} . (s - t_1 - t_2 - \&c.) . \varphi_1^{(i')} . (t_1) . \varphi_2^{(i'')} . (t_2) . \&c.$$

en le multipliant par ∂t_1, il faut l'intégrer pour toutes les valeurs possibles de t_1 ; or il est clair que la fonction $\varphi^{(i)}.(s - t_1 - t_2 - \&c.)$ n'a lieu que lorsque t ou $s - t_1 - t_2 -$ &c. est égal ou plus grand que $q^{(i)}$; la plus grande valeur que t_1 puisse recevoir est donc $s - q^{(i)} - t_2 - t_3 -$ &c. De plus, $\varphi_1^{(i')}(t_1)$ n'ayant lieu que lorsque t_1 est égal ou plus grand que $q_1^{(i')}$, cette quantité est la plus petite valeur que t_1 puisse recevoir; il faut donc prendre l'intégrale dont il s'agit depuis $t_1 = q_1^{(i')}$ jusqu'à $t_1 = s - q^{(i)} - t_2 - t_3 -$ &c. ou, ce qui revient au même, depuis $t_1 - q_1^{(i')} = 0$ jusqu'à $t_1 - q_1^{(i')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - t_2 -$ &c.

On trouvera de la même manière, qu'en multipliant cette nouvelle intégrale par ∂t_2, il faudra l'intégrer depuis $t_2 - q_2^{(i'')} = 0$ jusqu'à $t_2 - q_2^{(i'')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - t_3 -$ &c. En continuant d'opérer ainsi, on arrivera à une fonction de $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} -$ &c. dans laquelle il ne restera aucune des variables t, t_1, t_2, &c. cette fonction doit être rejetée si $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} -$ &c. est négatif; car il est visible que dans ce cas, le système de fonctions $\varphi^{(i)}(t)$, $\varphi_1^{(i')}(t_1)$, $\varphi_2^{(i'')}(t_2)$, &c, ne peut être employé : en effet, les plus petites valeurs de t_1, t_2, &c, étant par la nature de ces fonctions, égales à $q_1^{(i')}$, $q_2^{(i'')}$, &c. la plus grande valeur que t puisse recevoir, est $s - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} -$ &c. partant la plus grande valeur de $t - q^{(i)}$, est $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} -$ &c. or la fonction

$\varphi^{(i)}(t)$ ne peut être employée que lorſque $t - q^{(i)}$ eſt poſitif.

Au lieu de rejeter la fonction dont il s'agit, il eſt égal de ſuppoſer alors dans tous les termes de cette fonction, $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} -$ &c, conſtamment égal à zéro; car, en ne conſidérant par exemple, que les trois variables t, t_1, t_2; la dernière intégrale relative à ∂t_2, devant être priſe depuis $t_2 - q_2^{(i'')} = 0$ juſqu'à $t_2 - q_2^{(i'')} = s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')}$, il eſt viſible que cette intégrale ſera nulle, toutes les fois que l'on ſuppoſera $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} = 0$.

Il réſulte de ce que nous venons de dire, une méthode très-ſimple pour réſoudre le Problème propoſé.

Que l'on ſubſtitue, 1.° au lieu de t, $q + u$ dans $\varphi(t)$, $q' + u$ dans $\varphi'(t)$, $q'' + u$ dans $\varphi''(t)$, &c. 2.° au lieu de t_1, $q_1 + u_1$ dans $\varphi_1(t_1)$, $q'_1 + u_1$ dans $\varphi'_1(t_1)$, &c. 3.° au lieu de t_2, $q_2 + u_2$ dans $\varphi_2(t_2)$, &c, & ainſi de ſuite; les quantités

$$l^q \cdot \varphi(t) + l^{q'} \cdot \varphi'(t) + \&c,$$
$$l^{q_1} \cdot \varphi_1(t_1) + l^{q'_1} \cdot \varphi'_1(t_1) + \&c,$$
&c.

qui repréſentent les probabilités de t, t_1, &c. ſe changeront, la première, dans une fonction de u; la ſeconde, dans une fonction de u_1, &c. nous déſignerons ces fonctions par $\Pi(u)$, $\Pi_1(u_1)$, $\Pi_2(u_2)$, &c.

Que l'on change enſuite dans $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$, t en $k + u$, t_1 en $k_1 + u_1$, &c. on aura une fonction de u, u_1, u_2, &c, que nous repréſenterons par $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$; cela poſé, on prendra l'intégrale

$\int \partial u_1 \Gamma(s - u_1 - u_2 - \&c, u_1, u_2, \&c.) . \Pi(s - u_1 - u_2 - \&c.)$
$. \Pi_1 (u_1) . \Pi_2 (u_2) . \&c.$

depuis $u_1 = 0$ jusqu'à $u_1 = s - u_2 - u_3 - \&c.$

On multipliera cette première intégrale par ∂u_2, & on l'intégrera depuis $u_2 = 0$ jusqu'à $u_2 = s - u_3 - \&c.$ on multipliera cette seconde intégrale par ∂u_3, & on l'intégrera depuis $u_3 = 0$ jusqu'à $u_3 = s - u_4 - \&c.$ En continuant ainsi, on arrivera à une fonction de s seule, que nous désignerons par $\daleth . (s)$, & cette fonction sera la somme demandée de toutes les valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$, multipliées par leur probabilité respective; mais pour cela, il faut avoir soin de changer dans un terme quelconque multiplié par $l^{q^{(i)} + q_1^{(i')} + q_2^{(i'')} + \&c.}$, k en $q^{(i)}$, k_1 en $q_1^{(i')}$, k_2 en $q_2^{(i'')}$, &c. de diminuer s de l'exposant de l, & par conséquent d'écrire au lieu de s, $s - q^{(i)} - q_1^{(i')} - q_2^{(i'')} - \&c.$ de faire cette dernière quantité égale à zéro toutes les fois qu'elle sera négative; enfin de supposer $l = 1$.

Si $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$, $\Pi . (u)$, $\Pi_1 . (u_1)$, $\Pi_2 . (u_2)$, &c. sont des fonctions rationnelles & entières des variables u, u_1, u_2, &c. d'exponentielles, de sinus & de cosinus, toutes ces intégrations successives seront possibles, parce qu'il est dans la nature de ces quantités de ne reproduire par les intégrations que des quantités du même genre : dans les autres cas, ces intégrations pourront n'être pas possibles; mais la méthode précédente réduit alors le Problème aux quadratures des courbes.

VIII.

Le cas de fonctions rationnelles & entières offre quelques simplifications qu'il n'est pas inutile d'exposer. Pour cela, soit $u^i . u_1^{i'} . u_2^{i''} . \&c.$ un produit quelconque des variables u, u_1, u_2, &c. si après y avoir substitué pour u sa valeur

$s - u_1 - u_2 -$ &c. on le multiplie par ∂u_1, il eſt facile de s'aſſurer que l'intégrale

$$\int \partial u_1 . (s - u_1 - u_2 - \&c.)^i . u_1^{i'} . u_2^{i''} . \&c.$$

priſe depuis $u_1 = 0$ juſqu'à $u_1 = s - u_2 -$ &c. eſt

$$\frac{1.2.3...i.1.2.3...i'}{1.2.3.4...(i+i'+1)} . (s - u_2 - u_3 - \&c.)^{i+i'+1} . u_2^{i''} . \&c.$$

en multipliant cette intégrale par ∂u_2, & en l'intégrant depuis $u_2 = 0$ juſqu'à $u_2 = s - u_3 -$ &c. on aura pareillement

$$\frac{1.2.3...i.1.2.3...i'.1.2.3...i''}{1.2.3.4...(i+i'+i''+2)} . (s - u_3 - \&c.)^{i+i'+i''+2} . \&c.$$

& ainſi de ſuite; donc ſi l'on ſuppoſe

$$\begin{aligned} \Pi . (u) &= A + B . u + C . u^2 + \&c. \\ \Pi_1 . (u_1) &= A_1 + B_1 . u_1 + C_1 . u_1^2 + \&c. \\ \Pi_2 . (u_2) &= A_2 + B_2 . u_2 + C_2 . u_2^2 + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

& que l'on déſigne par $H . u^i . u_1^{i'} . u_2^{i''}$, un terme quelconque de $\Gamma(u, u_1, u_2, \&c.)$; la partie correſpondante de $\daleth(s)$ ſera

$$\left.\begin{aligned} &1.2.3...i.1.2.3...i'.1.2.3...i''.\&c. H . s^{n+i+i'+i''+\&c.-1} \\ &\times \{A + (i+1).B.s + (i+1).(i+2).C.s^2 + \&c.\} \\ &\times \{A_1 + (i'+1).B_1.s + (i'+1).(i'+2).C_1.s^2 + \&c.\} \\ &\times \{A_2 + (i''+1).B_2.s + (i''+1).(i''+2).C_2.s^2 + \&c.\} \\ &\times \&c. \end{aligned}\right\} ; (B)$$

pourvu que dans le développement de cette quantité, au lieu d'une puiſſance quelconque c de s, on écrive $\frac{s^c}{1.2.3...c}$.

On aura enſuite la partie correſpondante de la ſomme entière des valeurs de $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$, multipliées par

leur probabilité reſpective, en changeant un terme quelconque tel que $H\lambda . l^{\mu} . s^{c}$, en $H\lambda . (s - \mu)^{c}$, & en ſubſtituant dans H, au lieu de k, la partie de l'expoſant μ qui eſt relative à t; au lieu de k_{1}, la partie relative à t_{1}, & ainſi du reſte.

Si, dans la formule *(B)*, on ſuppoſe $H = 1$ & $0 = i = i^{1} = i^{11} =$ &c. on aura la ſomme des valeurs de l'unité, multipliées par leur probabilité reſpective: or il eſt viſible que cette ſomme n'étant autre choſe que la ſomme de toutes les combinaiſons dans leſquelles l'équation

$$t + t_{1} + t_{2} + \&c. = s$$

a lieu, multipliées par leur probabilité, exprime conſéquemment la poſſibilité de cette équation elle-même. Si dans les hypothèſes précédentes, on ſuppoſe de plus que la loi de poſſibilité eſt la même pour les r premières variables $t, t_{1} \ldots t_{r-1}$, & que pour les $n - r$ dernières, elle ſoit encore la même, mais différente que pour les premières, on aura

$$A = A_{1} \ldots\ldots = A_{r-1},$$
$$B = B_{1} \ldots\ldots = B_{r-1},$$
&c.
$$A_{r} = A_{r+1} \ldots\ldots = A_{n-1},$$
$$B_{r} = B_{r+1} \ldots\ldots = B_{n-1},$$
&c.

& la formule *(B)* ſe changera dans celle-ci,

$$\left. \begin{array}{l} s^{n-1} \times \{A + B.s + 2C.s^{2} + \&c.\}^{n-r} \\ \quad \times \{A_{r} + B_{r}.s + 2C_{r}.s^{2} + \&c.\} r \end{array} \right\} ; (C)$$

cette formule ſervira à déterminer la probabilité que la ſomme des erreurs d'un nombre quelconque d'obſervations dont la loi de facilité eſt connue, ſera compriſe dans des limites données, ce qui peut être utile dans pluſieurs circonſtances,

& particulièrement lorsqu'il s'agit de prévoir le résultat d'un nombre quelconque d'observations. Comme ce Problème est d'ailleurs le plus simple auquel on puisse appliquer la méthode précédente, il est très-propre à l'éclaircir, & dans cette vue, nous allons considérer les exemples suivans.

IX.

SUPPOSONS $n - 1$ observations dont les erreurs puissent s'étendre depuis $-h$ jusqu'à $+g$, & qu'en nommant z l'erreur de la première, sa facilité soit exprimée par $a + bz + cz^2$; supposons ensuite que cette facilité soit la même pour les erreurs $z_1, z_2, \ldots z_{n-2}$ des autres observations, & cherchons la probabilité que la somme des erreurs de ces observations sera comprise dans les limites p, & $p + e$.

Si l'on fait $z = t - h, z_1 = t_1 - h \ldots z_{n-2} = t_{n-2} - h$, il est clair que t, t_1, t_2, &c, seront positifs & pourront s'étendre depuis zéro jusqu'à $h + g$; de plus, on aura

$$z + z_1 + z_2 \ldots + z_{n-2} = t + t_1 + t_2 \ldots + t_{n-2} - (n-1).h.$$

Donc la plus grande valeur de la somme $z + z_1 \ldots + z_{n-1}$ étant, par la supposition, égale à $p + e$, & la plus petite étant égale à p, la plus grande valeur de $t + t_1 \ldots + t_{n-2}$ sera $(n - 1)h + p + e$, & la plus petite sera $(n - 1)h + p$; en faisant ainsi $(n - 1)h + p + e = s$, &

$$t + t_1 \ldots + t_{n-2} = s - t_{n-1},$$

t_{n-1} sera toujours positif & pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à e. Cela posé, si l'on applique à ce cas les formules des deux articles précédens, on aura $q = 0$, $q^1 = f + g$; d'ailleurs, la loi de facilité de l'erreur z étant $a + bz + cz^2$, on en conclura la loi de facilité de t, en changeant z en $t - h$; soit $a^1 = a - bh + ch^2$; $b^1 = b - 2ch$; on aura $a^1 + b^1 t + ct^2$ pour cette facilité; ce sera donc la fonction $\varphi(t)$; mais comme depuis $t = h + g$ jusqu'à

$t = \infty$, la facilité des valeurs de t eſt nulle par l'hypothèſe, on aura $\varphi^1(t) + \varphi(t) = 0$, ce qui donne

$$\varphi^1(t) = -(a^1 + b^1 t + ct^2);$$

donc ſi l'on fait

$$a^{11} = a^1 + b^1(h+g) + c(h+g)^2,$$
$$b^{11} = b^1 + 2c(h+g),$$

la quantité que nous avons nommée $\Pi.(u)$ dans l'*art. VII*, ſera ici

$$a^1 + b^1 u + cu^2 - l^{h+g}.(a^{11} + b^{11}u + cu^2),$$

& l'on aura $\Pi_1(u_1)$, $\Pi^2(u_2)$,...$\Pi_{n-2}(u_{n-2})$, en changeant dans cette quantité, u ſucceſſivement en u_1, u_2....u_{n-2}.

Quant à la variable t_{n-1}, on obſervera que la poſſibilité de l'équation

$$z + z_1 ... + z_{n-2} = \mu,$$

étant, quel que ſoit μ, égale au produit des poſſibilités de z, $z_1 ... z_{n-2}$, la poſſibilité de l'équation

$$t + t_1 ... + t_{n-2} = s - t_{n-1},$$

ſera égale au produit des poſſibilités de t, $t_1 ... t_{n-2}$; mais cette même poſſibilité eſt évidemment égale au produit des poſſibilités de t, $t_1 ... t_{n-1}$; la loi de poſſibilité de t_{n-1} eſt donc conſtante & égale à l'unité; & comme cette variable ne doit s'étendre que depuis $t_{n-1} = 0$ juſqu'à $t_{n-1} = e$, on aura $q_{n-1} = 0$; $q^1_{n-1} = e$; $\varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 1$; $\varphi^1_{n-1}(t_{n-1}) + \varphi_{n-1}(t_{n-1}) = 0$, partant $\varphi^1_{n-1}(t_{n-1}) = -1$; d'où il eſt aiſé de conclure $\Pi_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - l^e$; la formule *(C)* de l'*article précédent* ſe changera conſéquemment dans celle-ci,

$$s^{n-1}.\{a^1 + b^1 s + 2cs^2 - l^{h+g}.(a^{11} + b^{11}s + 2cs^2)\}^{n-1}.(1 - l^e).$$

Soit

Soit

$$(a^{\prime} + b^{\prime}s + 2cs^2)^{n-1} = a^{(1)} + b^{(1)}s + c^{(1)}s^2 + \&c.$$

$$(a^{\prime} + b^{\prime}s + 2cs^2)^{n-2}.(a^{\prime\prime} + b^{\prime\prime}s + 2cs^2) = a^{(2)} + b^{(2)}.s + c^{(2)}.s^2 + \&c.$$

$$(a^{\prime} + b^{\prime}s + 2cs^2)^{n-3}.(a^{\prime\prime} + b^{\prime\prime}s + 2cs^2)^2 = a^{(3)} + b^{(3)}.s + c^{(3)}.s^2 + \&c.$$

&c.

& cette dernière formule prendra la forme suivante,

$$\begin{aligned}
& a^{(1)}.s^{n-1} + b^{(1)}.s^n + c^{(1)}.s^{n+1} + \&c. \\
& - l^e.\{a^{(1)}.s^{n-1} + b^{(1)}.s^n + c^{(1)}.s^{n+1} + \&c.\} \\
& - (n-1).l^{h+g}.\{a^{(2)}.s^{n-1} + b^{(2)}.s^n + c^{(2)}.s^{n+1} + \&c.\} \\
& + (n-1).l^{h+g+e}.\{a^{(2)}.s^{n-1} + b^{(2)}.s^n + c^{(2)}.s^{n+1} + \&c.\} \\
& + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}.l^{2h+2g}.\{a^{(3)}.s^{n-1} + \&c.\} \\
& - \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}.l^{2h+2g+e}.\{a^{(3)}.s^{n-1} + \&c.\} \\
& - \&c.
\end{aligned}$$

on en conclura la probabilité cherchée, en y changeant un terme quelconque tel que $\lambda l^{\mu}.s^c$ en $\frac{\lambda.(s-\mu)^c}{1.2.3\ldots\ldots c}$, ce qui donne pour cette probabilité, l'expression suivante,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}.\left\{\begin{aligned}
& a^{(1)}.\{s^{n-1} - (s-e)^{n-1}\} + \frac{b^{(1)}}{n}\{s^n - (s-e)^n\} \\
& + \frac{c^{(1)}}{n.(n+1)}.\{s^{n+1} - (s-e)^{n+1}\} + \&c. \\
& - (n-1).\left[a^{(2)}\{(s-h-g)^{n-1} - (s-h-g-e)^{n-1}\}\right. \\
& \left. + \frac{b^{(2)}}{n}.\{(s-h-g)^n - (s-h-g-e)^n\} + \&c.\right] \\
& + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}.\left[a^{(3)}\{(s-2h-2g)^{n-1}\right. \\
& \left. - (s-2h-2g-e)^{n-1}\} + \&c.\right] \\
& - \&c.
\end{aligned}\right.$$

en observant de rejeter les termes multipliés par $(s - \mu)^c$, dans lesquels μ est plus grand que s. On peut, au moyen de cette formule, résoudre un Problème que je me suis proposé ailleurs, sur les inclinaisons des orbites des Comètes; en supposant toutes les inclinaisons à l'écliptique également possibles, il s'agissoit de déterminer la probabilité que l'inclinaison moyenne des orbites de $n - 1$ Comètes sera comprise dans les limites θ & θ', ou ce qui revient au même, que la somme de leurs inclinaisons sera comprise dans les limites $(n - 1).\theta$ & $(n - 1).\theta'$. En nommant $t, t_1, t_2 \ldots t_{n-2}$ ces inclinaisons; comme elles peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à 90^d, on aura $f = 0$, & $g = 90^d = \frac{\pi}{2}$, π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon; de plus, leur possibilité dans cet intervalle étant constante, la fonction $a' + b't + ct^2$ se réduit à la constante a', d'où il est aisé de conclure $a^{(1)} = a'^{n-1} = a^{(2)} = a^{(3)} =$ &c. $0 = b^{(1)} = b^{(2)} =$ &c. $0 = c^{(1)} = c^{(2)} =$ &c. d'ailleurs, la valeur de t étant nécessairement comprise dans les limites 0 & $\frac{\pi}{2}$, $\int a' \partial t = 1$, l'intégrale étant prise pour toute l'étendue de ces limites, d'où l'on tire $a' = \frac{2}{\pi}$; la formule précédente donnera ainsi pour la probabilité demandée,

$$\frac{2^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1).\pi^{n-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s^{n-1} - (s-e)^{n-1} - (n-1).\{(s-\frac{\pi}{2})^{n-1} \\ - (s - e - \frac{\pi}{2})^{n-1}\} \\ + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}.\{(s-\pi)^{n-1} - (s-e-\pi)^{n-1}\} \\ - \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3}.\{(s - \frac{3}{2}\pi)^{n-1} \\ - (s - e - \frac{3}{2}\pi)^{n-1}\} + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

où l'on doit observer que $s = (n-1).\theta'$; & $e = (n-1).(\theta' - \theta)$.

X.

$z. z_1, z_2$, &c. repréſentant toujours les erreurs de $n - 1$ obſervations; ſuppoſons que la loi de facilité tant de l'erreur poſitive z, que de l'erreur négative $- z$, ſoit $h - z$, & que h & $- h$ ſoient les limites de cette erreur; ſuppoſons de plus, que cette loi ſoit la même pour les erreurs $z_1, z_2 \ldots z_{n-2}$ des autres obſervations, & que l'on cherche la probabilité que la ſomme des erreurs ſera compriſe dans les limites p, & $p + e$.

Si l'on fait $z = t - h$, $z_1 = t_1 - h$, &c. il eſt clair que t, t_1, &c. ſeront toujours poſitifs, & pourront s'étendre depuis zéro juſqu'à $2h$; la loi de facilité de t, depuis $t = 0$ juſqu'à $t = h$, ſera exprimée par t; cette même loi, depuis $t = h$ juſqu'à $t = 2h$, ſera $2h - t$; elle ſera nulle depuis $t = 2h$ juſqu'à $t = \infty$; on aura ainſi dans ce cas, $q = 0$; $q' = h$; $q'' = 2h$;

$$\varphi(t) = t,$$
$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 2h - t,$$
$$\varphi''(t) + \varphi'(t) + \varphi(t) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(t) = 2h - 2t,$$
$$\varphi''(t) = t - 2h.$$

La fonction que nous avons déſignée par $\Pi(u)$, dans l'*article VII*, ſera donc $u(1 - l^h)^2$, & l'on aura les fonctions $\Pi_1(u_1) \ldots \Pi_{n-2}(u_{n-2})$, en y changeant u ſucceſſivement en u_1, $u_2 \ldots \ldots u_{n-2}$.

Préſentement, on a

$$z + z_1 \ldots + z_{n-2} = t + t_1 \ldots + t_{n-2} - (n-1)h;$$

donc la ſomme des erreurs z, z_1, &c. devant par l'hypothèſe être renfermée dans les limites p & $p + e$, la ſomme des

valeurs de t, t_1, t_2, &c. sera comprise dans les limites $(n - 1)h + p + e$, & $(n - 1)h + p$, en sorte que si l'on fait $(n - 1)h + p + e = s$, & $t + t_1 \ldots\ldots + t_{n-2} = s - t_{n-1}$, t_{n-1} pourra s'étendre depuis o jusqu'à e; & l'on prouvera, comme dans l'exemple précédent, que sa facilité doit être supposée constante & égale à l'unité dans cet intervalle, & qu'elle doit être supposée nulle depuis $t_{n-1} = e$ jusqu'à $t_{n-1} = \infty$; d'où l'on conclura, comme dans ce même exemple,

$$\Pi_{n-1} \cdot (u_{n-1}) = 1 - l^e,$$

la formule *(C)* de l'*article VIII* deviendra ainsi

$$s^{2n-2} \cdot (1 - l^h)^{2n-2} \cdot (1 - l^e),$$

& l'on aura la probabilité cherchée en changeant dans le développement de cette quantité, un terme quelconque tel que $\lambda l^\mu \cdot s^{2n-2}$, en $\frac{\lambda \cdot (s-\mu)^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-2)}$; ce qui donne pour l'expression de cette probabilité,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-2)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s^{2n-2} - (s-e)^{2n-2} \\ - (2n-2) \cdot \{(s-h)^{2n-2} - (s-h-e)^{2n-2}\} \\ + \frac{(2n-2) \cdot (2n-3)}{1 \cdot 2} \{(s-2h)^{2n-2} - (s-2h-e)^{2n-2}\} \\ - \&c. \end{array} \right\}$$

en ayant soin de rejeter les termes multipliés par $(s-\mu)^{2n-2}$ lorsque $s - \mu$ est négatif.

Je dois observer ici que M. de la Grange a déjà résolu le Problème où l'on se propose de trouver la probabilité que la somme des erreurs de plusieurs observations sera comprise dans des limites données, lorsque la loi de facilité de ces erreurs est exprimée par une fonction rationnelle & entière de ces erreurs, d'exponentielles, de sinus & de cosinus *(voyez le tome V des Mémoires de Turin, page 221)*; sa méthode

eſt très-ingénieuſe & digne de ſon illuſtre auteur; mais la précédente a, ſi je ne me trompe, l'avantage d'être plus directe & plus générale, en ce qu'elle réduit la ſolution du Problème aux quadratures des courbes, quelle que ſoit la loi de facilité des erreurs des obſervations.

X I.

VOYONS maintenant l'uſage que l'on peut faire de la théorie précédente, dans la ſolution des Problèmes relatifs à un nombre $n - 1$ de Joueurs dont on ne connoît que la poſſibilité des adreſſes. Soient $t, t_1 \ldots t_{n-2}$ les adreſſes abſolues des Joueurs; $h. h_1, h_2$, &c. les plus petites valeurs de t, t_1, &c. h^1, h^1_1, &c. leurs plus grandes valeurs; ſi l'on fait

$$h^1 + h_1^1 + h_2^1 + \&c. = s,$$

&

$$t + t_1 \ldots + t_{n-2} = s - t_{n-1},$$

la variable t_{n-1} pourra s'étendre depuis zéro juſqu'à $h^1 - h + h^1_1 - h_1 +$ &c. la loi de ſa poſſibilité doit être ſuppoſée conſtante & égale à l'unité dans cet intervalle, & nulle au-delà juſqu'à $t_{n-1} = \infty$; de plus, il eſt clair que les adreſſes reſpectives des Joueurs ſeront

$$\frac{t}{s - t_{n-1}},\ \frac{t_1}{s - t_{n-1}},\ \frac{t_2}{s - t_{n-1}},\ \&c.$$

On cherchera donc, par les méthodes connues de l'analyſe des haſards, la ſolution du Problème propoſé, en partant de ces adreſſes reſpectives, & l'on arrivera à un réſultat qui ſera une fonction de

$$\frac{t}{h^1 + h^1_1 + \&c. - t_{n-1}},\ \frac{t_1}{h^1 + h^1_1 + \&c. - t_{n-1}},\ \&c.$$

En y ſubſtituant au lieu de s, ſa valeur, cette fonction ſera celle que nous avons déſignée par $\psi\,(t, t_1, t_2, \&c.)$ dans le Problème de l'*article VII;* il ne s'agira plus enſuite que de

chercher par la méthode de ce Problème, la ſomme de toutes les valeurs dont cette fonction eſt ſuſceptible, multipliée par leur probabilité, & cette ſomme ſera le réſultat demandé : il ne reſte plus, comme on voit, dans ce genre de Problèmes, que les difficultés inévitables de l'analyſe, difficultés qui deviennent beaucoup moindres ſi l'on ſuppoſe que la loi de poſſibilité des adreſſes eſt la même pour tous les Joueurs.

XII.

CETTE loi ne peut être connue que par une longue ſuite d'obſervations, & le plus ſouvent les circonſtances ne permettent pas de les faire ; on ne peut ſuppléer à cette ignorance que par le choix des fonctions les plus vraiſemblables ; l'analyſe des haſards, qui n'eſt en elle-même que l'art d'apprécier les vraiſemblances, doit donc nous guider dans ce choix : examinons ce qu'elle peut nous fournir de lumières ſur cet objet.

Nous obſerverons d'abord que s'il eſt difficile de connoître par l'obſervation, la loi de facilité des adreſſes des Joueurs, il eſt beaucoup plus aiſé d'en connoître les limites; car ſuppoſons que l'on ait obſervé la plus grande inégalité de ces adreſſes, & que l'on ait trouvé que le rapport de l'adreſſe du Joueur le plus fort au Joueur le plus foible eſt m ; en nommant h la plus petite adreſſe des Joueurs, & h' la plus grande, on aura $\frac{h'}{h} = m$; or ſi l'on nomme 1 l'adreſſe moyenne, & x l'excès de h' ſur cette adreſſe, on aura $1 + x = h'$, $1 - x = h$; donc $\frac{1+x}{1-x} = m$, d'où l'on tire $x = \frac{m-1}{m+1}$; partant $h = \frac{2}{m+1}$ & $h' = \frac{2m}{m+1}$.

Maintenant la loi de poſſibilité des adreſſes étant nulle au-delà des limites h & h', il eſt très-vraiſemblable qu'elle va en croiſſant depuis ces limites juſqu'au milieu de l'intervalle qui les ſépare, & qu'elle eſt la même de chaque côté de ce milieu; voilà donc une condition à laquelle on doit

assujétir la fonction dont on fera choix; mais cette fonction reste encore très-indéterminée, & comme parmi celles qui peuvent satisfaire à la condition précédente, on n'a aucune raison d'en préférer une, il faut prendre une fonction moyenne entre toutes ces fonctions: la question est ainsi réduite à déterminer cette fonction moyenne.

Pour cela, soit $2a$ l'intervalle compris entre les deux limites, & x la distance du milieu de cet intervalle à un point quelconque pris de l'un ou de l'autre côté de ce milieu; si l'on élève à ce point une ordonnée y qui représente la probabilité de x, on aura une courbe renfermée entre les deux limites, & la valeur de x devant nécessairement tomber dans cet intervalle, la surface de cette courbe sera égale à l'unité, en sorte que depuis le milieu jusqu'à l'une des limites, cette surface sera $\frac{1}{2}$; on peut donc concevoir cette quantité $\frac{1}{2}$, partagée dans un nombre infini de parties égales distribuées au-dessus des différens points de l'intervalle a; par la condition du Problème, cette répartition doit être telle, qu'il y ait d'autant moins de ces parties au-dessus de chaque point qu'il s'éloigne davantage du milieu; toutes les combinaisons dans lesquelles cela existe, sont également admissibles, & l'on aura l'ordonnée moyenne qui en résulte pour l'abscisse x, en prenant la somme de toutes les ordonnées y, relatives à chaque combinaison, & en la divisant par le nombre de ces combinaisons.

Supposons d'abord le nombre des points de l'intervalle a, fini & égal à n, & nommons s le nombre infini de parties qu'il faut distribuer au-dessus de ces points, en observant la condition précédente; soit de plus, z l'ordonnée relative au $n^{\text{ième}}$ point; $z + z_1$ l'ordonnée relative au $(n - 1)^{\text{ième}}$ point; $z + z_1 + z_2$ l'ordonnée relative au $(n - 2)^{\text{ième}}$ point, & ainsi de suite, en sorte que l'ordonnée relative au premier point, ou au point du milieu de l'intervalle $2a$, soit $z + z_1 \cdots + z_{n-1}$; il est visible que $z, z_1, z_2 \cdots z_{n-1}$, seront nécessairement positifs, & que l'on aura

$$nz + (n-1)z_1 + (n-2).z_2 \ldots + z_{n-1} = s;$$

ſoit

$$nz = t; (n-1)z_1 = t_1; (n-2)z_2 = t_2; \ldots z_{n-1} = t_{n-1};$$

l'équation précédente deviendra

$$t + t_1 + t_2 \ldots + t_{n-1} = s;$$

les variables t, t_1, t_2, &c. pourront s'étendre depuis zéro juſqu'à s, & l'ordonnée relative au $r^{\text{ième}}$ point ſera

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} + \frac{t_2}{n-2} \ldots + \frac{t_{n-r}}{r}.$$

Il faut conſéquemment déterminer la ſomme de toutes les variations que peut recevoir cette quantité, & la diviſer par le nombre de ces variations : or il eſt viſible que ce Problème rentre dans celui de l'*article VII;* que la quantité que nous y avons nommée $\psi(t, t_1, t_2, \&c.)$ eſt ici

$$\frac{t}{n} + \frac{t_1}{n-1} \ldots + \frac{t_{n-r}}{r};$$

que les quantités q & q' ſont ici o & s, & que la loi de facilité des variations de t doit être ſuppoſée égale à une conſtante b, & la même que pour t_1, t_2, &c. on aura donc, dans le cas préſent,

$$\Gamma.(u, u_1, u_2, \&c.) = \left\{ \frac{k}{n} + \frac{k_1}{n-1} \ldots + \frac{k_{n-r}}{r} + \frac{u}{n} + \frac{u_1}{n-1} \ldots\ldots + \frac{u_{n-r}}{r} \right\}$$

$$\Pi(u) = \Pi_1(u_1) = \Pi_2(u_2) = \&c. = b(1 - l^s);$$

mais comme il faut diſtinguer les limites o & s, qui appartiennent aux variables $t, t_1 \ldots t_{n-r}$, afin d'aſſigner à k, $k_1 \ldots k_{n-r}$, les valeurs qui leur conviennent, nous repréſenterons par c^{I}, s^{I}; c^{II}, s^{II}; c^{III}, s^{III}, &c. ces limites ; cela poſé, la formule *(B)* de l'*article VIII* donnera pour $\Upsilon(s)$,

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{k}{n}+\frac{k_1}{n-1}+\frac{k_2}{n-2}\ldots+\frac{k_{n-r}}{r}\right)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}.s^{n-1}\\ +\dfrac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\ldots+\frac{1}{r}\right)}{1.2.3\ldots\ldots n}.s^{n}\end{array}\right\}.b^n.(1-l^s)^r.(l^{c^{\text{I}}}-l^{s^{\text{I}}}).(l^{c^{\text{II}}}-l^{s^{\text{II}}}).\&c.$$

Il faut enſuite dans le développement de cette quantité, ſubſtituer pour k, la partie de l'expoſant de l, qui dépend de c^{I} & de s^{I}; pour k_1, la partie de cet expoſant qui dépend de c^{II} & de s^{II}, &c. diminuer s de l'expoſant entier de l, & rejeter ce terme toutes les fois que cet expoſant ainſi diminué, ſera négatif; enfin ſuppoſer $0 = c^{\text{I}} = c^{\text{II}} = c^{\text{III}} =$ &c. $s = s^{\text{I}} = s^{\text{II}} =$ &c. & $l = 1$; la quantité précédente ſe réduira ainſi à cette formule très-ſimple,

$$\frac{b^n.s^n}{1.2.3\ldots n}.\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\ldots+\frac{1}{r}\right\};$$

en diviſant cette quantité par le nombre de toutes les combinaiſons, qui ne peut être une fonction de n, on aura pour l'ordonnée moyenne correſpondante au $r^{\text{ième}}$ point,

$$N.\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\ldots+\frac{1}{r}\right\}$$

N étant fonction de n.

Suppoſons maintenant que les nombres n & r deviennent infinis, que le $r^{\text{ième}}$ point réponde à l'abſciſſe x, & le $n^{\text{ième}}$ point à l'abſciſſe a, on aura, comme l'on ſait,

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\ldots+\frac{1}{r}=\log.n-\log.r=\log.\frac{n}{r}=\log.\frac{a}{x};$$

donc l'ordonnée moyenne y qui répond à l'abſciſſe x, eſt $N.\log.\frac{a}{x}$; on déterminera N, en obſervant que l'on doit avoir $\int N\partial x.\log.\frac{a}{x}=\frac{1}{2}$, l'intégrale étant priſe depuis $x=0$ juſqu'à $x=a$, ce qui donne $N=\frac{1}{2a}$;

partant $y = \frac{1}{2a} . \log . \frac{a}{x}$;

il faut obſerver que cette équation doit être ſuppoſée la même, x étant poſitif ou négatif, ce qui revient à ſuppoſer ici les logarithmes des quantités poſitives, égaux aux logarithmes des quantités négatives, c'eſt-à-dire, $\log . \mu = \log . - \mu$.

XIII.

TELLE eſt l'équation dont il faut faire uſage, lorſqu'on n'a relativement à la poſſibilité des valeurs de x, d'autres données, ſi ce n'eſt qu'elle eſt d'autant moindre que ces valeurs ſont plus grandes : or, c'eſt ce qui a lieu dans un grand nombre de circonſtances. Suppoſons, par exemple, qu'il s'agiſſe du véritable inſtant d'un phénomène obſervé par pluſieurs Obſervateurs ; chacun d'eux peut aiſément fixer la plus grande erreur dont ſon obſervation eſt ſuſceptible, ſoit en *plus*, ſoit en *moins*, en prenant pour cette limite, la moitié du plus grand intervalle qu'il peut ſuppoſer entre deux obſervations ſemblables, ſans les rejeter comme mauvaiſes ; cet intervalle eſt ce que nous avons nommé $2a$; il dépend de l'adreſſe de l'Obſervateur, de la bonté de ſes inſtrumens, & de la préciſion dont l'obſervation dont il s'agit eſt ſuſceptible, & il doit être ſuppoſé le même pour tous les Obſervateurs, ſi l'on n'a aucune raiſon de préférer ſous ce point de vue une obſervation à une autre. Maintenant, il eſt naturel de penſer que les mêmes erreurs en plus & en moins, ſont également probables, & que leur facilité eſt d'autant moindre, qu'elles ſont plus grandes : ſi l'on n'a aucune autre donnée, relativement à leur facilité, on retombe évidemment dans le cas du Problème précédent ; il faut donc ſuppoſer alors la poſſiblité, tant de l'erreur poſitive x, que de l'erreur négative $- x$, égale à $\frac{1}{2a} . \log . \frac{a}{x}$; & c'eſt de cette loi de poſſibilité dont il faut partir dans la recherche du milieu que l'on doit choiſir entre les réſultats de pluſieurs obſervations.

Lorſqu'il s'agit des adreſſes des Joueurs, on a *(art. XII)* $2a = h' - h$; l'adreſſe t d'un Joueur quelconque eſt égale à $1 \pm x$; la poſſibilité de t, depuis $t = h$ juſqu'à $t = h'$, ſera donc repréſentée par $\frac{1}{h'-h} \cdot \log. \left(\frac{h'-h}{2-2t}\right)$, pourvu que l'on faſſe les logarithmes des quantités négatives égaux aux logarithmes des quantités poſitives. En appliquant à ce cas les formules de l'*article VII*, on aura $q = h$; $q' = h'$;

$$\varphi(t) = \frac{1}{h'-h} \cdot \log. \left(\frac{h'-h}{2-2t}\right);$$

$$\varphi'(t) + \varphi(t) = 0, \text{ ou } \varphi'(t) = \frac{1}{h-h'} \cdot \log. \left(\frac{h'-h}{2-2t}\right);$$

on doit ſuppoſer d'ailleurs cette loi de poſſibilité la même pour les adreſſes de tous les Joueurs; on aura ainſi toutes les données néceſſaires à la ſolution des Problèmes que l'on peut ſe propoſer relativement à un nombre quelconque de Joueurs; & en appliquant à ces données l'analyſe de l'*art. VII*, on parviendra au ſeul résultat qui convient à l'état d'ignorance où nous nous ſuppoſons relativement à la facilité des adreſſes des Joueurs.

XIV.

La théorie précédente ſuppoſe que l'on n'a aucune raiſon d'attribuer à l'un des Joueurs plus d'adreſſe qu'aux autres, ce qui eſt vrai lorſque le jeu commence ; mais à meſure que les parties ſe ſuccèdent, & que les évènemens du jeu ſe multiplient, on acquiert de nouvelles lumières ſur leurs forces reſpectives, en ſorte qu'elles ſeroient exactement connues, ſi le nombre des parties étoit infini, comme nous le démontrerons dans la ſuite : les adreſſes des Joueurs, & plus généralement les différentes cauſes des évènemens, ſont ainſi liées à leur exiſtence par des loix qu'il eſt très-important de bien connoître, & ſous ce point de vue, on ne peut douter que les évènemens paſſés n'influent ſur la probabilité des évènemens futurs. Examinons cette influence, & la manière dont on doit en tenir compte.

Pour cela, nommons E l'évènement déjà paſſé; e l'évènement futur dont on propoſe de calculer la probabilité P; E -+- e un évènement compoſé de l'évènement E arrivant le premier, & de l'évènement e arrivant enſuite : ſi l'on détermine par la théorie précédente & ſans avoir égard aux évènemens paſſés, la probabilité de l'évènement E & celle de l'évènement E -+- e; que l'on nomme V la première de ces probabilités, & v la ſeconde; il eſt clair que cette dernière probabilité v ſera égale à la probabilité de l'évènement E, multipliée par la probabilité cherchée P que E ayant déjà eu lieu, l'évènement e lui ſuccédera; on aura ainſi $PV = v$, ce qui donne

$$P = \frac{v}{V}:$$

la méthode précédente s'applique donc également au cas où l'on a égard aux évènemens paſſés, & il n'en réſulte qu'un calcul plus compoſé.

Lorſque la poſſibilité des évènemens eſt connue *a priori* & par la nature même des cauſes qui les produiſent, comme la poſſibilité d'amener une face donnée d'un dé dont la matière eſt homogène & dont les faces ſont parfaitement égales, la probabilité v de l'évènement E -+- e, ſe détermine en calculant ſéparément les probabilités de E & de e, & en les multipliant l'une par l'autre, en ſorte que la valeur de P eſt égale à la probabilité de e. Il ſuit de-là que les évènemens paſſés n'ont alors aucune influence ſur la probabilité des évènemens futurs; on peut s'en aſſurer d'ailleurs, en obſervant que, quels que ſoient les évènemens déjà arrivés, leur poſſibilité abſolue reſte toujours la même, ce qui rend la conſidération du paſſé entièrement inutile, lorſque cette poſſibilité eſt exactement connue; mais il n'en eſt pas ainſi quand elle ne l'eſt pas; car il eſt viſible que les évènemens paſſés doivent rendre plus ou moins probables les différentes valeurs qu'on peut lui ſuppoſer, ſuivant qu'elles leur ſont plus ou moins favorables. Cette remarque nous conduit naturellement à déterminer la probabilité des cauſes priſe des évènemens.

XV.

SUPPOSONS qu'un évènement donné ne puiſſe être produit que par les n cauſes $A, A^{\prime} \ldots A^{(n-1)}$; ſoit x la probabilité qui en réſulte pour l'exiſtence de A; $x^{\prime}$ celle de l'exiſtence de $A^{\prime}$; $x^{\prime\prime}$ celle de l'exiſtence de $A^{\prime\prime}$, &c. Si l'on nomme a, $a^{\prime}$, $a^{\prime\prime}$, &c. les probabilités que les cauſes A, $A^{\prime}$, $A^{\prime\prime}$, &c. étant ſuppoſées exiſter, produiront l'évènement dont il s'agit, il eſt clair que la probabilité d'un ſecond évènement ſemblable au premier, ſera égale au produit de a par la probabilité x de la cauſe A, plus au produit de de $a^{\prime}$ par la probabilité $x^{\prime}$ de la cauſe $A^{\prime}$, plus &c. d'où il ſuit que l'on aura $ax + a^{\prime}x^{\prime} + a^{\prime\prime}x^{\prime\prime} +$ &c. pour cette probabilité : on trouvera de la même manière,

$$a^2 x + a^{\prime 2} x^{\prime} + a^{\prime\prime 2} x^{\prime\prime} + \&c.$$

pour la probabilité de deux évènemens conſécutifs ſemblables au premier,

$$a^3 x + a^{\prime 3} x^{\prime} + a^{\prime\prime 3} x^{\prime\prime} + \&c.$$

pour la probabilité de trois évènemens conſécutifs ſemblables, & ainſi de ſuite. On aura par l'*article précédent*, ces mêmes probabilités, en cherchant *a priori* les probabilités de deux, de trois, de quatre, &c. évènemens conſécutifs, & en les diviſant par la probabilité du premier : or la probabilité d'un premier évènement eſt a ou $a^{\prime}$, ou $a^{\prime\prime}$, &c. ſuivant que la cauſe A ou la cauſe $A^{\prime}$, ou &c. exiſte ; ce qui donne $\frac{1}{n}(a + a^{\prime} + a^{\prime\prime}, + \&c.)$ pour cette probabilité ; pareillement les probabilités de deux, de trois, &c. évènemens ſemblables, ſont $\frac{1}{n}(a^2 + a^{\prime 2} + a^{\prime\prime 2} + \&c.)$; $\frac{1}{n}(a^3 + a^{\prime 3} + a^{\prime\prime 3} + \&c.)$, &c. donc les probabilités qu'un premier évènement ayant déjà eu lieu, il ſera

ſuivi d'un ou de deux, &c. évènemens ſemblables, ſont

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.}; \quad \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.}, \text{ \&c.}$$

en égalant ces probabilités aux précédentes, on aura

$$a\,x + a'\,x' + a''\,x'' + \&c. = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.};$$

$$a^2 x + a'^2 x' + a''^2 x'' + \&c. = \frac{a^3 + a'^3 + a''^3 + \&c.}{a + a' + a'' + \&c.};$$

on formera $n - 1$ équations ſemblables, & en les combinant avec l'équation

$$x + x' + x'' + \&c. = 1,$$

qui réſulte de la ſuppoſition que l'évènement ne peut être produit que par les n cauſes A, A', A'', &c. on aura en tout n équations du premier degré, qui ſerviront à déterminer x, x', x'', &c. or il eſt viſible que l'on y ſatisfera en faiſant

$$x = \frac{a}{a + a' + a'' + \&c.};$$

$$x' = \frac{a'}{a + a' + a'' + \&c.};$$

&c.

d'où il ſuit que pour avoir la probabilité de l'exiſtence d'une cauſe quelconque $A^{(r)}$ réſultante d'un évènement donné, il faut déterminer la probabilité $a^{(r)}$ que cette cauſe ayant lieu, produira cet évènement, & diviſer cette probabilité par la ſomme des probabilités ſemblables a, a', a'', &c. relatives à toutes les cauſes qui peuvent le produire.

X V I.

Pour appliquer cette théorie & pour faire ſentir par un exemple fort ſimple, l'influence des évènemens paſſés ſur la probabilité de ceux qui ſuivent, conſidérons deux Joueurs A & B dont les adreſſes ſoient inconnues; il eſt infiniment peu

vraiſemblable qu'elles ſeront parfaitement égales. Soit donc $\frac{1+\alpha}{2}$ la plus grande, & $\frac{1-\alpha}{2}$ la plus petite; ſi l'on cherche la probabilité P que A gagnera les deux premières parties, on aura par l'*article II*, $P = \frac{1+\alpha^2}{4}$, en ſorte qu'il y a de l'avantage à parier 1 contre 3 que cela aura lieu; mais ſi l'on cherche la probabilité que B ayant déjà gagné la première partie, A gagnera les deux ſuivantes, il eſt viſible que la valeur précédente de P eſt trop conſidérable, puiſqu'il y a une raiſon de croire que l'adreſſe de B eſt la plus grande. En effet, ſi l'on conſidère chaque adreſſe comme une cauſe particulière de l'évènement, la probabilité que l'adreſſe de B eſt $\frac{1+\alpha}{2}$ ſera, par l'*article précédent*, égale à la probabilité que B ayant cette adreſſe gagnera la première partie, diviſée par la ſomme des probabilités qu'il la gagnera en ayant ſucceſſivement les adreſſes $\frac{1+\alpha}{2}$ & $\frac{1-\alpha}{2}$; d'où l'on tire $\frac{1+\alpha}{2}$ pour cette probabilité.

Pour déterminer dans ce cas la valeur de P, on obſervera que l'évènement que nous avons nommé E dans l'*article XIV*, eſt ici le gain de la première partie par B, & que l'évènement e eſt le gain des deux parties ſuivantes par A; la probabilité V de l'évènement E eſt donc $\frac{1+\alpha}{2}$ ou $\frac{1-\alpha}{2}$, ſuivant que la plus grande ou la plus petite adreſſe appartient à B, ce qui donne en prenant la moitié de la ſomme de ces deux valeurs, $V = \frac{1}{2}$; pareillement la probabilité de v de l'évènement $E + e$ eſt égale à $\frac{1-\alpha}{2} \cdot (\frac{1+\alpha}{2})^2$, ou à $\frac{1+\alpha}{2} \cdot (\frac{1-\alpha}{2})^2$; partant $v = \frac{1-\alpha^2}{8}$; donc $P = \frac{v}{V} = \frac{1-\alpha^2}{4}$; il y a donc du déſavantage à parie

1 contre 3 que A gagnera les deux parties ſuivantes, en ſorte que l'inégalité des adreſſes qui dans le premier cas, favoriſe celui qui parie conformément au calcul ordinaire des probabilités, lui eſt défavorable dans celui-ci.

On trouvera de la même manière, que B ayant déjà gagné la première partie, la probabilité P que A gagnera les n ſuivantes, eſt

$$P = \frac{1 - \alpha^2}{2^{n+1}} \cdot \{(1 + \alpha)^{n-1} + (1 - \alpha)^{n-1}\}.$$

Si α eſt peu conſidérable, on a à très-peu-près,

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot \{1 + \alpha^2 [\frac{(n-1).(n-2)}{1.2} - 1]\};$$

or toutes les fois que n ſurpaſſera 3, cette quantité ſera plus grande que la probabilité $\frac{1}{2^n}$ que donne la ſuppoſition des adreſſes égales; d'où il réſulte que dans ce cas, quoiqu'il ſoit probable que A eſt le Joueur le plus foible, cependant la probabilité qu'il gagnera les n parties ſuivantes, eſt plus grande que ſi l'on ſuppoſoit A & B de forces égales.

X V I I.

LORSQU'ON n'a aucune donnée *à priori* ſur la poſſibilité d'un évènement, il faut ſuppoſer toutes les poſſibilités depuis zéro juſqu'à l'unité, également probables; ainſi l'obſervation pouvant ſeule nous inſtruire ſur le rapport des naiſſances des garçons & des filles, on doit, à ne conſidérer la choſe qu'en elle-même & abſtraction faite des évènemens, ſuppoſer la loi de poſſibilité des naiſſances d'un garçon ou d'une fille, conſtante depuis zéro juſqu'à l'unité, & partir de cette hypothèſe dans les différens Problèmes que l'on peut ſe propoſer ſur cet objet.

Suppoſons par exemple, que l'on ait obſervé que ſur $p + q$ enfans, il eſt né p garçons & q filles; & que l'on cherche la probabilité P que ſur $m + n$ enfans qui doivent naître,

naître, il y aura m garçons & n filles; si l'on nomme x la probabilité qu'un enfant qui doit naître sera un garçon, & $1 - x$ celle qu'il sera fille; en désignant $\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q}$ par λ, on aura $\lambda x^p.(1-x)^q$ pour la probabilité que sur $p+q$ enfans, il y aura p garçons & q filles; cet évènement est celui que nous avons nommé E dans l'*article XIV*. Pareillement, si l'on désigne par γ le produit $\frac{1.2.3\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}$, on aura $\gamma\lambda.x^{p+m}.(1-x)^{q+n}$ pour la probabilité que sur $p+q$ enfans qui naîtront d'abord, il y aura p garçons & q filles, & que sur $m+n$ enfans qui naîtront ensuite, il y aura m garçons & n filles; cet évènement est celui que nous avons nommé $E+e$ dans l'article cité. Maintenant, x étant susceptible de toutes les valeurs depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, & toutes ces valeurs étant *a priori* également probables; il faut, pour avoir la véritable probabilité de E, multiplier $\lambda.x^p(1-x)^q$ par $a\partial x$, a étant constant, & prendre l'intégrale $\lambda.\int a\partial x.x^p(1-x)^q$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; la valeur de a se déterminera en observant que x devant nécessairement tomber entre 0 & 1, on a $\int a\partial x = 1$, l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, ce qui donne $a = 1$. On aura semblablement $\lambda\gamma.\int x^{p+m}.\partial x(1-x)^{q+n}$ pour la probabilité entière de l'évènement $E+e$; donc la probabilité cherchée P, que sur $m+n$ enfans qui doivent naître, il y aura m garçons & n filles, sera par l'*article XIV*,

$$P = \frac{\gamma.\int x^{p+m}\partial x.(1-x)^{q+n}}{\int x^p\partial x.(1-x)^q},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Cette condition donne

$$\int x^p\partial x(1-x)^q = \frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots q}{(p+1).(p+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(p+q+1)};$$

$$\int x^{p+m}\partial x.(1-x)^{q+n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots(q+n)}{(p+m+1).(p+m+2)\ldots(p+q+m+n+1)};$$

ce qui change l'expreſſion de P dans celle-ci,

$$P = \gamma \,.\, \frac{(q+1).(q+2)\ldots(q+n).(p+1).(p+2)\ldots(p+m)}{(p+q+2).(p+q+3)\ldots\ldots(p+q+m+n+1)};$$

or on a, comme l'on ſait,

$$\log.(1.2.3\ldots u) = \tfrac{1}{2}\log.2\pi + (u+\tfrac{1}{2})\log.u$$
$$- u + \frac{1}{12.u} - \frac{1}{360.u^3} + \&c.$$

ce qui donne à très-peu-près, lorſque u eſt conſidérable,

$$1.2.3\ldots u = \sqrt{(2\pi)}.u^{u+\frac{1}{2}}.e^{-u},$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, & e le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité; donc, ſi l'on ſuppoſe p & q de très-grands nombres, on aura

$$(q+1).(q+2)\ldots(q+n) = \frac{1.2.3\ldots(q+n)}{1.2.3\ldots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}}.e^{-n};$$

$$(p+1).(p+2)\ldots(p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}}.e^{-m};$$

$$(p+q+1)\ldots(p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}.e^{-m-n};$$

en ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de P, & en obſervant que l'on a à très-peu-près,

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n},$$

elle deviendra

$$P = \gamma \,.\, \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}.(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}.(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}.q^{q+\frac{1}{2}}.(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}. \quad (\varpi)$$

Si μ & s ſont de très-petits nombres par rapport à p & à q, on a

$$\log.(p+\mu)^{p+s} = (p+s)\left\{\log.p + \log.\left(1+\frac{\mu}{p}\right)\right\}$$
$$= (p+s).\left\{\frac{\mu}{p} + \log.p\right\} = \mu + (p+s)\log.p;$$

donc,

$$(p + \mu)^{p + s} = p^{p + s} . e^{\mu} :$$

partant, si m & n sont très-petits relativement à p & q, on a

$$(q + n)^{q + n + \frac{1}{2}} = e^{n} . q^{q + n + \frac{1}{2}},$$

$$(p + m)^{p + m + \frac{1}{2}} = e^{m} . p^{p + m + \frac{1}{2}},$$

$$(p + q + m + n)^{p + q + m + n + \frac{1}{2}} = e^{m + n} . (p + q)^{p + q + \frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire

$$P = \gamma . \frac{p^{m} . q^{n}}{(p + q)^{m + n}}.$$

XVIII.

Cette valeur de P est la même que celle à laquelle on parviendroit, en supposant les possibilités des naissances des garçons & des filles dans le rapport de p à q; d'où il est naturel de conclure que ces possibilités sont à très-peu-près dans le même rapport, & qu'ainsi, la vraie possibilité de la naissance d'un garçon est très-approchante de $\frac{p}{p + q}$: ce n'est pas qu'absolument parlant, elle ne puisse avoir une valeur bien différente; mais l'expression $\frac{p}{p + q}$, & celles qui en sont très-voisines, sont incomparablement plus probables que les autres, & l'on peut énoncer ainsi la conclusion précédente.

Si l'on désigne par θ une quantité fort petite, & par P la probabilité que la possibilité de la naissance d'un garçon est comprise dans les limites $\frac{p}{p+q} - \theta$ & $\frac{p}{p+q} + \theta$; la valeur de P différera d'autant moins de la certitude ou de l'unité, que p & q seront de plus grands nombres, & l'on peut tellement faire croître p & q, que la différence de P à l'unité soit moindre qu'aucune grandeur donnée, quelque petit que θ soit d'ailleurs.

On voit par-là comment les évènemens, en ſe multipliant, nous indiquent d'une manière de plus en plus probable, leur poſſibilité reſpective ; mais comme le théorème précédent n'eſt vrai que dans l'infini, & que la valeur de P diffère toujours un peu de l'unité lorſque p & q ſont des nombres finis, il eſt intéreſſant de connoître cette différence, & pour cela, nous allons donner l'expreſſion de P par une ſuite très-convergente que nous verrons ſe réduire à l'unité, lorſque p & q ſont infinis, & qui nous fournira de cette manière, une démonſtration directe & rigoureuſe du théorème dont il s'agit.

Soit x la poſſibilité de la naiſſance d'un garçon, & $1 - x$ celle de la naiſſance d'une fille; la probabilité que ſur $p + q$ enfans, il y aura p garçons & q filles, ſera, comme on l'a vu dans l'*article précédent*, égale à $\lambda . x^p . (1 - x)^q$; or ſi l'on regarde x comme une cauſe particulière de cet évènement, $\frac{x^p \partial x (1 - x)^q}{\int x^p \partial x (1 - x)^q}$ ſera par l'*article XV* la probabilité de cette cauſe, pourvu que l'intégrale du dénominateur ſoit priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; donc la probabilité P, que x ſera contenu dans des limites données, ſera $\frac{\int x^p \partial x (1 - x)^q}{\int x^p \partial x (1 - x)^q}$, pourvu que l'intégrale du numérateur ne ſoit priſe que dans l'étendue de ces limites; la queſtion eſt ainſi réduite à déterminer dans ce dernier cas la valeur de $\int x^p \partial x (1 - x)^q$, lorſque p & q ſont de très-grands nombres.

Soit $y = x^p (1 - x)^q$, on aura

$$y \partial x = \frac{x (1 - x)}{p - (p + q) x} . \partial y,$$

& ſi l'on fait $p = \frac{1}{\alpha}$; $q = \frac{\mu}{\alpha}$, α étant une fraction extrêmement petite puiſque p & q ſont très-conſidérables, on aura

$$y \partial x = \alpha z . \partial y ;$$

z étant égal à $\frac{x.(1-x)}{1-(1+\mu)x}$; de-là on tirera, quel que soit z,

$$\int y\partial x = C + \alpha yz.\left\{1 - \alpha.\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha^2.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x^2} - \alpha^3.\frac{\partial[z\partial(z\partial z)]}{\partial x^3} + \&c.\right\}; \quad (\lambda)$$

C étant une constante arbitraire qui dépend de la valeur de $\int y\partial x$, à l'origine de l'intégrale. Cette suite qui est d'un grand usage dans ces recherches, se démontre facilement en observant

1.° que $\int y\partial x = \int \alpha z\partial y = \alpha yz - \alpha\int y\partial z$;

2.° que l'équation $y\partial x = \alpha z.\partial y$, donne $y = \alpha z.\frac{\partial y}{\partial x}$, & qu'ainsi

$$\int y\partial z = \alpha\int.\frac{z\partial z}{\partial x}.\partial y = \alpha y.\frac{z\partial z}{\partial x} - \alpha\int y.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x};$$

3.° que $\int y.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x} = \alpha\int\partial y.z.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x} = \alpha y.z.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x^2} - \alpha\int y.\frac{\partial[z\partial(z\partial z)]}{\partial x^2}$, & ainsi de suite.

La série précédente cesse d'être convergente, lorsque le dénominateur de z est très-petit de l'ordre α; & c'est ce qui a lieu, lorsque x ne diffère de $\frac{1}{1+\mu}$, que d'une quantité de cet ordre; il faut donc n'employer cette série, que dans le cas où cette différence est très-grande par rapport à α; mais cela ne suffit pas encore : chaque différentiation augmentant d'une unité les puissances des dénominateurs de z & de ses différentielles, il est visible que le terme de la série multiplié par α^i, a pour dénominateur celui de z, élevé à la puissance $2i - 1$; donc pour la convergence de cette suite, il est nécessaire que α soit beaucoup moindre, non-seulement que le dénominateur de z, mais encore que le carré de ce dénominateur.

Il ſuit de-là que la ſuite (λ) donnera par une approximation rapide, l'intégrale $\int y \partial x$ priſe depuis $x = 0$, juſqu'à $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$, pourvu que α ſoit beaucoup plus petit que θ^2; & ſi l'on obſerve que l'on a $y = 0$, & $z = 0$ lorſque $x = 0$, on trouvera pour la valeur de $\int y \partial x$ dans ce cas,

$$\int y \partial x = \frac{\alpha \mu^{q+1} \cdot [1-(1+\mu)\theta]^{p+1} \cdot (1+\frac{1+\mu}{\mu}.\theta)^{q+1}}{(1+\mu)^{p+q+3} \cdot \theta} \left\{ 1 - \frac{\alpha[\mu+(1+\mu)^2 \cdot \theta^2]}{(1+\mu)^3 \cdot \theta^2} + \&c. \right\}$$

Cette ſuite a l'avantage de donner les limites entre leſquelles la valeur de $\int y \partial x$ eſt reſſerrée; en effet, cette valeur eſt moindre que le premier terme & plus grande que la ſomme des deux premiers termes; pour le démontrer, nous donnerons à z cette forme,

$$z = -\frac{\mu}{(1+\mu)^2} + \frac{x}{1+\mu} + \frac{\mu}{(1+\mu)^2 \cdot [1-(1+\mu).x]},$$

& nous aurons

$$\partial z = \frac{\partial x}{1+\mu} + \frac{\mu \partial x}{(1+\mu) \cdot [1-(1+\mu).x]^2};$$

on voit ainſi que z & ∂z augmentent à meſure que x augmente depuis $x = 0$, juſqu'à $x = \frac{1}{1+\mu}$; les quantités z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial.(z\partial z)}{\partial x^2}$ ſont donc toujours poſitives dans cet intervalle, ainſi que les intégrales $\int y \partial z$ & $\int y . \frac{\partial.(z\partial z)}{\partial x}$; or on a par ce qui précède, $\int y \partial x = \alpha y z - \alpha \int y \partial z$; partant $\int y \partial x$ eſt moindre que $\alpha y z$; pareillement $\int y \partial z = \alpha y z \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha \int y . \frac{\partial.(z\partial z)}{\partial x}$; & par conſéquent $\int y \partial z$ eſt moindre que $\alpha y . z . \frac{\partial z}{\partial x}$; donc $\int y \partial x$ eſt moindre que $\alpha y z$, & plus grand que $\alpha y z . (1 - \alpha . \frac{\partial z}{\partial x})$. Cette

remarque peut servir, lorsque sans chercher la valeur exacte de $\int y \partial x$, on veut s'assurer si elle est plus grande ou plus petite qu'une quantité donnée.

La suite (λ) donnera encore l'intégrale $\int y \partial x$, depuis $x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$, jusqu'à $x = 1$, & si l'on considère que x étant 1, on a $y = 0$, & $z = 0$; on verra facilement que la valeur de $\int y \partial x$ dans ce dernier cas, est la valeur même de $\int y \partial x$ dans le premier cas, prise en moins, & dans laquelle on change θ en $-\theta$; donc si l'on nomme k l'intégrale entière $\int y \partial x$, prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$; on aura aux quantités près de l'ordre α^3, pour cette même intégrale prise depuis $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$, jusqu'à $x = \frac{1}{1+\mu} + \theta$, ou ce qui revient au même, depuis $x = \frac{p}{p+q} - \theta$, jusqu'à $x = \frac{p}{p+q} + \theta$,

$$k - \frac{\alpha \mu^{q+1} . \left\{ 1 - \frac{\alpha [\mu + (1+\mu)^2 \theta^2]}{(1+\mu)^3 . \theta^2} \right\}}{(1+\mu)^{p+q+3} . \theta} \times \left\{ \begin{array}{l} [1 - (1+\mu).\theta]^{p+1} . (1 + \frac{1+\mu}{\mu} \theta)^{q+1} \\ + [1 + (1+\mu).\theta]^{p+1} . (1 - \frac{1+\mu}{\mu} \theta)^{q+1} \end{array} \right\}$$

ce qui donne

$$P = 1 - \frac{\alpha \mu^{q+1} . \left\{ 1 - \frac{\alpha [\mu + (1+\mu)^2 . \theta^2]}{(1+\mu)^3 . \theta^2} \right\}}{(1+\mu)^{p+q+3} . \theta k} \times \left\{ \begin{array}{l} [1 - (1+\mu)\theta]^{p+1} . (1 + \frac{1+\mu}{\mu} \theta)^{q+1} \\ + [1 + (1+\mu)\theta]^{p+1} . (1 - \frac{1+\mu}{\mu} \theta)^{q+1} \end{array} \right\}$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'avoir la valeur de k; or on a, par l'*article précédent*,

$$k = \frac{1 . 2 . 3 \ldots . p . 1 . 2 . 3 \ldots . q}{1 . 2 . 3 \ldots (p + q + 1)},$$

& quel que ſoit u,

$$1.2.3\ldots u = \sqrt{(2\pi)}.u^{u+\frac{1}{2}}.e^{-u}.\left\{1 + \frac{1}{12u} + \&c.\right\}$$

d'où il eſt aiſé de conclure, en faiſant $p = \frac{1}{\alpha}$, & $q = \frac{\mu}{\alpha}$,

$$k = \frac{\sqrt{(2\pi\alpha)}.\mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^{p+q+\frac{1}{2}}}.\left\{1 + \alpha.\frac{[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{12\mu.(1+\mu)} + \&c.\right\}$$

on aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^{\frac{5}{2}}$,

$$P = 1 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}.\mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi)}.(1+\mu)^{\frac{3}{2}}.\theta}.\left\{1 - \alpha.\frac{[12\mu^2 + (1+\mu)^2.(1+\mu+\mu^2).\theta^2]}{12\mu.(1+\mu)^3.\theta^2}\right\}$$

$$.\left\{\begin{array}{l}[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}.(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1} \\ + [1+(1+\mu)\theta]^{p+1}.(1-\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}\end{array}\right\}$$

ſur quoi l'on doit obſerver que la quantité

$$[1 - (1+\mu)\theta]^p.(1 + \frac{1+\mu}{\mu}.\theta)^q$$

eſt à ſon *maximum*, lorſque $\theta = 0$; d'où il ſuit que la plus grande valeur du facteur

$$[1 - (1+\mu)\theta]^{p+1}.(1 + \frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}$$
$$+ [1 + (1+\mu)\theta]^{p+1}.(1 - \frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}.$$

eſt très-près de deux, & qu'il eſt beaucoup moindre, pour peu que θ ſoit plus grand que zéro.

Dans la queſtion préſente, ce facteur eſt toujours extrêmement petit; pour le faire voir, nous mettrons la quantité

$[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}.(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}$ ſous cette forme,

$$[1 + \frac{1-\mu^2}{\mu}.\theta - \frac{(1+\mu)^2}{\mu}.\theta^2].[1-(1+\mu)\theta]^p.(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^q,$$

& nous obſerverons que θ étant fort petit, on a par des ſuites convergentes,

Log.

$$\log.\ [1-(1+\mu)\theta]=-(1+\mu)\cdot\theta-\tfrac{1}{2}\cdot(1+\mu)^2\cdot\theta^2-\tfrac{1}{3}\cdot(1+\mu)^3\cdot\theta^3-\&c.$$

$$\log.\ (1+\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\theta)=\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\theta-\tfrac{1}{2}\cdot(\frac{1+\mu}{\mu})^2\cdot\theta^2+\tfrac{1}{3}\cdot(\frac{1+\mu}{\mu})^3\cdot\theta^3-\&c.$$

d'où en ſubſtituant au lieu de p, $\frac{1}{\alpha}$, & au lieu de q, $\frac{\mu}{\alpha}$, on tire

$$\log.\ \{[1-\frac{(1+\mu)}{\mu}\cdot\theta]^p\cdot(1+\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\theta)^q\}=-\frac{(1+\mu)^3}{2\mu}\cdot\frac{\theta^2}{\alpha}-\frac{(\mu-1)\cdot(1+\mu)^4}{3\mu^2}\cdot\frac{\theta^3}{\alpha}-\&c.$$

Partant,

$$[1-(1+\mu)\theta]^p\cdot(1+\frac{1+\mu}{\mu}\cdot\theta)^q=e^{-\frac{(1+\mu)^3}{2\mu}\cdot\frac{\theta^2}{\alpha}-\frac{(\mu-1)\cdot(1+\mu)^4}{3\mu^2}\cdot\frac{\theta^3}{\alpha}-\&c.}$$

θ^2 étant, comme nous l'avons ſuppoſé, beaucoup plus grand que α, & e logarithme hyperbolique de l'unité, étant plus grand que 2, il eſt clair que le ſecond membre de cette équation eſt très-petit, & décroît très-rapidement lorſque α diminue; d'où il ſuit que la quantité

$$[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\cdot(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1},$$

eſt elle-même très-petite, ce qui eſt également vrai de la quantité

$$[1+(1+\mu)\theta]^{p+1}\cdot(1-\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1},$$

dans laquelle ſe change la précédente en faiſant θ négatif.

On voit ainſi que θ reſtant le même, quelque petit qu'il ſoit d'ailleurs, la différence de P à l'unité, devient d'autant moindre que α diminue, non-ſeulement parce que le facteur $\alpha^{\frac{1}{2}}$ qui multiplie cette différence diminue, mais encore parce que le facteur

$$[1-(1+\mu)\theta]^{p+1}\cdot(1+\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q+1}$$

$$+[1+(1+\mu)\theta]^{p\pm 1}\cdot(1-\frac{1+\mu}{\mu}\theta)^{q\pm 1},$$

eſt très-petit, & diminue avec une grande rapidité; & il eſt viſible que l'on peut tellement augmenter p & q, & par conſéquent diminuer α, que cette différence de P à l'unité ſoit moindre qu'aucune grandeur donnée; ce qui eſt le théorème dont nous avons parlé au commencement de cet article.

X I X.

Un des principaux avantages de la théorie précédente, eſt de fournir une ſolution directe & générale d'un Problème intéreſſant dont l'objet eſt le plus ou moins de facilité des naiſſances des garçons & des filles dans les différens climats. On a obſervé qu'à Paris & à Londres, il naît conſtamment chaque année plus de garçons que de filles, & quoique la différence ſoit peu conſidérable, il ſeroit aſſez extraordinaire que cela fût l'effet du haſard, & il eſt bien plus naturel de penſer qu'en France & en Angleterre, la Nature favoriſe plus la naiſſance des garçons que celle des filles. A la vérité, les naiſſances obſervées pendant quatre ou cinq ans dans quelques petites villes de France, ſemblent y indiquer une moindre facilité pour la naiſſance des garçons que pour celle des filles; mais il eſt très-poſſible que ſur un petit nombre de naiſſances, tel que quatre ou cinq cents, il y ait plus de filles que de garçons, quoique la facilité de la naiſſance de ceux-ci ſoit plus grande; il faut employer à cette recherche délicate, de beaucoup plus grands nombres, vu ſur-tout le peu de différence qui exiſte entre les facilités des naiſſances des garçons & des filles; & ce n'eſt que lorſqu'on ſera bien aſſuré que le nombre obſervé des naiſſances dans un lieu quelconque, indique avec une très-grande probabilité, que les naiſſances des garçons y ſont moins poſſibles que celles des filles, qu'il ſera permis de rechercher la cauſe de ce phénomène: la méthode de l'*article précédent*, donne un moyen fort ſimple pour obtenir cette probabilité, lorſqu'on a un nombre ſuffiſant de naiſſances; nous allons l'appliquer à celles qui ont été obſervées

à Paris, & déterminer combien il eſt probable que les naiſſances des garçons dans cette grande ville, ſont plus poſſibles que celles des filles.

Pour cela, nous ferons uſage des naiſſances qui ont eu lieu depuis 1745 juſqu'en 1770, & dont on peut voir la liſte dans nos Mémoires pour l'année 1771, *page 857*. En raſſemblant toutes ces naiſſances, on trouve que dans l'eſpace de ces vingt-ſix années, il eſt né à Paris 251527 garçons, & 241945 filles, ce qui donne à très-peu près $\frac{105}{101}$ pour le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles : cela poſé, la probabilité que la poſſibilité de la naiſſance d'un garçon eſt égale ou moindre que $\frac{1}{2}$, eſt par l'*article précédent*, égale à $\frac{\int y \partial x}{k}$, l'intégrale $\int y \partial x$ étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \frac{1}{2}$; d'ailleurs cette intégrale priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \frac{1}{1+\mu} - \theta$, & diviſée par k, eſt par le même article, égale à

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \mu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi)} \cdot (1+\mu)^{\frac{3}{2}} \cdot \theta} \cdot [1-(1+\mu)\theta]^{p+1} \cdot [1+(\frac{1+\mu}{\mu}) \cdot \theta]^{q+1}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha \cdot \frac{[12\mu^2 + (1+\mu)^2 \cdot (1+\mu+\mu^2) \cdot \theta^2]}{12\mu \cdot (1+\mu)^3 \cdot \theta^2} \\ + \alpha^2 \cdot \&c. \end{array} \right\}$$

en ſuppoſant donc $\frac{1}{1+\mu} - \theta = \frac{1}{2}$, & par conſéquent $\theta = \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$, on a pour l'expreſſion de la probabilité que x eſt égal ou moindre que $\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{(\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu) \cdot \pi})}}{1-\mu} \cdot (\frac{1+\mu}{2})^{p+1} \cdot (\frac{1+\mu}{2\mu})^{q+1}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha \cdot \frac{[48 \cdot \mu^2 + 3\mu \cdot (1-\mu)^2 + (1-\mu)^4}{12\mu \cdot (1+\mu) \cdot (1-\mu)^2} \\ + \alpha^2 \cdot \&c. \end{array} \right\}$$

Dans le cas préſent,

$$p = 251527,$$
$$q = 241945,$$
$$\mu = \frac{q}{p} = 0,9619047,$$
$$\alpha = \frac{1}{p} = \frac{1}{251527},$$

ce qui donne à peu-près $\theta^2 = 24$, en ſorte que la ſérie

$$1 - \alpha \cdot \frac{[48 \cdot \mu^2 + 3\mu \cdot (1-\mu)^2 + (1-\mu)^4]}{12\mu \cdot (1+\mu) \cdot (1-\mu)^2} + \alpha^2 \cdot \&c.$$

eſt très-convergente, & l'on trouve par le calcul, que le ſecond terme eſt environ $\frac{1}{200}$; on peut ainſi s'en tenir au premier terme : or on a en logarithmes des Tables,

$$\log. \frac{\sqrt{\left(\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu)\cdot\pi}\right)}}{1-\mu} = \overline{2},4660039,$$

le nombre $\overline{2}$ indiquant une caractériſtique négative; on a enſuite, en portant la préciſion juſqu'à douze décimales,

$$\log. p = 5,400584610947,$$
$$\log. q = 5,383716651469,$$
$$\log. (p+q) = 5,693262515480,$$
$$\log. 2 = 0,301029995664;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left(\frac{p+q}{p}\right)^{p+1} = 73616,6879714,$$
$$\log. \left(\frac{p+q}{q}\right)^{p+1} = 74893,3836139,$$
$$\text{logarithme } 2^{p+q+2} = 148550,4760803.$$

Partant,

$$\log. \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1} \cdot \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{2\alpha\mu}{(1+\mu)\cdot\pi}\right)}}{1-\mu} = \overline{42},0615089.$$

En repaſſant des logarithmes aux nombres, on aura pour la probabilité que x eſt égal ou moindre que $\frac{1}{2}$, une fraction dont le numérateur eſt peu différent de l'unité & égal à 1,1521, & dont le dénominateur eſt la ſeptième puiſſance d'un million; cette fraction eſt même un peu trop grande, & comme elle eſt d'une petiteſſe exceſſive, on peut regarder comme auſſi certain qu'aucune autre vérité morale, que la différence obſervée à Paris entre les naiſſances des garçons & celles des filles, eſt dûe à une plus grande poſſibilité dans la naiſſance des garçons. On voit au reſte que la petiteſſe de la fraction précédente vient principalement du facteur

$$\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{p+1} \cdot \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{q+1},$$

ce qui confirme ce que nous avons dit dans l'*article précédent* ſur la convergence de la valeur de P vers l'unité.

On a obſervé que dans l'intervalle des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis 1664 juſqu'en 1757, il eſt né à Londres 737629 garçons & 698958 filles, ce qui donne environ $\frac{19}{18}$ pour le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles; ce rapport étant plus grand que celui de 105 à 101 qui a lieu à Paris, & le nombre des naiſſances obſervées à Londres étant plus conſidérable, on trouveroit pour cette ville une plus grande probabilité que les naiſſances des garçons ſont plus poſſibles que celles des filles; mais lorſque les probabilités diffèrent auſſi peu de l'unité, elles peuvent être cenſées égales & ſe confondre avec la certitude.

XX.

La conſtance avec laquelle les naiſſances des garçons à Paris, l'ont emporté chaque année ſur celles des filles depuis 1745 juſqu'en 1770, eſt encore un de ces phénomènes que l'on ne peut attribuer au haſard. Déterminons ſa probabilité en partant des données précédentes; pour cela, ſoit $2a$ le nombre moyen des naiſſances des garçons & des filles dans l'eſpace d'une année; ſuppoſons de plus que ſur

ce nombre, il y ait m garçons, & par conséquent $2a - m$ filles; la formule (θ) de l'*article XVII* donnera pour la probabilité P de cet évènement,

$$P = \frac{1.2.3\ldots\ldots 2a}{1.2.3\ldots\ldots(p+q+2a+1)} \cdot \frac{1.2.3\ldots\ldots(p+q+1)}{1.2.3\ldots\ldots p.1.2.3\ldots\ldots q}$$
$$\times \frac{1.2.3\ldots\ldots(q+2a-m)}{1.2.3\ldots\ldots(2a-m)} \cdot \frac{1.2.3\ldots\ldots(p+m)}{1.2.3\ldots\ldots m};$$

on aura donc la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront point sur celles des filles, en prenant la somme de toutes les valeurs de P, depuis $m = 0$ jusqu'à $m = a$. Soit

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(q+2a-m).1.2.3\ldots\ldots(p+m)}{1.2.3\ldots\ldots(2a-m).1.2.3\ldots\ldots m} = y_m,$$

& cherchons l'intégrale finie $\Sigma . y_m$, depuis $m = 0$ jusqu'à $m = a$, la caractéristique Σ servant à désigner les intégrales finies; on a visiblement

$$y_m = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)} . y_{m+1};$$

donc

$$y_m . \left\{1 - \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)}\right\} = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{(2a-m).(p+m+1)} . \Delta . y_m;$$

ou

$$y_m = \frac{(m+1).(q+2a-m)}{2ap-p-m(p+q)} . \Delta . y_m,$$

la caractéristique Δ étant celle des différences finies. Supposons généralement

$$y_m = z_m . \Delta . y_m,$$

nous aurons en intégrant,

$$\Sigma . y_m = y_m . z_{m-1} - \Sigma . (y_m . \Delta . z_{m-1}):$$

or si l'on substitue pour y_m, sa valeur $z_m . \Delta . y_m$, on a

$$\Sigma . (y_m . \Delta . z_{m-1}) = \Sigma (z_m . \Delta . z_{m-1} . \Delta . y_m)$$
$$= y_m . z_{m-1} . \Delta . z_{m-2} - \Sigma [y_m . \Delta . (z_{m-1} \Delta . z_{m-2})];$$

pareillement,

$$\Sigma \cdot [y_m \cdot \Delta (z_{m-1} \cdot \Delta \cdot z_{m-2})]$$

$$= y_m \cdot z_{m-1} \cdot \Delta \cdot (z_{m-2} \cdot \Delta \cdot z_{m-3}) - \Sigma \{y_m \cdot \Delta \cdot [z_{m-1} \cdot \Delta \cdot (z_{m-2} \cdot \Delta \cdot z_{m-3})]\},$$

& ainsi de suite; on aura donc

$$\Sigma . y_m = C + y_m \cdot z_{m-1} \cdot \{1 - \Delta . z_{m-2} + \Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3}) - \Delta . [z_{m-2} . \Delta . (z_{m-3} . \Delta . z_{m-4})] + \&c.\}; \quad (\gamma)$$

C étant une constante arbitraire. Cette suite est dans les différences finies, ce qui est la suite (λ) de l'*article XVIII*, dans les différences infiniment petites: pour déterminer dans quel cas elle est convergente, nous observerons que si la dimension de z_{m-1}, en p, q, a & m, est r, celle de $\Delta . z_{m-2}$ sera $r - 1$; celle de $\Delta . (z_{m-2} . \Delta . z_{m-3})$ sera $2r - 2$, & ainsi du reste: or la convergence de la série exige que ces dimensions aillent en diminuant, ce qui suppose que r est moindre que l'unité. Dans la question présente où $z_{m-1} = \frac{m . (q + 2a + 1 - m)}{2ap + q - m(p + q)}$, les dimensions du numérateur & du dénominateur sont égales à 2, & par conséquent $r = 0$; la suite sera donc convergente, pourvu que le dénominateur ne soit pas extrêmement petit, c'est-à-dire que $\frac{m - 1}{2a - m}$ diffère sensiblement de $\frac{p}{q}$; or c'est ce qui a lieu, lorsque m est égal ou moindre que a, p étant supposé plus grand que q.

On peut mettre la quantité $\frac{m . (q + 2a + 1 - m)}{2ap + q - m(p + q)}$ sous cette forme $E + Fm + \frac{G}{2ap + q - m(p + q)}$, en faisant

$$E = \frac{-q . (p + q) - 2aq - p}{(p + q)^2},$$

$$F = \frac{1}{p + q};$$

$$G = \frac{(2ap + q) . [q . (p + q) + 2aq + p]}{(p + q)^2},$$

on aura ainſi

$$\Delta . z_{m-2} = F + \frac{G . (p+q)}{[2ap+q-m(p+q)] . [2ap+p+2q-m(p+q)]};$$

or F & G étant poſitifs, il eſt clair que $\Delta . z_{m-2}$ eſt toujours poſitif tant que $\frac{m-1}{2a-m}$ eſt moindre que $\frac{p}{q}$; on voit de plus que dans ce cas, $z_{m-1} . \Delta . z_{m-2}$, va toujours en augmentant, en ſorte que $\Delta . (z_{m-1} . \Delta . z_{m-2})$ eſt encore une quantité poſitive; donc $\Sigma . y_m$ étant égal à $y_m . z_{m-1} - \Sigma . (y_m . \Delta . z_{m-1})$, eſt moindre que $H + y_m . z_{m-1}$, H étant une arbitraire; pareillement $\Sigma . (y_m . \Delta . z_{m-1})$ étant égal à $y_m . z_{m-1} . \Delta . (z_{m-2}) - \Sigma . [y_m . \Delta . (z_{m-1} . \Delta . z_{m-2})]$, eſt moindre que $H' + y_m . z_{m-1} . \Delta . z_{m-2}$, H' étant une nouvelle arbitraire; donc l'intégrale $\Sigma . y_m$ eſt moindre que $C + y_m . z_{m-1}$, & plus grande que

$$C + y_m . z_{m-1} . (1 - \Delta . z_{m-1}).$$

Si l'on détermine au moyen de la formule (γ), l'intégrale $\Sigma . y_m$ depuis $m = 0$ juſqu'à $m = a$, la conſtante C ſera nulle; ſi l'on ſuppoſe enſuite qu'il naît 20000 enfans chaque année, ce qui donne $a = 10000$, on trouvera en employant pour p & q, les valeurs de l'*article précédent* relatives à Paris,

$$z_{a-1} = 26{,}22,$$

$$z_{a-2} = 26{,}09.$$

Partant, $\quad \Delta . z_{a-1} = 0{,}13;$

on aura ainſi $\quad \Sigma . y_m < 26{,}22 . y_a,$

& $\quad \Sigma . y_m > 26{,}22 . y_a . (1 - 0{,}13);$

en faiſant donc $\quad \Sigma . y_m = 26{,}22 . y_a,$

cette valeur de $\Sigma . y_m$ ne ſurpaſſera que de $\frac{1}{10}$ environ la véritable valeur; il ſuit de-là que ſi l'on nomme P la probabilité

probabilité que sur vingt mille enfans, il y aura autant de garçons que de filles, la probabilité que le nombre des garçons ne l'emportera pas sur celui des filles, sera un peu plus petite que 26,22 . *P*.

On déterminera la valeur de *P* par la formule (ϖ) de l'*article XVII*; pour cela, on y supposera $m = n = a$, & on la mettra sous cette forme,

$$P = \frac{\gamma \cdot p^a \cdot q^a}{(p+q)^{2a}} \cdot \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{[(p+a) \cdot (q+a)]}}{\sqrt{(pq)} \cdot (p+q+2a)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q(p+q+2a)}\right]^{q+a} \cdot \left[1 - \frac{a(p-q)}{p(p+q+2a)}\right]^{p+a}.$$

On observera ensuite que

$$\gamma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2a}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a)^2};$$

d'où l'on tire, par l'*article XVII*,

$$\gamma = \frac{2^{2a}}{\sqrt{(a\pi)}};$$

on a d'ailleurs,

$$\log. \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)}\right]^{q+a} = (q+a) \cdot \left[\frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot (p-q)^2}{q^2 \cdot (p+q+2a)^2} + \&c.\right]$$

$$\log. \left[1 - \frac{a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)}\right]^{p+a} = (p+a) \cdot \left[\frac{-a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot (p-q)^2}{p^2 \cdot (p+q+2a)^2} - \&c.\right].$$

a étant peu considérable par rapport à *p*, & *p* différant peu de *q*, ces suites sont très-convergentes, & l'on peut s'en tenir aux deux premiers termes; en ajoutant donc ces logarithmes, on aura

$$\log. \left[1 + \frac{a \cdot (p-q)}{q \cdot (p+q+2a)}\right]^{q+a} \cdot \left[1 - \frac{a \cdot (p-q)}{p \cdot (p+q+2a)}\right]^{p+a}$$
$$= a^2(p-q)^2 \cdot \left[\frac{1}{pq \cdot (p+q+2a)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 q + q^2 p + a(p^2+q^2)}{p^2 q^2 \cdot (p+q+2a)^2}\right].$$

On peut supposer à très-peu près $a(p^2 + q^2) = 2apq$, ce qui réduit le second membre de l'équation précédente à $\frac{a^2(p-q)^2}{2pq \cdot (p+q+2a)}$; ce logarithme est hyperbolique, &

pour le convertir en logarithme des Tables, il faut, comme l'on fait, le multiplier par 0,43429448. En appliquant des nombres à ces formules, on trouvera que le logarithme tabulaire de $\left[1 + \frac{a.(p-q)}{p.(p+q+2a)}\right]^{q+a} . \left[1 - \frac{a.(p-q)}{p.(p+q+2a)}\right]^{p+a}$ eſt 0,0638041 ; on a enſuite, en portant la préciſion jusqu'à dix décimales,

$$\log. 2 = 0{,}3010299957,$$

$$\log. p = 5{,}4005846109,$$

$$\log. q = 5{,}3837166515,$$

$$\log. (p+q) = 5{,}6932625156;$$

ce qui donne

$$\log. \frac{p^a \cdot q^a}{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2a}} = \bar{2}{,}3622260;$$

de plus,

$$\log. \sqrt{(a\pi)} = 2{,}2485750,$$

$$\log. \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}} . \sqrt{[(p+a).(q+a)]}}{\sqrt{(pq)}.(p+q+2a)^{\frac{3}{2}}} = \bar{1}{,}9913791;$$

on aura donc

$$\log. P = \bar{4}{,}1688342;$$

d'où l'on tire

$$26{,}22 . P = 0{,}0038678 = \frac{1}{259}.$$

La probabilité que dans une année les naiſſances des garçons ne ſeront pas en plus grand nombre à Paris que celles des filles, eſt donc moindre que $\frac{1}{259}$; or en la ſuppoſant égale à cette fraction, on aura à très-peu près le nombre d'années dans leſquelles on peut parier un contre un que cela n'arrivera pas, en multipliant ſon dénominateur 259 par le logarithme hyperbolique de 2, c'eſt-à-dire, par 0,6931472, ce qui donne pour produit 179: on peut donc parier avec avantage un contre un, que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de cent ſoixante-dix-neuf années.

Relativement à Londres, $p = 737629$,
& $q = 698958$,
ce qui donne $z_{a-1} = 18,3000$,
& $\Delta . z_{a-1} = 0,0694$;

en sorte que si l'on suppose la probabilité que les naissances des garçons ne l'emporteront pas sur celles des filles égale à $18,3 . P$, cette probabilité ne surpassera que d'un quinzième environ la véritable; on trouve ensuite

$$\log. \left[1 + \frac{a.(p-q)}{q.(p+q+2a)}\right]^{q+a} . \left[1 - \frac{a.(p-q)}{p.(p+q+2a)}\right]^{p+a} = 0,0432414;$$

$$\log. \frac{(p+q)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{[(p+a).(q+a)]}}{\sqrt{(p\,q)} . (p+q+2a)^{\frac{1}{2}}} = \bar{1},9970020.$$

On a de plus, en portant la précision jusqu'à dix décimales,

$$\log. p = 5,8678379827,$$
$$\log. q = 5,8444510800,$$
$$\log. (p+q) = 6,1573319321;$$

d'où l'on tire

$$\log. \frac{p^a . q^a}{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2a}} = \bar{4},8518990;$$

on aura donc

$$\log. P = \bar{6},6435674;$$

partant,

$$18,3 . P = 0,000080541 = \frac{1}{12416};$$

la probabilité que les naissances des garçons à Londres ne l'emporteront pas sur celles des filles dans une année déterminée, est donc un peu moindre que $\frac{1}{12416}$, en sorte que l'on peut parier avec avantage 1 contre 1 que cela n'arrivera pas dans l'intervalle de huit mille six cents cinq années; ce

phénomène eſt, comme l'on voit, beaucoup moins probable à Londres qu'à Paris, ce qui vient de ce que dans la première de ces villes, le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles eſt plus conſidérable.

X X I.

La théorie précédente ſuppoſe que l'on connoît le nombre de fois que chaque évènement ſimple eſt arrivé; mais quoique cette ſuppoſition s'étende à un grand nombre de Problèmes intéreſſans, cependant elle n'eſt encore qu'un cas particulier de cette partie de l'analyſe des haſards, qui conſiſte à remonter des évènemens aux cauſes. Nous allons expoſer dans les articles ſuivans, une méthode générale pour déterminer les poſſibilités des évènemens ſimples, quel que ſoit l'évènement compoſé dont on a obſervé l'exiſtence.

Conſidérons d'abord deux Joueurs A & B, jouant aux mêmes conditions que dans l'*article III,* c'eſt-à-dire que A ayant m jetons au commencement de chaque partie, B en ait $n - m$; qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à ſon adverſaire, & que la partie ne doive finir que lorſque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre. Suppoſons enſuite qu'ils aient joué de cette manière un très-grand nombre de parties dont p aient été gagnées par A & q par $B,$ & que l'on veuille déterminer leurs adreſſes reſpectives, ou ce qui revient au même, leur probabilité de gagner un ſeul coup; il eſt clair que le nombre des coups gagnés ou perdus par chaque Joueur eſt inconnu, puiſque chaque partie peut être compoſée d'un nombre plus grand ou moindre de coups; on ignore donc ici le nombre de fois que chaque évènement ſimple eſt arrivé; mais il eſt facile d'étendre à ce cas & à tous les autres ſemblables, la théorie des *articles précédens,* en obſervant que ſi p & q ſont de très grands nombres, les probabilités des deux Joueurs A & B pour gagner une partie, ſeront à très-peu près dans le rapport de ces nombres : or ces probabilités étant connues, on aura facilement leurs adreſſes reſpectives, ou leurs probabilités

de gagner un ſeul coup; car en nommant X la probabilité du Joueur A pour gagner une partie, & x ſon adreſſe, on a par l'*article III*,

$$X = \frac{1 - \left(\frac{1 - x}{x}\right)^m}{1 - \left(\frac{1 - x}{x}\right)^n}.$$

La ſeule racine utile de cette équation eſt celle qui eſt poſitive & moindre que l'unité; or il eſt aiſé de voir *a priori* qu'il ne peut y en avoir qu'une qui ſatisfaſſe à ces conditions, puiſque l'adreſſe x ne peut augmenter ou diminuer ſans que la probabilité X augmente ou diminue; la valeur de x que l'on tirera de cette équation jouira donc du même degré de probabilité que X: or ſi l'on ſuppoſe p & q très-conſidérables, il ſera extrêmement probable, par l'*article XVIII*, que X diffère très-peu de $\frac{p}{p + q}$; donc ſi l'on nomme a la racine poſitive & moindre que l'unité de l'équation

$$o = qx^n + p.(1 - x)^n - (p + q)x^{n-m}.(1 - x)^m; (a)$$

il ſera très-probable que l'adreſſe x eſt très-approchante de a, en ſorte que ſi p & q étoient infinis, il ſeroit infiniment probable que la différence de x & de a eſt moindre qu'aucune grandeur donnée. Cette valeur de x a d'ailleurs l'avantage de nous faire connoître le rapport des coups gagnés aux coups perdus par le Joueur A; car ſi l'on nomme r le nombre des premiers, & s celui des ſeconds, l'adreſſe x doit être très-peu différente de $\frac{r}{r + s}$, en ſorte que l'on a à très-peu près $\frac{r}{r + s} = a$; d'où l'on tire $\frac{r}{s} = \frac{a}{1 - a}$.

Suppoſons encore que A & B ont joué p parties avec la condition précédente, & q parties dans leſquelles A avoit m' jetons & B $n' - m'$, au commencement de chaque partie. Suppoſons enſuite que ſur ces $p + q$ parties, A en a gagné r; cela poſé, pour déterminer les adreſſes de ces

Joueurs, nous nommerons x celle de A, & v le nombre inconnu de parties qu'il a gagnées sur les p premières; l'équation (a) donnera dans ce cas,

$$o = (p - v)x^n + v(1 - x)^n - px^{n-m}(1 - x)^m.$$

Le nombre des parties que ce Joueur a gagnées sur les q dernières, est $r - v$; on aura donc encore, en vertu de l'équation (a),

$$o = (q - r + v) . x^{n'} + (r - v) . (1 - x)^{n'} - q . x^{n' - m'} . (1 - x)^{m'};$$

En éliminant v de ces deux équations, on aura une équation en x, dont la racine positive & moindre que l'unité, est celle qu'il faut choisir; or on prouvera comme ci-dessus, qu'il ne peut y en avoir qu'une de cette nature. Si l'on nomme a cette racine, $\frac{a}{1 - a}$ sera à très-peu-près le rapport du nombre des coups gagnés au nombre des coups perdus par le Joueur A; on aura ensuite

$$\frac{v}{p} = a^{n-m} . \frac{[a^m - (1 - a)^m]}{a^n - (1 - a)^n},$$

& ce sera le rapport du nombre des premières parties gagnées par le Joueur A, au nombre total p de ces parties.

XXII.

VOICI maintenant une méthode directe & générale pour déterminer les possibilités des évènemens simples, quel que soit l'évènement observé.

Si l'on désigne par x & $1 - x$ les possibilités des deux évènemens simples, & que l'on cherche par les règles ordinaires de l'analyse des hasards, la probabilité de l'évènement composé dont il s'agit; on aura pour son expression une fonction de x, multipliée par un coëfficient constant quelconque: si l'on nomme y cette fonction, & a la valeur de x, positive & moindre que l'unité qui la rend un *maximum*, non-seulement cette valeur sera la plus probable, mais elle

ſera encore très-approchante de la véritable poſſibilité x; par exemple, ſi l'évènement obſervé eſt la naiſſance de p garçons & de q filles, ſur $p + q$ enfans; en nommant x la poſſibilité de la naiſſance d'un garçon, & par conſéquent $1 - x$ celle de la naiſſance d'une fille, on aura

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q} . x^p . (1 - x)^q,$$

pour la probabilité de cet évènement; dans ce cas, $y = x^p (1 - x)^q$, & ſon *maximum* a lieu lorſque $x = \frac{p}{p+q}$; cette valeur de x eſt donc à très-peu près la véritable poſſibilité de la naiſſance d'un garçon, lorſque p & q ſont de très-grands nombres.

Suppoſons encore que l'on tire trois boules d'une urne qui renferme une infinité de boules blanches & noires dans une proportion inconnue, & que A & B jouent à cette condition que A gagnera la partie ſi ſur ces trois boules il y a plus de blanches que de noires, & qu'il la perdra s'il y a plus de noires que de blanches. Suppoſons enſuite que ſur $p + q$ parties, A en ait gagné p & perdu q; cela poſé, ſi l'on nomme x la probabilité d'amener une boule blanche, on aura $x^2 (3 - 2x)$ pour l'expreſſion de la probabilité que A gagnera une partie, & $(1 - x)^2 (1 + 2x)$ pour la probabilité qu'il la perdra; la probabilité de l'évènement obſervé ſera donc

$$\frac{1.2.3\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q} . x^{2p} (3 - 2x)^p . (1 - x)^{2q} . (1 + 2x)^q;$$

dans ce cas,

$$y = x^{2p} . (3 - 2x)^p . (1 - x)^{2q} . (1 + 2x)^q,$$

& ſon *maximum* donne

$$0 = p.(1 - x)^2 . (1 + 2x) - qx^2 . (3 - 2x);$$

d'où il ſuit que ſi l'on nomme a la racine poſitive & moindre que l'unité de cette équation, le rapport des boules blanches aux boules noires de l'urne ſera à très-peu près égal à $\frac{a}{1 - a}$.

Le *maximum* de y n'indique d'une manière approchée, la véritable valeur de x, qu'autant que les valeurs de y voiſines de ce *maximum*, ſont incomparablement plus grandes que les autres; car il eſt viſible que l'intégrale $\int y \partial x$ priſe dans un très-petit intervalle de part & d'autre de ce *maximum*, eſt alors très-approchante de cette même intégrale priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$: or le rapport de la première de ces intégrales à la ſeconde, exprime la probabilité que la valeur de x eſt compriſe dans cet intervalle. Les valeurs de y voiſines du *maximum*, ſurpaſſeront conſidérablement les autres, lorſque y aura des facteurs élevés à de grandes puiſſances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant un coëfficient très-petit & d'autant moindre, que l'évènement obſervé eſt plus compoſé: ſi l'on prend dans ce cas, le rapport de ∂y à $y \partial x$, on ſera conduit à une équation de cette forme $\frac{\partial y}{y \partial x} = \frac{1}{\alpha z}$, z étant une fonction de x, qui ne renferme plus de puiſſances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$; ainſi, toutes les fois que l'on parviendra à une équation ſemblable, les valeurs de x décroîtront avec une grande rapidité en s'éloignant du *maximum*, & la valeur de x, correſpondante à ce *maximum*, ſera très-approchante de la véritable.

On voit par-là, que les évènemens compoſés ne ſont pas tous propres à faire connoître les poſſibilités des évènemens ſimples; par exemple, A & B jouant aux mêmes conditions que dans l'*article III*, ſi A gagne la partie; en nommant x ſon adreſſe, on aura $\frac{1 - \left(\frac{1 - x}{x}\right)^m}{1 - \left(\frac{1 - x}{x}\right)^n}$ pour la probabilité de

cet

cet évènement : or si l'on suppose m & n de très-grands nombres, l'évènement observé sera composé d'un grand nombre de coups; mais comme les valeurs de y correspondantes à x plus grand que $\frac{1}{2}$, sont très-peu différentes de l'unité, cet évènement ne peut faire connoître d'une manière approchée, la valeur de x; tout ce que l'on en peut conclure, c'est qu'il est extrêmement probable que A est plus fort que B, parce que les valeurs de y correspondantes à x plus petit que $\frac{1}{2}$, sont incomparablement moindres que les autres.

XXIII.

La connoissance des valeurs approchées des possibilités des évènemens simples qui résultent d'un évènement composé, seroit très-imparfaite, si l'on n'étoit pas en état d'apprécier combien il est probable qu'en prenant pour ces valeurs celles qui répondent au *maximum* de y, on ne se trompera pas soit en *plus*, soit en *moins*, d'une quantité donnée; pour cela, il est nécessaire, comme on l'a vu dans l'*article XVIII*, de déterminer le rapport de l'intégrale $\int y\partial x$ prise dans un petit intervalle de part & d'autre de ce *maximum*, à cette même intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; & c'est ce que nous avons fait dans l'article cité, pour le cas où $y = x^p.(1 - x)^q$, p & q étant de très-grands nombres. Nous allons présentement généraliser ces recherches, & les étendre à toutes les valeurs de y, qui conduisent à une équation de cette forme,

$$y\partial x = \alpha z\partial y,$$

z étant une fonction de x, qui ne renferme point de puissances de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$.

Reprenons l'équation (λ) de l'*article XVIII*,

$$\int y\partial x = C + \alpha yz.\left\{1 - \alpha.\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha^2.\frac{\partial(z\partial z)}{\partial x^2} - \alpha^3.\frac{\partial[z\partial(z\partial z)]}{\partial x^3} + \&c.\right\}; \quad (\lambda)$$

ſi l'on nomme

a la valeur de x correſpondante au *maximum* de y;

Y & Z les valeurs de x & de z, correſpondantes à $x = a - \theta$;

Y' & $- Z'$ les valeurs de ces mêmes quantités correſpondantes à $x = a + \theta$;

ſi l'on obſerve d'ailleurs que les deux évènemens ſimples étant ſuppoſés avoir eu lieu, on a $y = 0$ lorſque $x = 0$, & lorſque $x = 1$; l'intégrale $\int y \partial x$ priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = a - \theta$, ſera

$$\alpha YZ . \{1 + \alpha . \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \alpha^2 . \frac{\partial (Z \partial Z)}{\partial \theta^2} + \&c.\};$$

cette même intégrale priſe depuis $x = a + \theta$ juſqu'à $x = 1$, ſera

$$\alpha Y' Z' . \{1 - \alpha . \frac{\partial Z'}{\partial \theta} + \alpha^2 . \frac{\partial (Z' \partial Z')}{\partial \theta^2} - \&c.\}.$$

En nommant donc k l'intégrale $\int y \partial x$ priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, on aura cette même intégrale priſe depuis $x = a - \theta$ juſqu'à $x = a + \theta$, en retranchant de k les deux intégrales précédentes; en diviſant enſuite ce reſte par k, on aura la probabilité que x ſera compris dans cet intervalle; cette probabilité ſera par conſéquent égale à

$$1 - \frac{\alpha YZ}{k} . \{1 + \alpha . \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \alpha^2 . \frac{\partial (Z \partial Z)}{\partial \theta^2} + \alpha^3 . \frac{\partial [Z \partial (Z \partial Z)]}{\partial \theta^3} + \&c.\}$$
$$- \frac{\alpha Y' Z'}{k} . \{1 - \alpha . \frac{\partial Z'}{\partial \theta} + \alpha^2 . \frac{\partial (Z' \partial Z')}{\partial \theta^2} - \alpha^3 . \frac{\partial [Z' \partial (Z' \partial Z')]}{\partial \theta^3} + \&c.\}$$

la queſtion ſe réduit ainſi à déterminer k. Nous y ſommes parvenus dans l'*article XVIII* où $y = x^p (1 - x)^q$, au moyen du beau théorème de M. Stirling ſur la valeur du produit $1 . 2 . 3 \ldots u$, lorſque u eſt un très-grand nombre; mais ce procédé eſt indirect, & il eſt naturel de penſer qu'il exiſte une méthode pour déterminer directement k, quel que ſoit y, & dont ce théorème eſt un corollaire: celle que je vais

exposer m'a paru remplir cet objet de la manière la plus générale.

Puisque la valeur de y conduit, par la supposition, à une équation de cette forme $y\partial x = \alpha z \partial y$; on a $\log. y = \frac{1}{\alpha} . \int \frac{\partial x}{z}$, en sorte que $\log. y$ est très-grand & de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$; d'ailleurs a étant la valeur de x correspondante au *maximum* de y, si l'on fait $x = a + \theta$, & que l'on nomme A la plus grande valeur de y, ou sa valeur lorsque $\theta = 0$, on aura en réduisant en série,

$$\alpha . \log. y = \alpha . \log. A - \theta^2 . (f + f' \theta + f'' . \theta^2 + \&c.),$$

le terme multiplié par θ disparoissant, parce que l'équation $x = a$ ou $\theta = 0$, rend y un *maximum*; on aura ainsi

$$y = A . e^{-\frac{\theta^2}{\alpha} . (f + f'\theta + f''\theta^2 + \&c.)}$$

$$\& \quad \int y \partial x = A . \int \partial\theta . e^{-\frac{\theta^2}{\alpha} . (f + f'\theta + \&c.)};$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Soit

$$\theta^2 . (f + f'\theta + f''\theta^2 + \&c.) = \alpha t^2,$$

ou ce qui revient au même,

$$\log. A - \log. y = t^2,$$

on aura par la méthode du retour des suites,

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} t . \{ h + h^{(1)} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + h^{(2)} . \alpha t^2 + h^{(3)} . \alpha^{\frac{3}{2}} t^3 + \&c. \}$$

partant

$$\partial\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} \partial t . \{ h + 2 h^{(1)} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + 3 h^{(2)} . \alpha t^2 + \&c. \}$$

ce qui donne

$$\int y \partial x = \alpha^{\frac{1}{2}} . A . \int \partial t . e^{-t^2} . \{ h + 2 h^{(1)} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + 3 h^{(2)} . \alpha t^2 + \&c. \} = k.$$

L'intégrale $\int y \partial x$ doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$: or x étant nul, on a $y = 0$, & $\log. y = -\infty$; donc $t^2 = \infty$. Lorsque $x = a$, on a $\theta = 0$; partant $t = 0$; d'ailleurs lorsque θ change de signe, t en change pareillement, en sorte que les valeurs de t, correspondantes à celles de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, ont un signe différent de celles qui correspondent aux valeurs de x, depuis $x = a$, jusqu'à $x = 1$; or x étant 1, on a $y = 0$, ce qui donne $t^2 = \infty$; les valeurs de t s'étendent conséquemment depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Dans ce cas, on a $\int t^{2n-1} \partial t . e^{-t^2} = 0$, parce que $t^{2n-1} . e^{-t^2}$ se changeant en $-t^{2n-1} e^{-t^2}$ lorsque t est négatif, la somme de ces deux quantités est nulle; on a par une raison semblable,

$$\int t^{2n} \partial t . e^{-t^2} = 2 \int t^{2n} \partial t . e^{-t^2},$$

la seconde intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$; or cette supposition donne

$$\int t^{2n} . \partial t . e^{-t^2} = \frac{2n-1}{2} . \int t^{2n-2} . \partial t . e^{-t^2};$$

pareillement

$$\int t^{2n-2} . \partial t . e^{-t^2} = \frac{2n-3}{2} . \int t^{2n-4} . \partial t . e^{-t^2},$$

& ainsi de suite; donc

$$\int t^{2n} . \partial t . e^{-t^2} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2^n} . \int \partial t . e^{-t^2};$$

on aura ainsi

$$k = 2 . \alpha^{\frac{1}{2}} . A . [h + 1.3.\alpha . \frac{h^{(2)}}{2} + 1.3.5.\alpha^2 . \frac{h^{(4)}}{2^2} + 1.3.5.7.\alpha^3 . \frac{h^{(6)}}{2^3} + \&c.] . \int \partial t . e^{-t^2}:$$

il ne s'agit donc plus que d'avoir l'intégrale $\int \partial t . e^{-t^2}$ depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. Pour cela, considérons la double intégrale $\int\int \partial s \partial u \, e^{-s(1+uu)}$, & prenons-la depuis $s = 0$

jusqu'à $s = \infty$, & depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$; en l'intégrant d'abord par rapport à s, on aura

$$\int\int \partial s \, \partial u \, . \, e^{-s(1+uu)} = \int \frac{du}{1+uu};$$

or on a, comme on sait,

$$\int \frac{\partial u}{1+uu} = \frac{\pi}{2},$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon; donc

$$\int\int \partial s \, \partial u \, . \, e^{-s(1+uu)} = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on prend cette double intégrale d'abord par rapport à u, en faisant $u \sqrt{(s)} = t$, elle deviendra $\int \frac{\partial s}{\sqrt{(s)}} \, . \, e^{-s} \int dt \, . \, e^{-t^2}$; soit $\int \partial t \, . \, e^{-t^2} = B$, l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, on aura

$$\int\int \partial s \, . \, \partial u e^{-s(1+uu)} = B \, . \int \frac{\partial s}{\sqrt{(s)}} \, . \, e^{-s}:$$

or en faisant $s = s'^2$, on a

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(s)}} \, . \, e^{-s} = 2 \int \partial s' \, . \, e^{-s'^2} = 2 B,$$

l'intégrale étant prise depuis $s' = 0$ jusqu'à $s' = \infty$; donc

$$\int\int \partial s \, . \, \partial u \, . \, e^{-s(1+uu)} = 2 B^2 = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire $B = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi)}$; partant,

$$k = A \sqrt{(\alpha \pi)} \, . \left\{ h + 1 \, . \, 3 \, . \, \frac{\alpha h^{(2)}}{2} + 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, \frac{\alpha^2 h^{(4)}}{2^2} + 1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \, \frac{\alpha^3 h^6}{2^3} + \&c. \right\}; \; (s).$$

Si l'on met l'équation

$$\log. A - \log. y = t^2$$

ſous cette forme,

$$\theta = t \cdot \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\log. A - \log. y}\right)},$$

on aura pour déterminer les coëfficiens h, h'', h^{IV}, &c. de la ſérie

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{2}} t . \{h + h' . \alpha^{\frac{1}{2}} t + h'' . \alpha t^2 + \text{\&c.}\}$$

l'expreſſion générale

$$\alpha^{n + \frac{1}{2}} . h^{(2n)} = \frac{\partial^{2n} . [\theta^{2n+1} . (\log. A - \log. y)^{-n-\frac{1}{2}}]}{1 . 2 . 3 \ldots (2n+1) . \partial\theta^{2n}}; \; (z)$$

pourvu que l'on ſuppoſe $\partial\theta$ conſtant, & $\theta = 0$ après les différentiations. *(Voyez ſur cela les Mémoires de l'Académie pour l'année 1777, page 115).*

Lorſque $n = 0$, on a

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \theta . (\log. A - \log. y)^{-\frac{1}{2}};$$

or

$$\log. y = \log. A + \theta . \frac{\partial y}{y \partial\theta} + \frac{\theta^2}{1 . 2} . \left\{\frac{\partial^2 y}{y \partial\theta^2} - \frac{\partial y^2}{y^2 \partial\theta^2}\right\} + \text{\&c.}$$

y, ∂y, $\partial^2 y$, &c. dans le ſecond membre de cette équation, étant ce que deviennent ces quantités lorſqu'on y ſuppoſe $\theta = 0$; cette ſuppoſition donne

$$y = A \;\&\; \frac{\partial y}{\partial\theta} = 0;$$

on aura donc

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \sqrt{\left\{\frac{2A}{-\frac{\partial\partial y}{\partial\theta^2}}\right\}}.$$

Partant on aura à très-peu près, lorſque α eſt très-petit,

$$k = \frac{A^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{\left(\frac{-\partial\partial y}{\partial\theta^2}\right)}};$$

ou ce qui revient au même,

$$(\int y \partial x)^2 = \frac{2\pi . y^3}{-\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}}; \ (\mu)$$

l'intégrale $\int y\partial x$ étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, & les quantités y & $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$ du second membre de cette équation, étant ce qu'elles deviennent lorsqu'on y suppose $x = a$.

XXIV.

En substituant $a + \theta$, au lieu de x dans log. y, & en réduisant en série, la condition du *maximum* de y fait disparoître la première puissance de θ dans cette série; mais cette condition peut, comme l'on sait, faire disparoître la première, la deuxième & la troisième puissances de θ, ou la première, la deuxième, la troisième, la quatrième & la cinquième puissances, & ainsi de suite, pourvu que le nombre des puissances qui disparoissent soit impair. Voyons ce que devient alors l'intégrale $\int y\partial x$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Supposons que la première, la deuxième & la troisième puissances de θ disparoissent; on aura pour α log. y, une suite de cette forme,

$$\alpha \log. y = \alpha \log. A - \theta^4 . (f + f'\theta + f''\theta^2 + \&c.);$$

donc si l'on fait

$$\theta^4 (f + f'\theta + f''\theta^2 + \&c.) = \alpha t^4,$$

on aura

$$\log. A - \log. y = t^4,$$

&

$$\theta = \alpha^{\frac{1}{4}} t . \{h + h^{(1)} . \alpha^{\frac{1}{4}} . t + h^{(2)} . \alpha^{\frac{1}{2}} . t^2 + h^{(3)} . \alpha^{\frac{3}{4}} . t^3 + \alpha h^{(4)} . t^4 + \&c.\}$$

d'où l'on tire

$$\int y\partial x = \alpha^{\frac{1}{4}} A . \int \partial t . e^{-t^4} . \{h + 2h^{(1)} . \alpha^{\frac{1}{4}} . t + 3h^{(2)} . \alpha^{\frac{1}{2}} . t^2 + \&c.\}$$

On prouvera, comme dans l'*article précédent*, que l'intégrale relative à t, doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; or on a dans ce cas,

$$\int t^{2n-1}\partial t \,.\, e^{-t^4} = 0,$$

& $$\int t^{2n} .\, \partial t \,.\, e^{-t^4} = 2\int t^{2n}\partial t \,.\, e^{-t^4},$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$; si l'on y suppose ensuite $n = 2i$, on aura

$$\int t^{2n}\partial t \,.\, e^{-t^4} = \frac{1.5.9\ldots(4i-3)}{4^i}\int\partial t \,.\, e^{-t^4},$$

& si $n = 2i + 1$, on aura

$$\int t^{2n}\partial t \,.\, e^{-t^4} = \frac{3.7.11\ldots(4i-1)}{4^i}\int t^2\partial t \,.\, e^{-t^4};$$

en supposant donc

$$\int\partial t \,.\, e^{-t^4} = C,$$

$$\int t^2\partial t \,.\, e^{-t^4} = C',$$

on aura

$$\int y\partial x = 2\alpha^{\frac{1}{4}}A.C.\left\{h + \frac{1.5}{4}.\alpha h^{(4)} + \frac{1.5.9}{4^2}.\alpha^2 h^{(8)} + \frac{1.5.9.13}{4^3}.\alpha^3 h^{(12)} + \&c.\right\}$$
$$+ 2\alpha^{\frac{3}{4}}A.C'.\left\{3h^{(2)} + \frac{3.7}{4}.\alpha h^{(6)} + \frac{3.7.11}{4^2}.\alpha^2 h^{(10)} + \frac{3.7.11.15}{4^3}.\alpha^3 h^{(14)} + \&c.\right\}$$

& il est aisé d'en conclure par analogie, les valeurs de $\int y\partial x$ dans le cas où la condition du *maximum* de y feroit disparoître un plus grand nombre de puissances de θ.

Tout se réduit donc à déterminer les valeurs de C & de C': nous observerons d'abord que C étant connu, C' le sera pareillement; car si l'on prend la double intégrale $\int\int\partial s.\partial u e^{-s(1+u^4)}$ depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$, & depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, on aura en intégrant d'abord par rapport à s,

$$\int\int\partial u\partial s e^{-s(1+u^4)} = \int\frac{\partial u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{(2)}}.$$

Si

Si l'on fait ensuite $u\sqrt[4]{(s)} = t$, on aura

$$\int\int \partial s . \partial u e^{-s(1+u^4)} = \int \frac{\partial s}{\sqrt[4]{(s)}} . e^{-s} . \int \partial t e^{-t^4} = C . \int \frac{\partial s}{\sqrt[4]{(s)}} e^{-s};$$

soit $s = s'^4$, & l'on aura

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt[4]{(s)}} e^{-s} = 4 \int s'^2 \partial s' . e^{-s'^4} = 4 C';$$

donc

$$\int\int \partial s . \partial u e^{-s(1+u^4)} = 4 C C' = \frac{\pi}{2\sqrt{(2)}},$$

ce qui donne

$$C' = \frac{\pi}{8 C . \sqrt{(2)}}.$$

Quant à la valeur de C, il ne m'a pas encore été possible, malgré plusieurs tentatives, de la ramener aux arcs-de-cercle ou aux logarithmes; mais j'ai trouvé qu'elle dépendoit de la rectification de la courbe élastique rectangle, ou ce qui revient au même, de l'intégrale $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; si l'on désigne par π' la valeur de cette intégrale, on a trouvé

$$\pi' = 1,31102877714605987\,*.$$

Cela posé, considérons la double intégrale $\int\int \partial s . \partial u e^{-s^2(1+u^4)}$, prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$, & depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$; en faisant $u\sqrt{(s)} = t$, elle deviendra

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{(s)}} e^{-s^2} \int \partial t e^{-t^4}, \text{ou } C . \int \frac{\partial s}{\sqrt{(s)}} e^{-s^2};$$

soit $s = s'^2$, & l'on aura

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{(s)}} e^{-s^2} = 2 \int \partial s' e^{-s'^4} = 2 C;$$

partant,

$$\int\int \partial s . \partial u e^{-s^2(1+u^4)} = 2 C^2.$$

* V. le Traité de M. Stirling, *De Sommatione & interpolatione serierum*, pag. 58.

Supposons maintenant $s\sqrt{(1+u^4)} = s''$, & nous aurons

$$\iint \partial s \, . \, \partial u \, e^{-s^2(1+u^4)} = \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+u^4)}} \int \partial s'' e^{-s''^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\pi)} \, . \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+u^4)}};$$

en nommant donc E l'intégrale $\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+u^4)}}$, prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, on aura

$$2\, C^2 = \tfrac{1}{2} E \sqrt{(\pi)},$$

ce qui donne

$$C = \tfrac{1}{2} \sqrt{[E\sqrt{(\pi)}]}.$$

Si l'on fait $\frac{1}{1+u^4} = s^4$,

on aura

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+u^4)}} = -\int \frac{\partial s}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}},$$

l'intégrale relative à s étant prise depuis $s = 1$ jusqu'à $s = 0$, en sorte que

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(1+u^4)}} = E = \int \frac{\partial s}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}},$$

l'intégrale relative à s étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$.

Considérons présentement la double intégrale $\iint \frac{\partial x \, . \, \partial z}{(1-z^2-x^4)^{\frac{3}{4}}}$; prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, & depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$; en faisant $\frac{x}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} = x'$, elle se changera dans celle-ci $\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}} \int \frac{\partial x'}{(1-x'^4)^{\frac{3}{4}}}$, ces intégrales étant prises depuis $x' = 0$ & $z = 0$, jusqu'à $x' = 1$ & $z = 1$, ce qui donne

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{\pi}{2} \;\&\; \int \frac{\partial x'}{(1-x'^4)^{\frac{3}{4}}} = E;$$

on aura donc

$$\int\int \frac{\partial x \,.\, \partial z}{(1 - z^2 - x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi E}{2}.$$

Si l'on fait enſuite $\frac{z}{\sqrt{(1 - x^4)}} = z'$, on aura

$$\int\int \frac{\partial x \,.\, \partial z}{(1 - z^2 - x^4)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} \,.\, \int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{3}{4}}};$$

or on a

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(1 - x^4)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{(2)}};$$

d'ailleurs ſi l'on ſuppoſe $1 - z'^2 = t^4$, on aura

$$\int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{3}{4}}} = -2 \int \frac{\partial t}{\sqrt{(1 - t^4)}},$$

l'intégrale relative à t étant priſe depuis $t = 1$ juſqu'à $t = 0$; cette intégrale eſt évidemment égale à $-\pi'$; donc

$$\int \frac{\partial z'}{(1 - z'^2)^{\frac{3}{4}}} = 2\pi',$$

ce qui donne

$$\int\int \frac{\partial x \,.\, \partial z}{(1 - z^2 - x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi \pi'}{\sqrt{(2)}} = \frac{\pi E}{2};$$

partant $$E = \pi' \sqrt{(2)};$$

d'où l'on tire

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\pi' \,.\, \sqrt{(2\pi)}]} \ \ \&\ \ C' = \frac{\pi^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{[\pi'\sqrt{(2)}]}};$$

X X V.

Pour appliquer la théorie précédente à quelques exemples, ſoit

$$y = x^p \,.\, (1 - x)^q;$$

en faiſant $p = \frac{1}{\alpha}$, & $q = \frac{\mu}{\alpha}$, on aura dans le cas

du *maximum* de y, $x = \frac{1}{1+\mu}$; partant *(article XXIII)*,

$$A = \frac{\mu^q}{(1+\mu)^{p+q}},$$

& $\alpha \log. A = \mu . \log.(\frac{\mu}{1+\mu}) + \log.(\frac{1}{1+\mu})$;

on a d'ailleurs,

$$\alpha \log. y = \log. x + \mu \log. (1 - x),$$

& si l'on fait

$$x = \frac{1}{1+\mu} + \theta,$$

on aura

$$\alpha \log. y = \mu . \log.(\frac{\mu}{1+\mu} - \theta) + \log.(\frac{1}{1+\mu} + \theta);$$

donc,

$$\log. A - \log. y = -\frac{1}{\alpha} . \log. [1 + (1+\mu)\theta] - \frac{\mu}{\alpha} . \log. (1 - \frac{1+\mu}{\mu} . \theta)$$

$$= \frac{(1+\mu)^2.(1+\mu)}{2\alpha\mu} . \theta^2 + \frac{(1+\mu)^3.(1-\mu\mu)}{3\alpha\mu^2} . \theta^3 + \frac{(1+\mu)^4.(1+\mu^3)}{4\alpha\mu^3} . \theta^4 + \&c.$$

d'où l'on tirera en vertu de la formule *(z)* de l'*art. XXIII*,

$$\alpha^{\frac{1}{2}} h = \frac{\sqrt{(2\mu\alpha)}}{(1+\mu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} h^{11} = \frac{\alpha\sqrt{(2\mu\alpha)}}{(1+\mu)^{\frac{3}{2}}} . \frac{[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{18\mu.(1+\mu)},$$

&c.

la formule *(s)* de l'*article XXIII* donnera donc

$$k = \frac{\sqrt{(2\alpha\pi)}.\mu^{q+\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^{p+q+\frac{3}{2}}} . \{1 + \frac{\alpha.[(1+\mu)^2 - 13\mu]}{12\mu.(1+\mu)} + \&c.\}$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé dans l'*article XVIII*.

Si $\mu = 1$, ou ce qui revient au même, si $p = q$;

on déterminera plus ſimplement de la manière ſuivante, les coëfficiens de la ſérie en t, qui exprime la valeur de θ; pour cela, on obſervera que dans ce cas,

$$\log. A - \log. y = -\frac{1}{\alpha}.\log.(1 - 4\theta^2) = t^2,$$

ce qui donne

$$1 - 4\theta^2 = e^{-\alpha t^2},$$

&
$$2\theta = (1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$(1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}} = 2\alpha^{\frac{1}{2}} t.\{l + l^{I}.\alpha t^2 + l^{II}.\alpha^2 t^4 + l^{III}.\alpha^3 t^6 + \&c.\};$$

en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de cette équation, & multipliant en croix, on aura

$$\alpha t^2.e^{-\alpha t^2}.\{l + l^{I}.\alpha t^2 + l^{II}.\alpha^2 t^4 + \&c.\}$$
$$= \{l + 3l^{I}.\alpha t^2 + 5.l^{II}.\alpha^2 t^4 + \&c.\}.(1 - e^{-\alpha t^2});$$

or on a

$$e^{-\alpha t^2} = 1 - \alpha t^2 + \frac{\alpha^2 t^4}{1.2} - \frac{\alpha^3.t^6}{1.2.3} + \&c.$$

Si l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation précédente, on aura entre les coëfficiens $l, l^{I}, l^{II}, l^{III}$, &c. les équations ſuivantes,

$$2l^{I} + \frac{l}{1.2} = 0,$$

$$4l^{II} - \frac{l^{I}}{1.2} - \frac{2l}{1.2.3} = 0,$$

&c.

& généralement

$$0 = 2i.l^{(i)} - (2i-3)\frac{l^{(i-1)}}{1.2} + (2i-6).\frac{l^{(i-2)}}{1.2.3} - (2i-9).\frac{l^{(i-3)}}{1.2.3.4}$$
$$+ (2i-12).\frac{l^{(i-4)}}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

en continuant cette ſuite juſqu'à ce qu'on arrive au coëfficient l; on déterminera donc facilement l', l'', l''', &c. lorſque ce coëfficient ſera connu; or ſi l'on néglige les puiſſances de t ſupérieures à l'unité, on a

$$(1 - e^{-\alpha t^2})^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} t;$$

donc $l = \frac{1}{2}$; la formule (s) donnera enſuite, en obſervant que dans ce cas $A = \frac{1}{2^p}$,

$$k = \frac{\sqrt{(\alpha\pi)}}{2^p} \cdot (l + 1 \cdot 3 \cdot \alpha \frac{l'}{2} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \frac{\alpha^2 l''}{2^2} + \&c.).$$

On a généralement

$$k = \int x^p \partial x (1 - x)^q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (p + q + 1)};$$

la ſuppoſition de $p = q$ donne

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2p}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p)^2} = \frac{1}{(2p + 1) \cdot k}:$$

or le premier membre de cette équation eſt le terme moyen du binome $(1 + 1)^{2p}$; on aura donc la valeur de ce terme par une ſuite très-convergente, lorſque p eſt un très-grand nombre. Si l'on compare la manière dont nous y ſommes parvenus, avec celles qu'ont employées M.rs Stirling & Euler, le premier dans ſon Ouvrage *De transformatione & interpolatione ſerierum*, & le ſecond dans ſes *Inſtitutions de Calcul différentiel*, on trouvera, ſi je ne me trompe, qu'indépendamment de ſa généralité, elle a l'avantage d'être plus directe, en ce que les procédés de ces deux illuſtres Auteurs ſuppoſent que l'on connoît d'avance l'expreſſion en facteurs, du rapport de la demi-circonférence au rayon, expreſſion que Wallis a donnée; celui de M. Euler eſt de plus fondé ſur la valeur en ſérie du produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p$, lorſque p eſt un grand nombre; cette valeur eſt encore très-facile à déterminer par notre méthode. Pour cela, ſoit

$$y = x^p \cdot e^{-x},$$

on aura, en intégrant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int x^p . \partial x . e^{-x} = p . \int x^{p-1} \partial x . e^{-x};$$

d'où il est aisé de conclure

$$\int x^p \partial x e^{-x} = 1.2.3 \ldots p.$$

Le *maximum* de y a lieu lorsque $x = p$, ce qui donne $p^p . e^{-p}$ pour ce *maximum*; soit donc $p = \frac{1}{\alpha}$ & $x = \frac{1}{\alpha} + \theta$, on aura

$$\log. y - \log. p^p . e^{-p} = \frac{1}{\alpha} . \log. (1 + \alpha\theta) - \theta;$$

donc

$$\int y \partial x = p^p . e^{-p} . \int \partial\theta . e^{\frac{1}{\alpha} \log. (1 + \alpha\theta) - \theta}.$$

Si l'on fait

$$\log. (1 + \alpha\theta) - \alpha\theta = - \alpha t^2,$$

on aura

$$\frac{\alpha\theta^2}{2} - \frac{\alpha^2\theta^3}{3} + \frac{\alpha^3\theta^4}{4} - \&c. = t^2:$$

soit

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{(\alpha)}} (h + h^{I} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + h^{II} . \alpha t^2 + h^{III} . \alpha^{\frac{3}{2}} t^3 + \&c.),$$

on trouvera

$$h = \sqrt{(2)}, h^{I} = \tfrac{2}{3}, h^{II} = \frac{\sqrt{(2)}}{18}, \&c.$$

& l'on aura

$$\partial\theta = \frac{\partial t}{\sqrt{(\alpha)}} (h + 2h^{I} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h^{II} . \alpha t^2 + \&c.);$$

donc

$$\int y \partial x = p^{p+\frac{1}{2}} c^{-p} . \int \partial t . (h + 2h^{I} . \alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h^{II} . \alpha t^2 + \&c.) . e^{-t^2};$$

l'intégrale en x doit être prise depuis $x = 0$ jusqu'à

$x = \infty$; or x étant nul, on a $\theta = -\frac{1}{\alpha}$, & par conséquent $t^2 = \infty$; x étant égal à ∞, on a $\theta = \infty$; partant, $t^2 = \infty$; on doit donc prendre l'intégrale relative à ∂t, depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; d'où l'on tire par l'*article XXIII*,

$$\int y \partial x = p^{p+\frac{1}{2}} . e^{-p} \sqrt{(\pi)} . (h + 1 . 3 . \frac{\alpha h^{II}}{2} + 1 . 3 . 5 . \frac{\alpha^2 h^{IV}}{2^2} + \&c.);$$

partant,

$$1 . 2 . 3 \ldots p = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{(2\pi)} . (1 + \tfrac{1}{12} \alpha + \&c.).$$

Nous pourrions appliquer cette méthode à beaucoup d'autres exemples, & par-là étendre & perfectionner la théorie des suites; mais cette digreſſion nous écarteroit trop de notre objet principal.

X X V I.

La méthode précédente donne une ſolution fort ſimple d'un Problème intéreſſant, qu'il ſeroit peut-être très-difficile de réſoudre par d'autres méthodes; on a vu *(article XIX)*, que le rapport des naiſſances des garçons à celles des filles, eſt ſenſiblement plus grand à Londres qu'à Paris; cette différence ſemble indiquer à Londres une plus grande facilité pour la naiſſance des garçons, il s'agit de déterminer combien cela eſt probable.

Pour cela, ſoit u la probabilité de la naiſſance d'un garçon à Paris; p le nombre des naiſſances des garçons obſervées dans cette ville; q celui des filles; $u - x$ la poſſibilité de la naiſſance d'un garçon à Londres; p^I le nombre de naiſſances des garçons qu'on y a obſervées; q^I celui des filles; on aura, pour la probabilité de ce double évènement,

$$H . u^p . (1 - u)^q . (u - x)^{p^I} . (1 - u + x)^{q^I},$$

H étant un coëfficient conſtant; donc ſi l'on nomme P la probabilité que la naiſſance d'un garçon eſt moins poſſible à Londres

Londres qu'à Paris, on aura

$$P = \frac{\int\int u^p . (1-u)^q . (u-x)^{p'} . (1-u+x)^{q'} . \partial u . \partial x}{\int\int u^p . (1-u)^q . (u-x)^{p'} . (1-u+x)^{q'} . \partial u . \partial x},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = x$, & depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Celle du dénominateur doit être prise pour toutes les valeurs possibles de x & de u; or si l'on fait $u - x = s$, ce dénominateur deviendra

$$\int\int u^p . (1 - u)^q . s^{p'} . (1 - s)^{q'} . \partial u . \partial s;$$

la double intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, & depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; on aura ainsi

$$P = \frac{\int\int u^p . (1-u)^q . (u-x)^{p'} . (1-u+x)^{q'} . \partial u . \partial x}{\int\int u^p . (1-u)^q . s^{p'} . (1-s)^{q'} . \partial u . \partial s}.$$

Déterminons d'abord l'intégrale du numérateur.

En nommant y la quantité

$$u^p . (1 - u)^q . (u - x)^{p'} . (1 - u + x)^{q'},$$

on aura à très-peu près par la formule (μ) de l'*article XXIII*,

$$\int y \partial u = \frac{\sqrt{(2\pi)} . y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[-(\frac{\partial\partial y}{\partial u^2})]}},$$

en substituant pour u, dans le second membre de cette équation, sa valeur en x, qui rend y un *maximum*; soit X cette valeur, on a

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = y . \left\{\frac{p}{u} - \frac{q}{1-u} + \frac{p'}{u-x} - \frac{q'}{1-u+x}\right\}$$

&

$$-\left(\frac{\partial\partial y}{\partial u^2}\right) = y . \left\{\frac{p}{u^2} + \frac{q}{(1-u)^2} + \frac{p'}{(u-x)^2} + \frac{q'}{(1-u+x)^2}\right\}$$
$$- \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) . \left\{\frac{p}{u} - \frac{q}{1-u} + \frac{p'}{u-x} - \frac{q'}{1-u+x}\right\}$$

Si l'on ſubſtitue X au lieu de u, on a par la condition du *maximum*, $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0$. Partant,

$$-\left(\frac{\partial\partial y}{\partial u^2}\right) = y \cdot \left\{\frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}\right\}$$

d'où l'on tire

$$\int y \partial u = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot y}{\sqrt{\left[\frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}\right]}},$$

X étant déterminé par l'équation

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x}; \quad (t)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X.(1-X).[(p+p').(1-X) - (q+q').X] \\ + x.\{(p'+q').X.(1-X) + (1-2X).[qX - p(1-X)]\} \\ + x^2.[qX - p(1-X)] \end{array}\right\}; \quad (t')$$

ſoit pour abréger,

$$R = \sqrt{\left[\frac{p}{X^2} + \frac{q}{(1-X)^2} + \frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}\right]};$$

la queſtion eſt réduite à déterminer l'intégrale $\sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{y \partial x}{R}$, depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Au lieu de cette intégrale, on peut conſidérer celle-ci $\sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{y}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) \cdot \partial X$, x étant regardé comme fonction de X; mais il faut prendre cette dernière intégrale depuis la valeur de X, qui a lieu lorſque $x = 0$, juſqu'à celle qui a lieu lorſque $x = 1$; or en faiſant $x = 0$, l'équation (t') devient

$$0 = (p + p').(1 - X) - (q + q')X.$$

Partant, $$X = \frac{p + p'}{p + p' + q + q'}.$$

En faiſant $x = 1$, cette équation donne $X = 1$; on

doit donc prendre l'intégrale $\int \frac{y}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) . \partial X$, depuis $X = \frac{p + p'}{p + p' + q + q'}$ jusqu'à $X = 1$.

Supposons $\frac{y}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = y'$; la condition du *maximum* de y' donne l'équation

$$0 = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial . \left[\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)\right]}{\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)};$$

or y étant égal à $X^p . (1 - X)^q . (X - x)^{p'} . (1 - X + x)^{q'}$, on a

$$\frac{\partial y}{y} = \left\{\frac{p}{X} - \frac{q}{1 - X} + \frac{p'}{X - x} - \frac{q'}{1 - X + x}\right\} . \partial X$$
$$+ \left\{\frac{q'}{1 - X + x} - \frac{p'}{X - x}\right\} . \partial x;$$

cette équation se réduit en vertu de l'équation (t) à celle-ci,

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{q' \partial x}{1 - X + x} - \frac{p' \partial x}{X - x} = \left\{\frac{p}{X} - \frac{q}{1 - X}\right\} . \partial x.$$

Maintenant, p & q étant de très-grands nombres, il est visible que $\frac{\partial y}{y}$ est incomparablement plus grand que $\frac{\partial . \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial X}\right)}{\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial X}}$, & qu'ainsi on peut négliger la seconde de ces deux différentielles, par rapport à la première; on aura donc à très-peu près, dans le cas du *maximum* de y',

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1 - X}.$$

Partant $$X = \frac{p}{p + q}.$$

Cette valeur de X est moindre que $\frac{p + p'}{p + p' + q + q'}$, lorsque

$\frac{p'}{p'+q'}$ eſt, comme nous le ſuppoſons ici, plus grand que $\frac{p}{p+q}$; les deux limites dans leſquelles il faut prendre l'intégrale $\int y'.\partial x$, ſont par conſéquent au-delà de la valeur de X, qui rend y' un *maximum;* ainſi l'on doit, pour déterminer cette intégrale, faire uſage de la ſuite (γ) de l'*art. XVIII.*

On a à très-peu près,

$$\frac{\partial y'}{y'} = \frac{\partial y}{y} = \left\{ \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} \right\}.\partial x;$$

d'ailleurs, en différenciant l'équation

$$0 = \frac{p}{X} - \frac{q}{1-X} + \frac{p'}{X-x} - \frac{q'}{1-X+x},$$

on trouve

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}};$$

donc

$$\frac{\partial y'}{y'} = \frac{R^2}{\frac{p'}{(X-x)^2} + \frac{q'}{(1-X+x)^2}} . \frac{p-(p+q)X}{X.(1-X)}.\partial X.$$

Soit $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{\mu}{\alpha}$, $p' = \frac{\upsilon}{\alpha}$, $q' = \frac{\upsilon'}{\alpha}$; la quantité que nous avons nommée z dans l'*article XVIII*, ſera ici

$$\frac{X.(1-X).\left\{\frac{\upsilon}{(X-x)^2} + \frac{\upsilon'}{(1-X+x)^2}\right\}}{\left\{\frac{1}{X^2} + \frac{\mu}{(1-X)^2} + \frac{\upsilon}{(X-x)^2} + \frac{\upsilon'}{(1-X+x)^2}\right\}.[1-(1+\mu).X]},$$

X étant la variable principale dont x eſt fonction; ſi l'on obſerve enſuite que X étant égal à l'unité, on a $y' = 0$, la ſuite (γ) de l'article cité donnera

$$\int y'.\partial x = -\alpha y' z.\left\{1 - \alpha.\frac{\partial z}{\partial X} + \alpha^2.\frac{\partial.(z\partial z)}{\partial X^2} - \alpha^3.\frac{\partial[z\partial.(z\partial z)]}{\partial X^3} + \&c.\right\}$$

en ſubſtituant après les différenciations dans le ſecond membre de cette équation, $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$ pour X, & en y faiſant $x=0$.

Si l'on ſuppoſe $X=\frac{p}{p+q}+\theta$, θ ſera égal à $\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}-\frac{p}{p+q}$, & l'on aura

$$z=-\frac{X(1-X).\left\{\frac{v}{(X+x)^2}+\frac{v'}{(1-X+x)^2}\right\}}{(1+\mu)\,\theta.\left\{\frac{1}{X^2}+\frac{\mu}{(1-X)^2}+\frac{v}{(X-x)^2}+\frac{v'}{(1-X+x)^2}\right\}};$$

or θ étant très-petit, les différences ſucceſſives de z croiſſent principalement par la différenciation du facteur θ qui ſe trouve au dénominateur, en ſorte que ſi l'on ſuppoſe

$$F=\frac{X.(1-X)\left\{\frac{v}{(X-x)^2}+\frac{v'}{(1-X+x)^2}\right\}}{(1+\mu).\left\{\frac{1}{X^2}+\frac{\mu}{(1-X)^2}+\frac{v}{(X-x)^2}+\frac{v'}{(1-X+x)^2}\right\}},$$

on aura à très-peu près

$$\frac{\partial z}{\partial X}=\frac{F}{\theta^2},$$

$$\frac{\partial.(z\partial z)}{\partial X^2}=\frac{3F^2}{\theta^4}.$$

&c.

Partant,

$$\int y'.\partial x=\frac{\alpha y' F}{\theta}.\left\{1-\frac{\alpha F}{\theta^2}+\frac{3\alpha^2 F^2}{\theta^4}-\&c.\right\},$$

y' & F étant ce que deviennent ces quantités lorſqu'on y ſuppoſe $x=0$ & $X=\frac{p+p'}{p+p'+q+q'}$, ce qui donne

$$y'.F=\frac{(p+p')^{p+p'+\frac{1}{2}}.(q+q')^{q+q'+\frac{1}{2}}}{(1+\mu).(p+p'+q+q')^{p+p'+q+q'+\frac{2}{2}}}.$$

Il eſt aiſé de voir par l'analyſe de l'*article XVIII*, que $\int y^1 . \partial x$ eſt moindre que $\frac{\alpha y^1 F}{\theta}$, plus grand que $\frac{\alpha y^1 F}{\theta}(1 - \frac{\alpha F}{\theta^2})$, & moindre que

$$\frac{\alpha y^1 F}{\theta}(1 - \frac{\alpha F}{\theta^2} + \frac{\partial \alpha^2 F^2}{\theta^4}),$$

en ſorte que l'on a par ce moyen les limites dans leſquelles la valeur de $\int y^1 . \partial x$ eſt reſſerrée.

Cherchons préſentement la valeur de la double intégrale

$$\int\int u^p . (1 - u)^q . s^{p^1} . (1 - s)^{q^1} . \partial u . \partial s.$$

La formule (μ) de l'*article XXIII* donne à très-peu près,

$$\int u^p . \partial u . (1 - u)^q = \sqrt{(2\pi)} . \frac{u^{p+1} . (1-u)^{q+1}}{\sqrt{[p(1-u)^2 + q u^2]^2}},$$

en ſubſtituant pour u la valeur qui rend $u^p . (1 - u)^q$ un *maximum;* or cette valeur eſt $\frac{p}{p+q}$; on a donc

$$\int u^p . \partial u . (1 - u)^q = \sqrt{(2\pi)} . \frac{p^{p+\frac{1}{2}} . q^{q+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}.$$

En changeant p en p^1 & q en q^1, on aura

$$\int s^{p^1} . (1 - s)^{q^1} . \partial s = \frac{p^{1\,p^1+\frac{1}{2}} . q^{1\,q^1+\frac{1}{2}} . \sqrt{(2\pi)}}{(p^1 + q^1)^{p^1+q^1+\frac{1}{2}}}.$$

Partant,

$$\int\int u^p . (1-u)^q . s^{p^1} . (1-s)^{q^1} . \partial u . \partial s = 2\pi . \frac{p^{p+\frac{1}{2}} . q^{q+\frac{1}{2}} . p^{1\,p^1+\frac{1}{2}} . q^{1\,q^1+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}} . (p^1+q^1)^{p^1+q^1+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on ſuppoſe cette quantité égale à k, on aura pour la probabilité cherchée P,

$$P = \frac{\alpha y^1 F . \sqrt{(2\pi)}}{\theta . k} . (1 - \frac{\alpha F}{\theta^2} + \frac{3\alpha^2 F^2}{\theta^4} - \&c.);$$

il ne s'agit plus maintenant que de déterminer les valeurs numériques des différens termes de cette expreſſion, en

partant des données précédentes. Ces données sont

$$p = 251527, \qquad p' = 737629,$$
$$q = 241945, \qquad q' = 698958;$$

d'où il est facile de conclure

$$\log. F = \overline{2},9767121,$$
$$\log. \theta = \overline{3},4457598,$$
$$\log. \alpha = \overline{6},5994154,$$

& par conséquent

$$\frac{\alpha F}{\theta^2} = 0,048374,$$
$$\frac{3\alpha^2 F^2}{\theta^4} = 0,007020.$$

On a ensuite, en portant la précision jusqu'à douze décimales,

$$\log. p = 5,400584610947,$$
$$\log. q = 5,383716651469,$$
$$\log. p + q = 5,693262515480;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left(\frac{p}{q + q}\right)^p = \overline{73617},6047065,$$
$$\log. \left(\frac{q}{p + q}\right)^q = \overline{74894},9259319.$$

On a pareillement

$$\log. p' = 5,867837982735,$$
$$\log. q' = 5,844451080009,$$
$$\log. (p' + q') = 6,157331932083;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left(\frac{p'}{p' + q'}\right)^{p'} = \overline{213540},8676364,$$
$$\log. \left(\frac{q'}{p' + q'}\right)^{q'} = \overline{218691},4253961.$$

On trouve encore

$$\log. (p + p^{\text{I}}) = 5{,}995264741371,$$
$$\log. (q + q^{\text{I}}) = 5{,}973544853243,$$
$$\log. (p + p^{\text{I}} + q + q^{\text{I}}) = 6{,}285570585161;$$

d'où l'on tire

$$\log. \left(\frac{p + p^{\text{I}}}{p + p^{\text{I}} + q + q^{\text{I}}}\right)^{p + p^{\text{I}}} = \overline{287158},2327801,$$
$$\log. \left(\frac{q + q^{\text{I}}}{p + p^{\text{I}} + q + q^{\text{I}}}\right)^{q + q^{\text{I}}} = \overline{293586},0527612.$$

On a enfin

$$\log. (1 + \mu) = 0{,}2926769,$$
$$\log. 2\pi = 0{,}7981799.$$

Partant,

$$\log. \frac{\alpha y^{\text{I}} F\sqrt{(2\pi)}}{\theta} = \overline{580751},4993272,$$
$$\log. k = \overline{580745},0942543,$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha y^{\text{I}} F\sqrt{(2\pi)}}{\theta k} = 0{,}0000025414;$$

donc

$$P = 0{,}0000025414 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0{,}048374 \\ + 0{,}007020 - \&c. \end{array} \right\}$$

Si l'on prend les trois premiers termes de la série, on aura

$$P = \frac{1}{410458};$$

cette valeur de P est un peu trop grande, mais comme en ne prenant que les deux premiers termes de la série, on auroit une valeur trop petite; il est aisé d'en conclure que la précédente ne peut différer de la véritable, de la $\frac{1}{142}$ partie de sa valeur, en sorte qu'elle est fort approchée; il y a donc plus de quatre cents mille à parier contre un, que les naissances des garçons sont plus faciles à Londres qu'à Paris; ainsi l'on peut regarder comme une chose très-probable, qu'il

qu'il existe dans la première de ces deux villes, une cause de plus que dans la seconde, qui y facilite les naissances des garçons, & qui dépend soit du climat, soit de la nourriture & des mœurs.

XXVII.

Il est facile d'étendre la théorie des *articles précédens*, au cas de trois, ou d'un plus grand nombre d'évènemens simples.

Si l'on nomme en effet x la possibilité du premier évènement simple; x' celle du second, & par conséquent $1 - x - x'$ celle du troisième; en cherchant par les méthodes ordinaires, la probabilité de l'évènement observé, on aura pour sa valeur une fonction de x, x' & $1 - x - x'$, multipliée par une constante quelconque. Soit y cette fonction; pour que l'évènement observé puisse indiquer d'une manière approchée les possibilités des évènemens simples, il faut, comme on l'a observé dans l'*art. XXII*, que $\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{y}$, & $\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)}{y}$ soient des fonctions de x très-grandes de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, α étant un coëfficient d'autant moindre que l'évènement observé est plus composé; cela posé, si l'on intègre $\int y \partial x'$, depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1 - x$, on aura pour résultat, une fonction de x, que la méthode de l'*art. XXIII* donnera par une suite très-convergente. Soit u la valeur de x' en x qui rend y un *maximum*, x étant supposé constant; & que l'on représente par Y ce *maximum*, on aura par l'article cité, pour $\int y \partial x'$, une expression de cette forme,

$$\int y \partial x' = Y.\sqrt{(\alpha\pi)}.\left[h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5.\frac{\alpha^2 h^{\text{IV}}}{2^2} + \&c.\right];$$

Y, h, h'', h^{IV}, &c. étant des fonctions de x. La valeur de x qui rend le second membre de cette équation un *maximum*, sera très-approchante de la véritable possibilité du premier évènement; soit a cette valeur, on aura pour l'expression de

la probabilité P que x ſera compris dans les limites $a - \theta$ & $a + \theta$,

$$P = \frac{\int Y \partial x \,.\, [h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5.\frac{\alpha^2 h^{iv}}{2^2} + \&c.]}{\int Y \partial x \,.\, [h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + 1.3.5.\frac{\alpha^2 h^{iv}}{2^2} + \&c.]};$$

l'intégrale du numérateur étant priſe depuis $x = a - \theta$, juſqu'à $x = a + \theta$, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$, juſqu'à $x = 1$; or on déterminera facilement ces intégrales par la méthode de l'*art. XXIII.*

La valeur a ſe détermine en égalant à zéro la différence de $Y.(h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + \&c.)$, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial Y}{Y} + \frac{\partial h + 1.3.\frac{\alpha \partial h''}{2} + \&c.}{h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + \&c.};$$

$\frac{\partial Y}{Y}$, eſt par la ſuppoſition une quantité très-grande de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$; en négligeant donc vis-à-vis d'elle la quantité $\frac{\partial h + 1.3.\frac{\alpha \partial h''}{2} + \&c.}{h + 1.3.\frac{\alpha h''}{2} + \&c.}$, on aura pour déterminer a, l'équation $0 = \frac{\partial Y}{\partial x}$; or on a $\frac{\partial Y}{\partial x} = (\frac{\partial y}{\partial x}) + (\frac{\partial y}{\partial x'}).(\frac{\partial x'}{\partial x})$, en ſubſtituant dans le ſecond membre de cette équation, au lieu de x' ſa valeur u en x; mais cette valeur rend nulle la quantité $(\frac{\partial y}{\partial x'})$; on aura donc les deux équations $(\frac{\partial y}{\partial x}) = 0$, & $(\frac{\partial y}{\partial x'}) = 0$.

Il ſuit de-là que a eſt aux quantités près de l'ordre α; la valeur de x qui rend y un *maximum*, en faiſant varier à la fois x & x'; on peut donc prendre ſans erreur ſenſible,

la valeur de x correſpondante à ce *maximum*, pour la poſſibilité du premier évènement ſimple; & il eſt clair que l'on peut faire des remarques analogues ſur les poſſibilités des deux autres évènemens ſimples.

Suppoſons, par exemple, qu'il y ait dans une urne, une infinité de boules blanches, rouges & noires, dans une proportion inconnue, & que ſur le nombre $p + q + r$ de tirages, on ait amené p boules blanches, q boules rouges, & r boules noires; en nommant x la facilité d'amener une boule blanche, x' celle d'amener une boule rouge, & par conſéquent $1 - x - x'$ celle d'amener une boule noire; on aura pour la probabilité de l'évènement obſervé

$$\alpha = \frac{1.2.3 \ldots\ldots (p + q + r)}{1.2.3 \ldots p . 1.2.3 \ldots q . 1.2.3 \ldots r} . x^p . x'^q . (1 - x - x')^r;$$

dans ce cas particulier

$$y = x^p . x'^q . (1 - x - x')^r;$$

$$\frac{1.2.3 \ldots\ldots q . 1.2.3 \ldots\ldots r}{1.2.3 \ldots\ldots (q + r + 1)} . x^p . (1 - x)^{q+r+1};$$

la valeur de x qui rend $\int y \partial x$ au *maximum*, eſt $\frac{p}{p+q+r+1}$; cette fraction eſt conſéquemment la valeur la plus probable de x. Lorſque p, q & r ſont de grands nombres, elle ſe réduit à très-peu près à celle-ci $\frac{p}{p+q+r}$, qui correſpond au *maximum* de y.

XXVIII.

JUSQU'ICI nous avons ſuppoſé la loi de poſſibilité des évènemens ſimples, conſtante depuis zéro juſqu'à l'unité, & cette ſuppoſition eſt, comme nous l'avons obſervé dans l'*art. XVII*, la ſeule que l'on doive adopter, lorſqu'on n'a aucune donnée relativement à ces poſſibilités; mais ſi leur loi étoit exactement connue, on pourroit encore y appliquer les recherches précédentes. Pour cela, ne conſidérons que deux

évènemens ſimples, & nommons x la poſſibilité du premier, & $1 - x$ celle du ſecond; on calculera la probabilité de l'évènement obſervé, en partant de ces poſſibilités, & l'on aura pour ſon expreſſion, une fonction de x, que nous déſignerons par y; ſi l'on repréſente enſuite par u la facilité de la poſſibilité x du premier évènement, u étant fonction de x, & par s la facilité de la poſſibilité $1 - x$ du ſecond évènement, on aura par l'*art. XV*, $\frac{usy\partial x}{\int usy\partial x}$ pour la probabilité que l'évènement obſervé eſt dû aux poſſibilités x & $1 - x$, l'intégrale du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; donc ſi l'on nomme P la probabilité que la valeur de x eſt compriſe dans des limites données, on aura

$$P = \frac{\int usy\partial x}{\int usy\partial x},$$

pourvu que l'intégrale du numérateur ne ſoit priſe que dans l'étendue de ces limites; on voit ainſi que ce cas rentre dans ceux que nous avons conſidérés dans les articles précédens, & que la valeur de P ſe déterminera facilement par la méthode de ces articles.

La valeur de x qui rend usy un *maximum*, ſera très-approchante de la véritable, ſi l'évènement obſervé eſt très-compoſé, & ſi l'on a $y\partial x = \alpha z\partial y$, α étant un coëfficient très-petit; or on a, en égalant à zéro la différentielle de usy,

$$0 = \frac{\partial . us}{us} + \frac{\partial y}{y}.$$

Partant,

$$0 = \frac{\alpha\partial . us}{us} + \frac{1}{z}.$$

On aura donc en négligeant les quantités de l'ordre α, $0 = \frac{1}{z}$; d'où il ſuit que la valeur de x qui rend y un *maximum*, eſt à très-peu près la véritable, quelle que ſoit d'ailleurs la loi de facilité des poſſibilités des deux évènemens ſimples.

XXIX.

Après avoir déterminé les possibilités des évènemens simples qui résultent d'un évènement composé propre à les faire connoître, il nous reste à considérer l'influence de cet évènement sur la probabilité d'un évènement futur quelconque, & la manière dont on doit calculer cette probabilité. Si l'on nomme x & $1 - x$ les possibilités de deux évènemens simples, s la facilité de x, & s' celle de $1 - x$, on calculera les probabilités tant de l'évènement observé que de l'évènement futur, en partant de ces possibilités, & l'on aura pour résultat deux fonctions de x, dont nous représenterons la première par y & la seconde par u; cela posé, si l'on nomme P la probabilité cherchée de l'évènement futur, on aura par les *articles XIV & XV*,

$$P = \frac{\int s s' u y \partial x}{\int s s' y \partial x},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Lorsque l'évènement observé sera très-composé, la méthode de l'*article XXIII* donnera ces intégrales par une approximation très-rapide, ce qui montre l'étendue de cette méthode & son utilité dans ces matières.

Si l'on n'a aucune donnée sur la loi de possibilité des deux évènemens simples, ce qui est le cas le plus ordinaire, on doit supposer (*article XVII*) s & s' égaux à l'unité, ce qui donne

$$P = \frac{\int u y \partial x}{\int y \partial x};$$

or on a à très-peu près, par l'*article XXIII*,

$$(\int y \partial x)^2 = \frac{2\pi . y^3}{-\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}},$$

$$(\int u y \partial x)^2 = \frac{2\pi . u'^3 . y'^3}{-\frac{\partial \partial . u' y'}{\partial x^2}},$$

y & $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$ étant ce que deviennent ces quantités lorſqu'on y ſubſtitue pour x la valeur qui rend y un *maximum* ; & u', y' & $\frac{\partial\partial y'}{\partial x^2}$ étant ce que deviennent u, y & $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$ lorſqu'on y ſubſtitue pour x la valeur qui rend uy un *maximum ;* on aura donc

$$P^2 = \frac{u'^3 . y'^3}{y^3} . \frac{\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}}{\frac{\partial\partial . (u' y')}{\partial x^2}} ; \ (a)$$

Suppoſons que l'évènement futur dont on calcule la probabilité ſoit très-peu composé ; en égalant à zéro la différentielle de uy, on aura

$$o = \frac{\partial y}{y \partial x} + \frac{\partial u}{u \partial x};$$

mais on a par la ſuppoſition $\frac{\partial y}{y\partial x} = \frac{1}{\alpha z} = \frac{1}{\alpha} z'$, en faiſant $\frac{1}{z} = z'$; l'équation précédente deviendra ainſi

$$o = \alpha \frac{\partial u}{u \partial x} + z'.$$

Soit a la valeur de x qui rend y un *maximum*, & par conſéquent z' nul ; la valeur de x qui rend uy un *maximum*, pourra donc être repréſentée par $a + \alpha h$, h étant un coëfficient quelconque, & l'on aura

$$y' = y + \alpha h . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha^2 h^2}{1.2} . \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3} . \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, + \text{\&c.}$$

y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, &c. étant ce que deviennent ces quantités lorſqu'on y fait $x = a$; on a enſuite

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} . y z',$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y . \left\{ \frac{1}{\alpha^2} . z'^2 + \frac{1}{\alpha} . \frac{\partial z'}{\partial x} \right\}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = y . \left\{ \frac{1}{\alpha^3} . z'^3 + \frac{3}{\alpha^2} . z' . \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{1}{\alpha} . \frac{\partial\partial z'}{\partial x^2} \right\}$$

&c.

La supposition de $x = a$ donne $z^{\prime} = o$, & par conséquent

$$\alpha k \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = o,$$

$$\frac{\alpha^2 h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\alpha h^2}{1.2} \cdot y \frac{\partial z^{\prime}}{\partial x},$$

$$\frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\alpha^2 h^3}{1.2.3} \cdot y \frac{\partial \partial z^{\prime}}{\partial x^2},$$

&c.

on aura donc en négligeant les termes multipliés par α,

$$y = y^{\prime};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 . u^{\prime} y^{\prime}}{\partial x^2} = u^{\prime} \frac{\partial \partial y^{\prime}}{\partial x^2} + \frac{2 \partial u^{\prime} \partial y^{\prime}}{\partial x \partial y} + y^{\prime} \cdot \frac{\partial \partial u^{\prime}}{\partial x^2};$$

or il est visible par ce qui précède, que $\frac{\partial \partial y^{\prime}}{\partial x^2}$ est beaucoup plus grand que $\frac{\partial y^{\prime}}{\partial x}$ & que $y^{\prime}$, en sorte que l'on peut supposer à très-peu près,

$$\frac{\partial^2 . u^{\prime} y^{\prime}}{\partial x^2} = u^{\prime} \cdot \frac{\partial^2 y^{\prime}}{\partial x^2},$$

& l'on prouvera comme nous venons de le faire pour $y^{\prime}$, que $\frac{\partial^2 y^{\prime}}{\partial x^2}$ peut être supposé égal à $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Partant, $\frac{\partial^2 . u^{\prime} y^{\prime}}{\partial x^2} = u^{\prime} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; la formule ($\alpha$) deviendra donc

$$P^2 = u^{\prime 2};$$

mais si l'on nomme v ce que devient u, lorsqu'on y fait $x = a$, on aura en négligeant les quantités de l'ordre α, $u^{\prime} = v$; donc

$$P = v;$$

d'où il suit que l'on peut calculer la probabilité P de l'évènement futur, en employant pour x la valeur qui rend y un *maximum*.

Ce théorème cesseroit d'être exact, si l'évènement futur dont il s'agit étoit lui-même très-composé; car alors $\frac{\partial u}{u \partial x}$ seroit très-grand, & la valeur de x que donne l'équation

$$o = \alpha \frac{\partial u}{u \partial x} + z',$$

ne pourroit plus être représentée par $a + \alpha h$; on ne pourroit plus d'ailleurs supposer $\frac{\partial^2 (u' y')}{\partial x^2}$ égal à $u' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Si l'on représente en général par $u + \alpha^n h$, la racine de l'équation $o = \alpha \frac{\partial u}{u \partial x} + z$, n étant un exposant moindre que l'unité, on aura

$$y' = y + \alpha^n . h . \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\alpha^{2n} h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \&c.$$

& l'on trouvera

$$\alpha^n . h . \frac{\partial y}{\partial x} = o,$$

$$\frac{\alpha^{2n} h^2}{1,2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\alpha^{2n-1} . h^2}{1,2} . y . \frac{\partial z'}{\partial x},$$

&c.

Partant,

$$y' = y + \frac{\alpha^{2n-1} h^2}{1.2} . y . \frac{\partial z'}{\partial x} + \&c.$$

Cette valeur de y' ne se réduit à y, dans le cas de α infiniment petit, que lorsque $2n - 1$ est positif, ce qui suppose $n > \frac{1}{2}$, & il est aisé de voir pareillement que ce n'est que dans cette supposition que $\frac{\partial^2 . (u' y')}{\partial x^2}$ se réduit à $\frac{u' \partial^2 y}{\partial x^2}$; le théorème précédent ne peut donc avoir lieu que dans le cas où $2n$ est plus grand que l'unité.

Soit

Soit $\frac{\partial u}{u \partial x} = \frac{\lambda}{\alpha^{1-n^1}}$, λ étant fonction de x, l'équation $o = \frac{\alpha \partial u}{u \partial x} + z^1$ deviendra

$$o = \alpha^{n^1 - 1} . \lambda + z^1;$$

ce qui donne pour x une expression de cette forme, $x = a + \alpha^{n^1 - 1} . h$; or la vérité du théorème précédent exige que l'on ait $n^1 - 1 > \frac{1}{2}$, & par conséquent $1 - n^1 < \frac{1}{2}$; donc afin que ce théorème subsiste, il est nécessaire que l'évènement futur soit assez peu composé relativement à l'évènement observé, pour que $(\frac{\partial u}{u \partial x})^2$ soit une fonction de x, très-petite relativement à $\frac{\partial y}{y \partial x}$.

Si l'évènement futur est exactement le même que l'évènement observé, en sorte que $u = y$, la valeur a de x que rend y un *maximum*, rendra pareillement uy un *maximum*, en sorte que l'on aura $y^1 = y$, & $u^1 = v$; on aura ensuite

$$\frac{\partial^2 . u^1 y^1}{\partial x^2} = 2y . \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} + \frac{2 \partial y^2}{\partial x^2};$$

mais la substitution de a pour x donne $\frac{\partial y}{\partial x} = o$. Partant,

$$\frac{\partial^2 . u^1 y^1}{\partial x^2} = 2y . \frac{\partial \partial y}{\partial x^2};$$

la formule (α) deviendra donc

$$P^2 = \frac{v^2}{2};$$

v étant ce que devient u ou y, lorsqu'on y fait $x = a$; de-là résulte ce théorème assez remarquable.

La probabilité d'un évènement futur pareil à celui que l'on a observé, est à cette même probabilité déterminée en employant pour les possibilités des évènemens simples, celles qui résultent de l'évènement observé, comme 1 *est à* $\sqrt{(2)}$.

Si l'on a observé, par exemple, que sur $p + q$ enfans,

il eſt né p garçons & q filles, & que l'on cherche la probabilité P, que ſur $p + q$ enfans qui doivent naître, il y aura p garçons & q filles, on aura

$$P = \frac{1.2.3 \ldots (p+q)}{1.2.3 \ldots p . 1.2.3 \ldots q} \cdot \frac{p^p . q^q}{\sqrt{(2)} . (p+q)^{p+q}};$$

c'eſt ce qui réſulte pareillement de la formule (ϖ) de l'*art. XVII.*

En général, ſi l'on cherche la probabilité P que l'évènement obſervé ſera ſuivi d'un nombre n d'évènemens pareils, on aura $u = y^n$, & l'on trouvera

$$P = \frac{v^n}{\sqrt{(n+1)}};$$

v étant ce que devient y, lorſqu'on y ſubſtitue pour x la valeur a qui rend y un *maximum*, & cette équation a également lieu, n étant fractionnaire; on s'expoſeroit donc alors à des erreurs conſidérables, en employant dans le calcul de la probabilité des évènemens futurs, les poſſibilités des évènemens ſimples qui réſultent de l'évènement obſervé; en effet, il eſt viſible que la petite erreur que l'on peut commettre en faiſant uſage de ces poſſibilités, s'accumule en raiſon du nombre des évènemens ſimples qui entrent dans l'évènement futur, & doit occaſionner une erreur ſenſible lorſqu'ils y ſont en très-grand nombre. Au reſte, quel que ſoit cet évènement, on peut en déterminer la probabilité, au moyen de la formule (α) qui eſt toujours vraie à très-peu près, lorſque l'évènement obſervé eſt très-compoſé.

XXX.

UN des Problèmes les plus utiles de cette partie de l'analyſe des haſards, qui conſiſte à remonter des évènemens aux cauſes qui les ont produits, eſt celui de la détermination du milieu qu'il faut choiſir entre les réſultats de pluſieurs obſervations. J'ai donné dans le *tome VI* des *Mémoires des Savans*

étrangers, les principes sur lesquels il me semble que la solution de ce Problème doit être fondée : trois illustres Géomètres, M.[rs] de la Grange, Daniel Bernoulli & Euler, se sont depuis exercés sur cet objet ; le premier dans le *tome V des Mémoires de la Société royale de Thurin ;* & les deux autres dans la *I.[re] Partie des Mémoires de Péterſbourg, pour l'année 1777;* mais leurs principes étant différens de ceux dont je me suis servi, cette considération m'engage à reprendre ici cette matière, & à présenter mes résultats de manière à ne laisser aucun doute sur leur exactitude.

Supposons pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un phénomène qui a été aperçu par plusieurs Observateurs à des instans différens; chaque observation a pu s'écarter en plus & en moins de la vérité, & fixer ainsi l'instant du phénomène plus tôt ou plus tard qu'il n'est arrivé; nous supposerons, ce qui est très-naturel, que les facilités des mêmes erreurs, soit en plus, soit en moins, sont égales entre elles, & nous désignerons par $\varphi(x)$ la facilité tant de l'erreur positive x, que de l'erreur négative $-x$, relativement au premier Observateur; par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, &c. ces mêmes facilités pour les deuxième, troisième, &c. Observateurs. En nommant ensuite première observation celle qui fixe le plus tôt le phénomène, deuxième, troisième observations, &c. les différentes observations dans l'ordre de leurs distances à celles-ci, nous nommerons p, p', p'', &c. ces distances; en supposant donc x l'erreur de la première observation, les erreurs des observations suivantes seront $p - x$, $p' - x$, $p'' - x$, &c. & la probabilité que toutes ces observations auront entre elles les distances respectives p, p', p'', &c. sera $\varphi(x) \times \varphi'(p - x) . \varphi''(p' - x)$. &c. or les probabilités des différentes valeurs de x sont entre elles par l'*article XV*, comme les probabilités que ces valeurs ayant lieu, les observations s'écarteront entre elles des quantités observées p, p', p'', &c. Donc si l'on construit une courbe dont l'équation soit

$$y = \varphi(x) . \varphi'(p - x) . \varphi''(p' - x) . \&c.$$

les ordonnées y de cette courbe feront proportionnelles aux probabilités des abfciffes correfpondantes x, & par cette raifon nous la nommerons *courbe des probabilités.*

Maintenant, on peut entendre une infinité de chofes différentes par le *milieu* ou le *réfultat moyen* d'un nombre quelconque d'obfervations, fuivant que l'on affujettit ce réfultat à telle ou telle condition. Par exemple, on peut exiger que ce milieu foit tel que la fomme des erreurs à craindre en *plus*, foit égale à la fomme des erreurs à craindre en *moins;* on peut exiger que la fomme des erreurs à craindre en plus, multipliées par leurs probabilités refpectives, foit égale à la fomme des erreurs à craindre en moins, multipliées par leurs probabilités refpectives; on peut encore affujettir ce milieu à être le point où il eft le plus probable que doit tomber le véritable inftant du phénomène, comme M. Daniel Bernoulli l'a fait dans les Mémoires cités: en général on peut impofer une infinité d'autres conditions femblables, qui donneront chacune un milieu différent; mais elles ne font pas toutes arbitraires. Il en eft une qui tient à la nature du Problème, & qui doit fervir à fixer le milieu qu'il faut choifir entre plufieurs obfervations : cette condition eft qu'en fixant à ce point l'inftant du phénomène, l'erreur qui en réfulte foit un *minimum;* or comme dans la théorie ordinaire des hafards, on évalue l'avantage en faifant une fomme des produits de chaque avantage à efpérer, multiplié par la probabilité de l'obtenir, de même ici, l'erreur doit s'eftimer par la fomme des produits de chaque erreur à craindre, multipliée par fa probabilité; le milieu qu'il faut choifir doit donc être tel que la fomme de ces produits foit moindre que pour tout autre inftant.

Suppofons préfentement que dans la courbe des probabilités dont l'équation eft

$$y = \varphi(x) \cdot \varphi'(p - x) \cdot \&c.$$

la valeur de x puiffe s'étendre depuis $-f$ jufqu'à $c - f$, en forte que l'intervalle dans lequel x peut varier foit c; fi l'on fait $x = z - f$, il eft vifible que z pourra varier

depuis $z = 0$ jusqu'à $z = c$, & que les probabilités des différentes valeurs de z seront proportionnelles à y ou à $\varphi(z - f) \cdot \varphi'(p - z + f)$. &c. en sorte qu'on pourra les représenter par ky, k étant un coëfficient constant. Soit h la valeur de z, que l'on doit prendre pour le véritable instant du phénomène; on aura $k\int(h - z) \cdot y\partial z$ pour la somme des erreurs à craindre depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, & multipliées par leur probabilité respective, l'intégrale précédente étant prise pour toute l'étendue de ces limites; on aura ensuite $k\int'(z - h) \cdot y\partial z$ pour la somme des erreurs à craindre depuis $z = h$ jusqu'à $z = c$, multipliées par leur probabilité, le signe $\int'$ servant à indiquer que l'intégrale doit être prise pour toute l'étendue de ces dernières limites; on aura donc

$$k\int(h - z) \cdot y\partial z + k\int' \cdot (z - h) \cdot y\partial z,$$

pour la somme entière des erreurs à craindre, multipliées par leur probabilité, & h doit être tel que cette somme soit un *minimum*. Or si l'on fait varier h de la quantité infiniment petite δh, il est clair que la variation de $\int(h - z) \cdot y\partial z$ sera $\delta h \cdot \int y\partial z$, & que celle de $\int'(z - h) \cdot y\partial z$ sera $- \delta h \cdot \int' \cdot y\partial z$; la variation de la quantité précédente sera donc

$$k\delta h \cdot (\int y\partial z - \int' y\partial z);$$

en égalant cette quantité à zéro par la propriété du *minimum*, on aura

$$\int y\partial z = \int' y\partial z.$$

L'ordonnée correspondante à l'abscisse h qui détermine le milieu qu'il faut choisir, doit donc diviser en deux parties égales l'aire de la courbe des probabilités, comprise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = c$, ce qui donne un moyen très-simple de déterminer ce milieu; & l'on voit qu'il a encore la propriété d'être tel, qu'il est également probable que le véritable instant du phénomène tombe au-dessus ou au-dessous, en sorte qu'on pourroit le nommer *milieu de probabilité.*

XXXI.

TOUTES les fois que les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, &c. qui expriment les loix de facilité des erreurs des obſervations, ſeront connues, la détermination du milieu qu'il faut choiſir entre pluſieurs obſervations, ſera réduite par l'article précédent, à partager une ſurface donnée en deux parties égales, ce qui eſt un Problème de pure analyſe; mais ces fonctions étant le plus ſouvent inconnues, c'eſt au calcul des probabilités à fournir les moyens de ſuppléer à cette ignorance; or on a vu dans l'*article XIII*, que ſi dans ce cas, $\pm\, a$, $\pm\, a'$, $\pm\, a''$, &c. ſont les limites des erreurs de la première, de la deuxième, &c. obſervations, on doit ſuppoſer $\varphi(x) = \frac{1}{2a} . \log . \frac{a}{x}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2a'} . \log . \frac{a'}{x}$, &c. Il ne reſte plus ainſi dans la recherche du réſultat moyen de pluſieurs obſervations, que les difficultés inévitables de l'analyſe; mais il faut convenir qu'elles rendent la méthode précédente d'un très-difficile uſage: auſſi mon objet, en l'expoſant, a été plutôt de faire connoître tout ce que l'analyſe des haſards peut donner de lumières ſur cette matière, que de préſenter aux Obſervateurs une méthode-pratique & d'un uſage commode; on pourra cependant l'employer dans des occaſions très-délicates, telles que celles du paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, dans leſquelles il eſt néceſſaire d'obtenir la plus grande préciſion; le moyen le plus ſimple pour cet objet, eſt de carrer par parties la courbe des probabilités, & de déterminer ainſi l'ordonnée qui diviſe ſa ſurface en deux parties égales.

XXXII.

LA règle ordinaire des milieux arithmétiques, ſe déduit de cette méthode, en ſuppoſant $a = a' = a'' =$ &c. $= \infty$, comme il eſt facile de s'en aſſurer; mais nous allons démontrer un théorème beaucoup plus général, en faiſant voir que cette règle a lieu toutes les fois 1.° que la loi de facilité des

erreurs eſt la même pour toutes les obſervations; 2.° que les mêmes erreurs, ſoit en *plus*, ſoit en *moins*, ſont également poſſibles; 3.° qu'elles peuvent être infinies, & que la fonction qui exprime leurs facilités ne décroît d'une quantité finie, que lorſque x eſt infini, mais qu'alors elle va toujours en diminuant juſqu'au point de devenir nulle.

Pour cela, ſoit $\varphi(\alpha x)$ la loi de facilité des erreurs des obſervations, α étant une quantité infiniment petite; ſoit de plus q la valeur de $\varphi(\alpha x)$, lorſque $\alpha x = 0$, & par conſéquent lorſque x eſt une quantité finie; il eſt évident que l'ordonnée de la courbe des probabilités, depuis $-x = 0$ juſqu'à $-x = \infty$, ſera

$$y = \varphi(\alpha x) . \varphi(\alpha p + \alpha x) . \varphi(\alpha p^{1} + \alpha x) . \&c.$$

En ſuppoſant le nombre des obſervations égal à n, & en négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$y = \varphi(\alpha x)^n + \alpha[p + p^{1} + p^{11} \ldots + p^{(n-1)}] . \varphi(\alpha x)^{n-1} . \frac{\partial . \varphi(\alpha x)}{\partial . \alpha x};$$

or ſi l'on prend l'intégrale $\int \alpha \partial x . \varphi(\alpha x)^{n-1} . \frac{\partial . \varphi(\alpha x)}{\partial . \alpha x}$, depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \infty$, & que l'on ſe rappelle que $\varphi(\alpha x) = q$ lorſque $x = 0$, & que $\varphi(\alpha x) = 0$ lorſque $x = \infty$, on aura

$$\int \alpha \partial x . \varphi(\alpha x)^{n-1} . \frac{\partial . \varphi(\alpha x)}{\partial . \alpha x} = -\frac{1}{n} q^n;$$

ſoit donc A l'intégrale $\int \partial x . \varphi(\alpha x)^n$, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \infty$, & l'on aura

$$A - \frac{1}{n} . [p + p^{1} + p^{11} \ldots\ldots + p^{(n-1)}] q^n,$$

pour l'intégrale $\int y \partial x$ correſpondante aux valeurs négatives de x.

Cette même intégrale priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = p^{(n-1)}$, eſt $p^{(n-1)} . q^n$, parce que l'on peut dans cet

intervalle ſuppoſer $\varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha p - \alpha x) = \&c. = q$; par conſéquent l'ordonnée $y = q^n$.

Depuis $x = p^{(n-1)}$ juſqu'à $x = \infty$, on a

$$y = \varphi(\alpha x) . \varphi(\alpha x - \alpha p) . \varphi(\alpha x - \alpha p^{\prime}) . \&c.$$

ou

$$y = \varphi(\alpha x)^n - \alpha[p + p^{\prime} + p^{\prime\prime} \ldots + p^{(n-1)}] . \varphi(\alpha x)^{n-1} . \frac{\partial . \varphi(\alpha x)}{\partial . \alpha x};$$

or l'intégrale $\int \alpha \partial x . \varphi(\alpha x)^{n-1} . \frac{\partial . \varphi(\alpha x)}{\partial . \alpha x}$, priſe depuis $x = p^{(n-1)}$ juſqu'à $x = \infty$, eſt $-\frac{1}{n} . q^n$; de plus l'intégrale $\int \partial x . \varphi(\alpha x)^n$, priſe dans le même intervalle, eſt évidemment égale à $A - p^{(n-1)} . q^n$; on aura donc

$$A - p^{(n-1)} . q^n + \frac{1}{n} . [p + p^{\prime} \ldots + p^{(n-1)}],$$

pour la valeur de $\int y \partial x$, priſe dans cet intervalle. Partant l'aire entière de la courbe des probabilités, eſt égale à $2A$; or en nommant h l'abſciſſe dont l'ordonnée diviſe cette aire en deux parties égales; la partie de l'aire qui eſt à gauche de cette ordonnée, ſera viſiblement égale à

$$A - \frac{1}{n} . [p + p^{\prime} + p^{\prime\prime} \ldots + p^{(n-1)}] . q^n + h q^n;$$

en l'égalant à A, on aura

$$h = \frac{1}{n} . [p + p^{\prime} + p^{\prime\prime} \ldots + p^{(n-1)}];$$

ce qui donne pour h la même valeur que la règle des milieux arithmétiques. Les ſuppoſitions qui nous ont conduit à ce réſultat, étant hors de toute vraiſemblance, on voit combien il eſt néceſſaire dans les occaſions délicates, de faire uſage de la méthode que nous avons propoſée.

XXXIII.

XXXIII.

Il eſt facile d'appliquer la théorie précédente à la correction des inſtrumens ; pour cela, ſuppoſons qu'en vérifiant un inſtrument, & en répétant un grand nombre de fois la même vérification, on ait trouvé n différentes erreurs p, p', p'', &c. Soient i, i', i'', &c. les nombres de fois que chacune d'elle a été répétée ; en repréſentant par x, x', x'', &c. leurs facilités reſpectives, on aura $k \,.\, x^{i} \,.\, x'^{i'} \,.\, x''^{i''}$, &c. pour la probabilité de l'évènement obſervé, k étant un coëfficient conſtant; la probabilité de ce Syſtème de facilités ſera donc

$$\frac{x^{i} . x'^{i'} . x''^{i''} . \&c. \partial x . \partial x' . \partial x'' . \&c.}{\int^{n} . [x^{i} . x'^{i'} . x''^{i''} . \&c. \partial x . \partial x' . \partial x'' . \&c.]};$$

les intégrales du dénominateur étant priſes pour toutes les valeurs poſſibles de x, x', x'', &c. Pour en conclure la probabilité de x, on intégrera la fonction $x^{i} . x'^{i'} . x''^{i''}$. &c. $\partial x . \partial x' . \partial x''$. &c. d'abord par rapport à x', depuis $x' = 0$, juſqu'à $x' = 1 - x - x'' -$ &c. enſuite par rapport à x'', depuis $x'' = 0$ juſqu'à $x'' = 1 - x - x''' -$ &c. & ainſi de ſuite, ce qui donne pour dernière intégrale,

$$\frac{1.2.3 \ldots i' . 1.2.3 \ldots i'' . 1.2.3 \ldots i''' . \&c.}{1.2.3.4 \ldots (i' + i'' + i''' + \&c.)} . x^{i} . \partial x . (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1};$$

on aura donc pour la probabilité que la facilité x ſera compriſe dans des limites données,

$$\frac{\int x^{i} . \partial x . (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1}}{\int x^{i} . \partial x . (1 - x)^{i' + i'' + i''' + \&c. + n - 1}};$$

l'intégrale du numérateur étant priſe dans l'étendue de ces limites, & celle du dénominateur étant priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; or cette probabilité ſe déterminera par la formule de l'*art. XVIII*, en y changeant p en i, & q en $i' + i'' +$ &c. $+ v - 1$.

Examinons préſentement la correction qu'il faut faire à une nouvelle obſervation faite avec cet inſtrument : ſuppoſons qu'il ſoit un quart de cercle, & qu'en prenant un grand nombre de fois une même hauteur apparente a, on ait trouvé entre cette hauteur & la hauteur réelle, n différences qui s'étendent depuis $a - \alpha$ juſqu'à $a + \alpha^{\text{I}}$. Suppoſons de plus, qu'en partageant l'intervalle $\alpha + \alpha^{\text{I}}$ en $n - 1$ parties très-petites, on ait trouvé que l'erreur $- \alpha$ a été répétée i fois; que l'erreur $- \alpha + \frac{\alpha + \alpha^{\text{I}}}{n - 1}$ a été répétée i^{I} fois; que l'erreur $- \alpha + \frac{2(\alpha + \alpha^{\text{I}})}{n - 1}$ a été répétée i^{II} fois, & ainſi de ſuite; ſoient enfin x, x^{I}, x^{II}, &c. les facilités de ces erreurs; on aura par l'*art. XIV*,

$$\frac{\int^n . x^{i+1} . x^{\text{I}\,i^{\text{I}}} . x^{\text{II}\,i^{\text{II}}} . \&c. \partial x . \partial x^{\text{I}} . \partial x^{\text{II}} . \&c.}{\int^n . x^i . x^{\text{I}\,i^{\text{I}}} . x^{\text{II}\,i^{\text{II}}} . \&c. \partial x . \partial x^{\text{I}} . \partial x^{\text{II}} . \&c.},$$

pour la probabilité que l'erreur d'une nouvelle hauteur a, obſervée avec ce quart de cercle, ſera $- \alpha$, les intégrales du numérateur & du dénominateur étant priſes pour toutes les valeurs poſſibles de x, x^{I}, x^{II}, &c. ce qui revient à intégrer l'un & l'autre, d'abord par rapport à x depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1 - x^{\text{I}} - x^{\text{II}} -$ &c. enſuite par rapport à x^{I}, depuis $x^{\text{I}} = 0$ juſqu'à $x^{\text{I}} = 1 - x^{\text{II}} -$ &c. & ainſi du reſte. On trouvera de cette manière, que la fraction précédente ſe réduit à $\frac{i + 1}{i + i^{\text{I}} + i^{\text{II}} + \&c. n + 1}$; cette quantité exprime donc la probabilité que l'erreur de l'obſervation ſera $- \alpha$; en y changeant i ſucceſſivement en i^{I}, i^{II}, &c. & réciproquement, on aura les probabilités que l'erreur de l'obſervation ſera $- \alpha + \frac{\alpha + \alpha^{\text{I}}}{n - 1}$ ou $- \alpha + \frac{2(\alpha + \alpha^{\text{I}})}{n - 1}$, &c. On concevra donc élevées ſur les extrémités & ſur chacune des diviſions de l'intervalle $\alpha + \alpha^{\text{I}}$, des ordonnées égales ou proportionnelles à ces

probabilités, & dont les extrémités, à cauſe de la petiteſſe des diviſions, formeront ſenſiblement une ligne courbe; cela poſé, l'abſciſſe dont l'ordonnée partagera l'aire de cette courbe en deux parties égales, ſera par l'*article XXIX*, celle dont il faut faire uſage, en ſorte que ſi l'on nomme h cette abſciſſe comptée depuis l'origine de l'intervalle $\alpha + \alpha'$, qui répond à l'erreur $-\alpha$, la correction qu'il faudra faire à la hauteur obſervée a ſera $h - \alpha$, & par conſéquent, il faudra ſuppoſer la hauteur réelle égale à $a + h - \alpha$.

De-là réſulte cette règle fort ſimple pour corriger l'inſtrument. *Ajoutez continuellement les quantités* $i + i' + 2$, $i' + i'' + 2$, $i'' + i''' + 2$, &c. *juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu à une ſomme égale, ou immédiatement plus petite d'une quantité quelconque* μ *que la moitié de la ſomme* $i + 2i' + 2i'' \ldots\ldots + 2i^{(n-2)} + i^{(n-1)} + 2n - 2$. *Soit* r *le nombre des quantités* $i + i' + 2$, $i' + i'' + 2$, &c. *que vous aurez ainſi ajoutées;* l *le nombre des parties* $\frac{\alpha + \alpha'}{n - 1}$, *contenues dans* α; *la correction qu'il faut faire à la hauteur* a, *ou ce qui revient au même, la quantité qu'il faut lui ajouter ſera à très-peu près,*

$$\left(r - l + \frac{\mu}{i^{(r)} + i^{(r+1)} + 2}\right) . \frac{\alpha + \alpha'}{n - 1}.$$

Si au lieu de fixer la véritable hauteur au point de l'abſciſſe, dont l'ordonnée diviſe l'aire de la courbe en deux parties égales, on la fixoit au point dont l'ordonnée paſſe par le centre de gravité de cette aire, on auroit la même correction que donne la méthode des milieux arithmétiques: cette méthode revient donc dans ce cas à prendre pour *milieu* le point où la ſomme des erreurs en *moins*, multipliées par leur probabilité, eſt égale à la ſomme des erreurs en *plus*, multipliées par leur probabilité.

Lorſqu'une fois on connoît la loi de facilité des erreurs d'un inſtrument, on peut en conclure celle des erreurs d'un réſultat quelconque déduit d'obſervations faites avec cet

inſtrument, tel que le midi conclu par deux hauteurs correſpondantes. En effet, ſi l'on nomme z, z', z'', &c. les erreurs des obſervations, que nous ſuppoſerons ici très-petites; la correction qu'il faudra faire au réſultat, ſera $Az + A'z' + A''z'' +$ &c. A, A', A'', &c. étant des coëfficiens conſtans, dépendans de la nature du réſultat que l'on déduit des obſervations. Si l'on ſuppoſe cette correction égale à x, on aura

$$A \cdot z + A' \cdot z' + A'' \cdot z'' + \text{\&c.} = x.$$

Il ne s'agira plus enſuite que de déterminer par la méthode de l'*article VII*, la probabilité de cette équation, au moyen de la loi de facilité des erreurs z, z', z''; on aura ainſi pour cette probabilité une fonction de x, que nous déſignerons par $\varphi(x)$; en ſorte que l'équation de la courbe des probabilités des valeurs de x, ſera $y = \varphi(x)$. Maintenant ſi l'on prend l'intégrale $\int y \partial x$ pour toute l'étendue des limites dans leſquelles x peut varier, l'abſciſſe h qui diviſera en deux parties égales la ſurface que repréſente cette intégrale, ſera la correction qu'il faudra faire au réſultat propoſé.



SECOND MÉMOIRE
SUR
L'ACTION COMPARÉE DE L'ACIDE NITREUX ET DE L'ACIDE MARIN
Sur les Sels vitrioliques à base terreuse.

Par M. CORNET.

J'AI déterminé, dans le premier Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie en 1774, l'action de l'acide marin sur les différens sels neutres vitrioliques & nitreux à base d'alkali fixe & volatil; j'ai démontré que tous ces sels étoient décomposés par cet acide, pourvu toutefois que l'on employât, pour opérer cette décomposition, de l'acide marin dans le plus grand état de concentration. Il me restoit encore à faire connoître l'action comparée des deux acides nitreux & marin sur les autres sels neutres à base terreuse & à base métallique; mais, comme l'examen de ces diverses substances salines exigeoit que j'entrasse dans des détails trop étendus, & qui auroient passé les bornes d'un Mémoire, j'ai cru, pour mettre plus d'ordre dans ce travail, devoir me borner à traiter aujourd'hui des sels vitrioliques à base terreuse, me réservant de donner, dans un autre temps, un troisième Mémoire sur ceux à base métallique.

Lû à l'Académie le 23 Déc. 1778.

Quoique je n'aie pu retirer de la plupart des expériences que j'ai faites sur ces différens sels, des inductions aussi certaines que sur ceux à base d'alkali fixe & volatil, j'ai pensé cependant que ce travail, considéré d'une certaine manière, pourroit devenir utile, & pourroit répandre quelque jour sur différens points de Chimie & d'Histoire naturelle: M. Baumé paroît être jusqu'ici le seul Chimiste qui se soit occupé de cet objet. L'examen qu'il a fait des acides nitreux &

marin ſur le gypſe ne lui a rien fourni de particulier; mais il s'eſt aſſuré que ce ſel n'étoit point décompoſé par aucuns des acides minéraux, & il eſt réſulté de ces expériences que plus l'eau étoit imprégnée d'acide, & plus ce ſel acquéroit de ſolubilité, au point qu'il eſt parvenu à diſſoudre par ce moyen, dans huit onces d'eau bouillante chargée de deux gros d'acide nitreux, quarante-huit grains de gypſe, mais qui n'avoit ſouffert aucune altération. On peut conſulter ſur cela le premier volume de ſa Chimie, *page 201.*

Comme M. Baumé n'a employé ſur le gypſe que des acides affoiblis, j'ai cru devoir répéter ces expériences dans l'eſpérance qu'en opérant ſur ce ſel à baſe terreuſe, ainſi que je l'avois déjà fait ſur ceux à baſe d'alkali fixe & volatil, c'eſt-à-dire en employant des acides plus concentrés, je pourrois obtenir des réſultats un peu différens; mais le ſuccès n'a pas répondu à mon attente, & je me ſuis convaincu, ainſi qu'on le verra par les expériences ſuivantes, que ce ſel terreux, traité de toutes les manières avec les acides, n'y ſouffroit aucune altération, ce qu'avoit déjà remarqué M. Baumé.

Acide nitreux & Gypſe.

Sur un gros de gypſe bien pur & réduit en poudre, j'ai verſé une once de bon acide nitreux: ce mélange n'a produit aucun froid ſenſible; il ne s'eſt fait aucune effervefcence; cet acide, qui étoit clair & ſans couleur, digéré pendant quelque temps à une chaleur douce ſur le gypſe, ne s'étoit point coloré; j'ai fait bouillir ce mélange ſans aucune addition d'eau; il ne s'eſt preſque point diſſout de gypſe, puiſque l'alkali fixe verſé ſur cet acide, n'occaſionna à peine qu'un petit nuage laiteux; j'ajoutai à ce mélange une once d'eau diſtillée que je fis bouillir également; je m'aperçus que, malgré cette petite quantité d'eau, le gypſe ſe diſſolvoit très-bien, puiſque je parvins à le diſſoudre complètement, en ajoutant encore une demi-once: cette diſſolution reſta claire & limpide tant qu'elle fut bouillante; mais, lorſqu'elle

commença à ſe refroidir, preſque tout ce ſel ſe précipita en petits criſtaux ſoyeux & ſi volumineux, que toute cette matière ne formoit plus qu'une ſorte de gelée. Ce *magma*, expoſé de nouveau à une douce chaleur, ſe liquéfia très-promptement, & je parvins, par l'addition d'une nouvelle once d'eau, à former une diſſolution claire & limpide, & qui reſta telle par le refroidiſſement. C'étoit donc un gros de gypſe qui étoit tenu en diſſolution dans deux onces & demie d'eau diſtillée à la faveur d'une once d'acide nitreux: j'expoſai cette liqueur à l'évaporation inſenſible dans une capſule couverte ſeulement d'un papier. Pendant le premier mois, cette liqueur reſta claire & ne laiſſa rien précipiter; mais il parut enſuite à la ſurface pluſieurs petits criſtaux très-remarquables par leur configuration: la plupart étoient diſpoſés en longues aiguilles iſolées qui étoient au fond de la liqueur, mais le plus grand nombre ſormoit des points qui étoient environnés circulairement de longues aiguilles pareilles aux premières, & ces aiguilles y aboutiſſoient comme à un centre, en ſorte que cela repréſentoit autant de petits corps arrondis, deſquels partoient une infinité de rayons qui ſe divergeoient en différens ſens; la plupart de ces aiguilles étoient très-aiguës, mais beaucoup étoient taillées en biſeau. Ces criſtaux étoient abſolument ſemblables à ceux qu'a obtenus M. Macquer, de la diſſolution de la craie par l'acide nitreux, dont on en trouvera la deſcription dans le Mémoire de ce ſavant Chimiſte, ſur la diſſolution des ſels par l'eſprit-de-vin, dans le Journal de Phyſique du mois de Février 1771. Ce ſel, ainſi criſtalliſé, ayant été égoutté ſur le papier gris, avoit perdu ſon acidité & étoit de vraie ſélénite qui n'avoit été nullement altérée par l'acide nitreux.

La même expérience, répétée avec l'acide marin fumant, m'a fourni les mêmes réſultats qu'avec l'acide nitreux, à la ſeule différence près qu'il m'a fallu une plus grande quantité d'eau pour tenir un gros de gypſe en diſſolution: les criſtaux que j'ai obtenus n'étoient pas auſſi formés de même; ils étoient tous diſpoſés en longues aiguilles qui s'entre-croiſoient;

mais, de quelque manière que je m'y sois pris, je n'ai pu m'en procurer comme ceux formés par l'acide nitreux, ce qui prouve cependant que l'acide nitreux coopère de son côté à l'arrangement que prennent les molécules salines entr'elles: la sélénite, dans ces deux cas, n'avoit perdu aucune de ses propriétés.

L'alun, examiné de même avec les acides, n'a pas été décomposé: j'ai versé sur deux gros de ce sel en cristaux une once d'acide nitreux très-pur; il s'est excité, dans l'instant du mélange, assez de froid pour faire descendre le thermomètre de cinq degrés, la température étant à dix au-dessus de la glace; ce sel s'est dissout très-facilement & sans aucune addition d'eau dans cet acide; la dissolution étoit claire, sans couleur & n'avoit nulle autre odeur que celle de l'acide nitreux; soumise à l'évaporation, j'en ai retiré, par le refroidissement, de petits cristaux octaèdres qui étoient de véritable alun.

J'ai répété cette expérience d'une autre manière: j'ai mis dans une cornue de verre une once d'acide nitreux fumant sur deux gros d'alun en poudre; j'ai retiré, par la distillation, environ la moitié de l'acide que j'avois employé, & j'ai obtenu, par le refroidissement de la liqueur qui étoit restée dans la cornue, l'alun sans qu'il ait souffert aucune altération.

La même expérience répétée avec l'acide marin fumant n'a pas eu plus de succès: le froid qui s'est passé à l'instant du mélange n'a pas été plus intense, & la dissolution de ce sel s'étoit également faite sans addition d'eau; ce qu'il y a eu de plus remarquable, c'est que les vapeurs de cet acide qui étoit très-fumant, ont été absorbées sur le champ par l'alun & n'étoient plus sensibles; la dissolution étoit très-claire, mais un peu jaune; soumise à l'évaporation, comme la précédente, j'en ai tiré de vrais cristaux d'alun.

Cette dernière expérience paroît être entièrement contradictoire avec celle de M. Priestley: ce célèbre Physicien, dans son premier volume d'Expériences & d'Observations sur l'air, avance que l'alun & le gypse sont décomposés par l'air acide

acide marin ; que cet air s'empare de la terre de ces sels, & qu'il en résulte des composés qui ont l'acide marin pour base. On peut consulter sur cet objet les *pages 200 & suivantes.*

J'ai répété les expériences de M. Priestley dans un bain de mercure, ainsi qu'il l'a fait : ces deux sels ont été effectivement réduits en poudre par le contact de cet air acide, comme je l'ai obtenu avec l'acide marin fumant, mais ils n'ont point été décomposés ; j'ai retiré de la dissolution de ces sels dans l'eau de très-beaux cristaux d'alun & de gypse, ce qui ne seroit point arrivé si effectivement ils eussent été décomposés par l'acide marin.

Il résulte évidemment des expériences que je viens de rapporter, que l'acide vitriolique, lorsqu'il est combiné avec des terres quelconques, adhère à ces dernières d'une manière plus intime qu'avec les substances alkalines : il paroît vraisemblable que ce qui détermine cette connexion plus forte, dépend de sa manière d'être ; que cet acide, dans l'alun & dans le gypse, se trouvant seulement uni par le *latus* terreux, sans le concours du phlogistique, forme des composés plus simples & qui présentent plus d'obstacles que les autres sels pour leurs décompositions. Le sentiment que j'adopte pour expliquer ce phénomène ne me paroît pas exempt de toute objection : je m'attends même que l'on me dira, *mais si l'acide vitriolique, combiné avec des substances terreuses, contracte avec elles une adhérence si forte, pourquoi cependant cette cohésion se trouve-t-elle rompue lorsqu'on y présente un alkali quelconque !* Je répondrai à cela que la cause de la décomposition de ces sels par les alkalis, ne peut être attribuée qu'au phlogistique qu'ils contiennent, & que c'est peut-être de cette plus ou moins grande quantité de phlogistique, d'où dépend la différence qui se trouve entre les alkalis & les terres calcaires. Mais ne serois-je pas aussi autorisé à demander pourquoi tous les sels formés par l'union de l'acide vitriolique avec des substances alkalines quelconques, sont-ils décomposés par tous les sels à base terreuse, soit nitreux ou marins, tandis qu'il est généralement reçu que l'acide vitriolique a plus d'affinité

avec les ſubſtances alkalines qu'avec les terres? C'eſt ce qui ſe trouve entièrement oppoſé aux expériences dont je vais rendre compte.

J'ai fait diſſoudre dans deux matras, une demi-once de tartre vitriolé, & autant de ſel de Glauber; j'ai verſé ſur chaque diſſolution une once d'huile de chaux ou de ſel marin à baſe terreuſe; ces deux diſſolutions ſe ſont troublées, & il s'eſt fait un précipité aſſez conſidérable; une portion de cette matière précipitée s'étoit attachée en forme de criſtaux aux parois du matras; j'ai filtré la liqueur à travers un filtre de papier gris, la matière reſtée ſur le filtre étoit une maſſe remplie de petits criſtaux ſoyeux & argentins qui ſe diſſolvoient dans l'eau bouillante, & qui avoient toutes les propriétés d'une vraie ſélénite, ce que j'ai reconnu par l'examen que j'en ai fait; la liqueur ſoumiſe à l'évaporation me fournit encore de nouvelles preuves de l'exiſtence de la ſélénite, puiſque j'obtins d'une part du ſel marin ordinaire, & de l'autre du ſel fébrifuge de Sylvius.

La même expérience, répétée avec le nitre à baſe terreuſe, m'a fourni le même réſultat: le tartre vitriolé & le ſel de Glauber ont été également décompoſés, & j'ai obtenu, par le mélange de ces ſubſtances, de la ſélénite, du nitre & du nitre quadrangulaire.

J'ai cru devoir m'aſſurer auſſi ſi le nitre & le ſel marin à baſe de terre magnéſienne décompoſeroient également le tartre vitriolé & le ſel de Glauber: la décompoſition de ces deux ſels s'eſt faite très-promptement, mais la liqueur ne s'eſt point troublée, & il ne s'eſt fait aucun précipité comme aux expériences précédentes; ce qui ne m'a point ſurpris, parce que le ſel qui réſulte de la combinaiſon de cette terre magnéſienne avec l'acide vitriolique, eſt infiniment plus ſoluble dans l'eau que celui qui provient de la combinaiſon du même acide avec la terre calcaire.

Quoique la terre magnéſienne ait un caractère particulier, & qui la diſtingue eſſentiellement de la terre calcaire, je crois néanmoins pouvoir conjecturer qu'il y a entre ces deux

terres une analogie qui en démontre en quelque ſorte l'identité ; & je penſe que ce qui détermine cette différence ne me paroît dépendre que de ce que la terre magnéſienne ſe rapproche davantage de l'état ſalin que la terre calcaire. Au reſte, je me propoſe de faire ſur cette terre un travail dont je ferai part dans le temps à l'Académie.

Il me reſtoit encore une expérience à faire, c'étoit d'examiner ſi le même ſel vitriolique à baſe de terre magnéſienne, qui ſe trouve ſi généralement répandu, ſeroit également décompoſé par le nitre ou le ſel marin à baſe terreuſe ; je verſai, pour cet effet, ſur une diſſolution de mon ſel magnéſien du ſel marin à baſe terreuſe; la liqueur auſſitôt devint blanche & laiteuſe, & il ſe fit quelque temps après, un précipité très-abondant que je reconnus pour être de la ſélénite, ce qui me prouva que ce ſel magnéſien étoit ſoumis à la même loi que ceux qui ſont combinés avec les alkalis.

Ces expériences, qui paroiſſent faire autant d'exceptions à la table d'affinité, en démontrant que l'acide vitriolique cherche plutôt à ſe combiner avec les terres qu'avec les alkalis, prouvent auſſi la puiſſance qu'ont les acides nitreux & marins ſur ces dernières ſubſtances, & expliquent clairement pourquoi les ſels vitrioliques à baſe terreuſe décompoſent ſi difficilement le nitre & le ſel marin.

Pluſieurs Chimiſtes avoient déjà fait ces expériences. M. Margraff, dans l'examen qu'il a fait du ſel admirable, *page 383* du ſecond volume de ſes Opuſcules *, dit que la diſſolution du ſel de Glauber & du tartre vitriolé précipite les diſſolutions de terre calcaire faites par l'acide nitreux ou l'acide marin; mais il n'entre point dans un plus grand détail & ne cherche pas à en expliquer la cauſe.

* *Traduction françoiſe.*

M. Pott, dans ſa Diſſertation ſur le ſel commun, ſecond volume de ſa traduction Françoiſe, *page 194,* dit que le ſel marin à baſe terreuſe eſt précipité par l'huile de tartre en une maſſe preſque gélatineuſe, & que l'huile de vitriol procure la même coagulation. On ſeroit porté à croire qu'il regardoit ce précipité comme purement terreux, ſi à la *page 205* de

cette même Dissertation, il ne remarquoit pas que le sel marin à base terreuse est décomposé par le vitriol ou l'alun, & que dans tous ces cas, l'acide vitriolique enlève à l'esprit de sel sa terre calcaire, & que l'acide marin s'évapore. Son Traducteur ajoute dans ses remarques, qu'il en résulte un sel séléniteux; mais on voit que M. Pott n'a point employé, pour faire ces expériences, de l'acide vitriolique combiné avec une base alkaline.

Stahl, dans son Traité des Sels, *page 339*, avance aussi la même chose, mais sans donner plus d'explication.

Plusieurs Chimistes indiquent ce moyen pour reconnoître l'acide vitriolique par-tout où il peut être engagé, en y ajoûtant du sel marin à base terreuse.

M. le Roi, de la Société royale des Sciences de Montpellier, dans un Ouvrage latin que cet habile Médecin a fait, sur la manière d'analyser les Eaux minérales, prescrit également cette méthode, mais il paroît aussi que la plupart des Auteurs qui en ont parlé, n'ont pas cherché beaucoup à éclaircir ce fait, puisqu'ils ne font aucune mention de la nature du précipité qui en résulte: Boulduc paroît être celui qui a donné le plus d'étendue à ces expériences. On trouve dans le Volume de l'Académie des Sciences pour l'*année 1729*, dans son Analyse de l'eau minérale de Bourbon-l'Archambaut, *page 266*, que l'unique moyen qui lui a servi avec succès pour découvrir l'acide vitriolique engagé dans quelque base, avoit été l'huile de chaux; que pour lors cet acide quitte sa base & se transporte sur la chaux, avec laquelle il fait une espèce de cristallisation, que ni l'eau commune ni les acides ne pouvoient dissoudre; mais il dit d'une manière beaucoup plus positive encore dans son Analyse des eaux de Forges, insérée dans le Volume de l'Académie pour l'*année 1735*, *page 450*, que quand on verse de l'huile de chaux sur une dissolution de sel de Glauber, l'acide vitriolique de ce sel quitte sa base, s'unit avec la chaux contenue dans l'huile & forme de la sélénite. Ayant continué l'évaporation, & même ayant fait dessécher la matière, il remarque

qu'il a toujours obtenu de la félénite. J'ai cru devoir rapporter tous ces faits, afin d'éclaircir un point de doctrine qui eft encore ignoré de beaucoup de Chimiftes, puifque plufieurs ont regardé ce précipité comme purement terreux, & afin de rendre à Boulduc l'antériorité d'une découverte qui lui appartient, & dont cependant aucuns Chimiftes n'ont fait mention. On peut déduire, ce me femble, des expériences que je viens de rapporter, que l'acide marin eft de tous les acides minéraux celui qui a le plus de difpofition à s'unir avec les bafes alkalines, puifque le fel marin à bafe terreufe décompofe également le nitre, comme le tartre vitriolé, en s'emparant de leur bafe, au lieu que le nitre à bafe terreufe ne décompofe pas le fel marin; ce qui prouve que ces deux acides, vitriolique & nitreux, tendent toujours de préférence à fe combiner avec les terres, à former des compofés plus fimples, & à fe rapprocher par-là des vœux de la Nature: de-là doivent naître fans ceffe des variations confidérables dans le produit des corps qu'on foumet à l'analyfe, occafionné par la réaction des différentes fubftances qui les compofent; auffi arrive-t-il fouvent que dans de certains mélanges on obtient des réfultats tout-à-fait oppofés & contraires à ceux qu'on avoit droit d'efpérer: telle eft, par exemple, la félénite que l'on forme par l'union du fel de Glauber & du fel marin à bafe terreufe, & telle eft auffi celle que l'on retire en plus ou moins grande quantité de l'analyfe d'une eau minérale, & dont le produit eft fufceptible de varier felon la rapidité plus ou moins grande de l'évaporation; c'eft ce que j'aurai occafion de faire voir à la fin de ce Mémoire. Mais cette félénite que l'on forme ainfi en petite quantité par l'art, en uniffant le fel marin à bafe terreufe avec le tartre vitriolé ou le fel de Glauber, la Nature paroît tous les jours employer ce même moyen pour la former plus en grand: la mer, ce laboratoire immenfe, renferme dans fon fein les matériaux propres à la former; c'eft par fon mouvement & le balancement continuel de fes eaux que doivent s'opérer fans ceffe ces doubles décompofitions: tout concourt à le prouver;

les différentes analyſes de l'eau de la mer le démontrent. M. Gaubius, dans ſes *Adverſaria*, rapporte qu'il a retiré, par l'analyſe de l'eau de la mer Méditerranée, beaucoup de ſélénite, de ſel de Glauber & de ſel marin à baſe terreuſe; & les autres Chimiſtes qui ont eu occaſion de l'analyſer, y reconnoiſſent tous les mêmes produits. J'ai été à portée de voir évaporer ſouvent de l'eau ſalée dans les ſalines de Salins en Franche-comté : à peine cette liqueur commence-t-elle à s'échauffer qu'elle ſe trouble; le précipité qui ſe forme, appelé *ſchlot*, ne démontre-t-il pas encore ce que je viens d'avancer? la double décompoſition des ſels qu'elle tenoit en diſſolution, puiſque l'on retire, par l'examen de cette ſubſtance, de la ſélénite en très-grande quantité qui ſe trouve mêlée de ſel de Glauber & de ſel marin à baſe terreuſe: mais ſi le ſel de Glauber ne contribuoit pas lui-même à la formation de cette ſélénite contenue dans le *ſchlot*, quelle raiſon donneroit-on de ſa préſence dans cette matière? car il doit paroître bien ſingulier que le ſel de Glauber qui, comme l'on ſait, eſt ſi ſoluble dans l'eau, puiſſe ſe précipiter avec le *ſchlot*, tandis que le ſel marin, infiniment moins ſoluble, reſte en pleine diſſolution. Les Chimiſtes qui ont parlé ſur cet objet, ſe ſont contentés de dire que le ſel de Glauber ne ſe trouvoit ainſi mêlé avec le *ſchlot*, que par un certain degré d'affinité & d'adhérence qu'il avoit avec ces ſels: on s'eſt contenté juſqu'ici de cette explication, mais il me ſemble cependant que l'on pourroit avancer que cette ſélénite contenue dans le *ſchlot*, eſt plutôt le réſultat de la formation inſtantanée du mélange du ſel de Glauber & du ſel marin à baſe terreuſe, & que le ſel de Glauber que l'on y trouve en nature, eſt ſuſceptible de former avec le ſel marin à baſe terreuſe qui y reſte toujours engagé, de la ſélénite, ſur-tout ſi ce mélange eſt animé par un léger degré de chaleur ou de mouvement, qui paroiſſent eſſentiels pour opérer cette décompoſition d'une manière plus ſenſible.

L'adhérence du ſel marin à baſe terreuſe dans le *ſchlot*, malgré les lotions répétées dans l'eau bouillante, que lui a

fait subir M. Baumé, est une preuve certaine de ce que je viens d'avancer. Si l'on considère les carrières immenses de gypse si bien cristallisé, à quelle autre substance qu'aux eaux de la mer doit-on en attribuer l'origine? Quelle énorme quantité d'eau n'a-t-il pas fallu pour la formation de ces montagnes salées, dont la régularité des cristaux annonce la succession de temps nécessaire pour l'arrangement symétrique de ces molécules salines, & dont la différence si marquée avec les albâtres gypseux, prouve d'une manière non équivoque que ces derniers ont été formés rapidement & par dépôt? A quoi pourra-t-on mieux attribuer la formation de cette sélénite, si ce n'est à la double décomposition qui s'excite sans cesse par le balancement & l'agitation continuelle des eaux de la mer?

Model, dans le premier volume de ses Récréations chimiques, *page 166 & suivantes*, avoit déjà quelques doutes sur la formation de la sélénite : l'analyse qu'il a faite de l'eau de Bristol, & de l'évaporation de laquelle il a retiré de la sélénite & du sel de Glauber, lui avoit fait faire cette remarque. Il se fait à lui-même deux questions; la première, d'où vient la sélénite? la seconde, cette substance se trouve-t-elle dans l'eau comme sélénite, ou est-elle l'ouvrage du feu? Il regarde la première question comme très-facile à résoudre; mais la décision de la seconde lui paroît extrêmement difficile. Il entre ensuite dans des détails qu'il seroit trop long de rapporter ici, & cherche à expliquer du mieux qu'il lui est possible, la formation de cette sélénite: on verra que pour en établir la théorie, il est obligé d'avoir recours à une espèce de mine de soufre ou à des pyrites sulfureuses dans l'état de décomposition, & dont l'acide se combinant avec les terres alkalines, forme la sélénite. Il dit plus, que pendant l'évaporation de cette eau, le soufre subtil ou l'acide vitriolique, forme avec les parties terrestres, grossières, une sélénite, & du sel de Glauber avec les parties les plus tenues : cette explication de Model paroît bien hasardée; aussi ne la donne-t-il lui-même que comme conjecture; car,

pour que cette théorie ait lieu, il faudroit admettre le concours des pyrites ou la décompoſition du ſoufre dans toutes les eaux, puiſque, par l'analyſe, on retire preſque de toutes du ſel marin à baſe terreuſe, de la ſélénite & du ſel de Glauber.

Le Traducteur de Model, M. Parmentier, dans ſes Notes placées à la ſuite de la Diſſertation que je viens de citer, fait, avec raiſon, un reproche à Model, de n'avoir point aperçu dans ſon analyſe de l'eau de Briſtol, le ſel marin à baſe terreuſe, qui a été découvert depuis par M.rs les Commiſſaires de la Faculté de Médecine de Paris, dans leur Analyſe des Eaux de Ville-d'Avray, de Sainte-Reine, &c. Il reprend en ſous-œuvre les deux queſtions propoſées par Model, & tâche d'en donner la ſolution : il avance, de même que lui, que cette ſélénite n'eſt dûe qu'à la deſtruction des pyrites ſulfureuſes ou à celle du foie de ſoufre ; mais il faudroit, ce me ſemble, pour que cette hypothèſe puiſſe avoir quelque degré de vraiſemblance, admettre qu'il ſe trouve également dans toutes les eaux, des pyrites ſulfureuſes en décompoſition, & dans l'état convenable à former de la ſélénite ; ce qui, je penſe, ne doit pas arriver conſtamment, puiſqu'il ſe trouve des endroits où l'on n'aperçoit aucun veſtige ni de ſoufre ni de pyrite, & où néanmoins les ſources qui traverſent ces terres fourniſſent beaucoup de ſélénite. Il me ſemble qu'il ſeroit plus ſimple de rapporter la ſélénite qu'on retire de l'analyſe de l'eau de Briſtol, à la double décompoſition du ſel marin à baſe terreuſe & du ſel de Glauber, ingrédiens qui ſe trouvent dans cette eau, qu'à la ſuppoſition gratuite de la deſtruction des pyrites ſulfureuſes ou du foie de ſoufre.

Je crois avoir ſuffiſamment développé dans le cours de ce Mémoire, la première queſtion propoſée par Model, ſur la formation de la ſélénite ; je penſe que c'eſt dans la mer qu'eſt le principal magaſin de ce ſel, bien convaincu cependant qu'il s'en forme tous les jours dans les entrailles de la terre, par la décompoſition des pyrites ſulfureuſes, mais auſſi, que c'eſt un infiniment petit relativement à ce qui doit ſe paſſer dans le ſein de la mer ; au reſte, je ſuis auſſi fondé

fondé à croire que l'acide vitriolique qui sert à former le soufre est tiré de la sélénite, que de penser que la sélénite elle-même soit formée par l'acide du soufre; car on sait que pour que le soufre puisse se former, il faut le contact immédiat du phlogistique, & l'acide vitriolique dans un certain état de concentration: or, pour trouver cet état de concentration, ce ne peut être que lorsqu'il est combiné d'une manière quelconque; pour lors, les molécules acides se trouvent rapprochées, & dans un état de division convenable à pouvoir s'unir facilement avec le phlogistique, & à former du soufre; c'est ce qu'on obtient facilement par l'Art, en combinant la sélénite ou les sels vitrioliques avec le charbon. Mais il paroît que la Nature, ainsi que l'a fort bien dit Bernard Palissi, emploie plutôt la voie humide, pour ces combinaisons, que la voie sèche, & je pense qu'il se produit peut-être plus de soufre par cette voie que par la voie sèche: ce que je viens de dire ne doit être regardé que comme très-conjectural; car, pour établir sur cet objet une théorie plus juste, il faudroit connoître les principes qui constituent l'acide vitriolique, & les moyens que la Nature emploie pour le former.

Quant à la seconde question, savoir, si la sélénite que l'on retire de l'analyse des Eaux minérales est l'ouvrage du feu, ou si elle est dans l'eau comme sélénite? Cette question me paroît bien difficile à décider; car il n'y auroit rien de surprenant, qu'une eau roulant sur des bancs séléniteux, se chargeât de sélénite, mais je crois que celle que l'on retire de l'analyse de la plupart des Eaux minérales, est plutôt le produit de l'Art, que celui de la Nature, comme on le verra par l'Expérience suivante.

J'ai mis dans une livre d'eau distillée, six grains de sel marin à base terreuse, & autant de sel de Glauber; cette eau ne s'est point troublée, elle est restée claire & limpide; l'ayant soumise à l'évaporation dans une capsule de verre au bain de sable, il s'est précipité sur la fin de petits cristaux soyeux, qui n'étoient autre chose que de la sélénite, résultant, comme

on le voit de la double décompoſition du ſel de Glauber & du ſel marin à baſe terreuſe. Voilà donc de la ſélénite qui eſt le produit de l'Art, puiſque les ſubſtances que j'ai employées n'en contenoient pas un atome : je ferai même obſerver, que par l'intermède de ces ſels, l'eau contient plus de ſélénite en diſſolution qu'elle ne ſauroit le faire ſi elle étoit ſeule.

Cette Expérience, en répondant à la ſeconde queſtion de Model, démontre encore le peu de fondement que l'on peut faire ſur la ſélénite que l'on retire de l'analyſe de quantité d'Eaux minérales : preſque toutes en fourniſſent ; elle n'eſt jamais ſeule, & ſe trouve preſque toujours mêlée avec le ſel de Glauber & le ſel marin à baſe terreuſe, ce qui paroît confirmer de plus en plus ce que je viens d'avancer. J'ai conſulté pluſieurs analyſes d'Eaux minérales, j'en ai fait moi-même beaucoup avec M. de Laſſone, & j'ai toujours tiré à peu-près les mêmes réſultats, plus ou moins de ſélénite, mais toujours réunie avec le ſel marin à baſe terreuſe & le ſel de Glauber : j'ai aperçu ſouvent des variations très-grandes, dépendantes de la manière d'évaporer ; j'obtenois moins de ſélénite lorſque l'évaporation étoit lente, que lorſqu'elle étoit rapide & par ébullition, de ſorte qu'une même eau, priſe en même quantité, fourniſſoit des réſultats tout-à-fait différens du premier. On peut donc établir pour axiome, qu'une eau qui tient en diſſolution du tartre vitriolé ou du ſel de Glauber, du nitre à baſe terreuſe ou du ſel marin à baſe terreuſe, fournira toujours par l'évaporation, de la ſélénite.



MÉMOIRE
SUR
LES MOUVEMENS DES CÔTES
ET SUR L'ACTION
DES MUSCLES INTERCOSTAUX.

Par M. SABATIER.

SI l'on peut eſpérer de parvenir à la connoiſſance du mécaniſme ſuivant lequel les fonctions de la machine animale s'exécutent, ce doit être par les recherches les plus exactes ſur la ſtructure des parties qui entrent dans ſa compoſition, & par l'examen de la manière dont ces parties agiſſent pendant la vie. Le premier de ces moyens a long-temps été le ſeul dont la plupart des Anatomiſtes aient fait uſage, auſſi n'ont-ils pas autant avancé la Science qu'on auroit pu l'attendre de la multiplicité de leurs travaux, pendant que les découvertes les plus importantes qu'on y ait faites, ſont dûes à ceux qui les ont employés tous deux. On ne peut donc trop multiplier les expériences ſur les animaux vivans. Soit qu'elles détruiſent, confirment ou rectifient les inductions que l'organiſation ſeule eût préſentées, elles ne peuvent qu'être infiniment utiles, & conduire à la vérité, but unique auquel doivent tendre les recherches des Phyſiciens. 28 Décemb. 1777.

Les remarques qui ſont le ſujet de ce Mémoire, ſont le fruit de cette ſorte d'expériences. Il y avoit long-temps que j'avois obſervé que les dix côtes ſupérieures s'articuloient d'une manière un peu différente avec les apophyſes tranſverſes des vertèbres correſpondantes : les facettes cartilagineuſes, creuſées ſur ces apophyſes, m'avoient paru ſituées diverſement ; les ſupérieures regardoient de bas en haut ; les moyennes, de derrière en devant, & les inférieures, de haut en bas. Je ne voyois pas quel pouvoit être l'uſage de cette

diſpoſition, dont perſonne peut-être ne s'étoit aperçu, excepté Véſale qui ne l'a pas décrite avec ſon exactitude ordinaire. J'étois trop prévenu que les côtes devoient être entraînées toutes dans le même ſens, pour imaginer que les choſes puſſent ſe paſſer autrement; mais j'ai été détrompé par l'examen que j'ai eu occaſion de faire de différentes perſonnes bleſſées à la poitrine, & que la gêne de la reſpiration obligeoit à mouvoir les côtes avec plus de force qu'à l'ordinaire. J'ai vu maniſeſtement ſur celles qui étoient dépourvues d'embonpoint que les côtes ſupérieures montent, que les moyennes ſe portent en dehors, & que les inférieures deſcendent & rentrent légèrement en dedans pendant l'inſpiration, au lieu que dans l'expiration, les premières deſcendent, les ſecondes rentrent en dedans, & les dernières remontent & ſe portent un peu en dehors; & je n'ai pas eu de peine à concevoir que la manière dont les facettes articulaires des apophyſes tranſverſes des vertèbres du dos ſont diſpoſées, répond à ces divers mouvemens, & qu'elle ſert à les favoriſer.

Comme les occaſions de cette eſpèce ne ſont pas ſort fréquentes, j'ai voulu m'aſſurer depuis ſi les côtes ſe meuvent toujours de la même façon; en conſéquence, je les ai miſes à découvert ſur des chiens vivans. Mes premiers eſſais n'ont pas été auſſi heureux que je l'aurois cru: malgré la torture à laquelle ces animaux étoient expoſés, la douceur & l'égalité de leur reſpiration ne me permettoient pas de diſcerner les mouvemens des côtes avec autant de préciſion que je l'avois fait ſur des hommes malades, & à travers les muſcles & les tégumens dont elles ſont couvertes. On ſait en effet, que dans la reſpiration ordinaire & non laborieuſe, ces os ne changent preſque pas de ſituation, & que les différentes dimenſions que prend la poitrine, ſont principalement dûes au diaphragme qui s'abaiſſe & monte alternativement. Je déſeſpérois donc de tirer aucun fruit de mes expériences, lorſque je m'aviſai de faire une large ouverture à travers les muſcles intercoſtaux, tantôt d'un côté ſeulement, & tantôt des deux à la fois, pour rendre la reſpiration de ces animaux

plus pénible, & pour en accélérer les mouvemens. Je n'ai pas été trompé dans mon attente; les côtes ſe ſont mues avec plus de force & de rapidité, & j'ai vu qu'elles étoient entraînées dans des mouvemens différens, ſelon qu'elles répondoient à la partie ſupérieure, moyenne & inférieure de la poitrine, & tous ſemblables à ceux que j'avois obſervés précédemment.

Loin donc que toutes les côtes ſoient élevées dans l'inſpiration, comme on l'a cru juſqu'ici, les ſupérieures ſeules montent, & les inférieures deſcendent; celles qui ſont au milieu n'obéiſſent ni à l'un ni à l'autre de ces mouvemens, mais elles éprouvent une ſorte de rotation de dedans en dehors, qui, quoique commune à toutes, eſt plus ſenſible chez elles que chez les autres, & qui les portant en dehors, augmente l'étendue de la poitrine de la partie droite à la partie gauche, & de devant en arrière, pendant que la longueur de cette cavité devient plus grande par l'écartement qui ſe fait entre elles; de même dans l'expiration, toutes les côtes ne s'abaiſſent pas, les ſupérieures ſeules deſcendent, les inférieures montent, & il n'en eſt aucune qui ne tourne ſur elle-même de dehors en dedans, & qui ne ſe rapproche de celles qui l'avoiſinent. Mais ces mouvemens ne ſont pas également marqués dans toutes les régions de la poitrine; à peine ſont-ils ſenſibles à ſes parties antérieure & poſtérieure, au lieu qu'ils ſont fort grands à ſes parties latérales. On peut effectivement concevoir les côtes comme des leviers courbés à leur partie moyenne, & qui ont leur point d'appui à l'une de leurs extrémités; elles en auroient même deux, l'un en arrière aux vertèbres, & l'autre en devant au ſternum, ſi ce dernier os n'étoit mobile, & s'il n'étoit porté de bas en haut, & de haut en bas, par les côtes ſupérieures, auxquelles il eſt plus intimément uni qu'aux inférieures.

De toutes les circonſtances que je viens d'expoſer, celles qui me frappèrent le plus, lors de mes premières expériences, furent l'écartement des côtes pendant l'inſpiration & leur rapprochement pendant l'expiration, parce que l'une & l'autre ne

peuvent s'accorder avec l'opinion généralement adoptée ſur l'uſage des muſcles intercoſtaux, que tous les Anatomiſtes & les Phyſiciens regardent comme le principal agent du premier de ces deux mouvemens, & preſque comme les ſeuls muſcles inſpirateurs. Comment en effet ces muſcles, ſitués entre les côtes & n'ayant d'autres attaches qu'à leur partie oſſeuſe & à leur cartilage, pourroient-ils, malgré la diſpoſition différente de leurs fibres qui s'entre-croiſent, les écarter les unes des autres? La plus légère attention ſuffit pour voir que cela eſt abſolument impoſſible, & il n'eſt ſans doute perſonne qui leur eût attribué cette fonction, ſi l'on eût mieux connu la manière dont les côtes ſe meuvent: auſſi remarque-t-on ſur les animaux vivans que les muſcles dont il s'agit s'alongent dans l'inſpiration, non-ſeulement autant qu'il le faut pour permettre aux côtes de s'éloigner, mais encore aſſez pour pouvoir, en quelque ſorte, s'enfoncer de dehors en dedans, où ils ſont pouſſés par la preſſion de l'air extérieur qui tend à ſe précipiter dans la cavité de la poitrine, au lieu que dans l'expiration ils ſe raccourciſſent & ſont en même temps chaſſés de dedans en dehors. J'ai pluſieurs fois cherché à voir ſi leurs fibres ſe fronçoient alors comme celles des grands muſcles dont on excite la contraction ſur des animaux vivans, mais je n'ai pu m'en aſſurer d'une manière aſſez poſitive pour rien prononcer à ce ſujet.

Les muſcles intercoſtaux doivent donc être bannis du nombre des muſcles inſpirateurs, pour être rangés parmi ceux qui opèrent le rétréciſſement de la poitrine, & qu'on appelle *muſcles expirateurs*, puiſque leur contraction, ou, ce qui revient au même, leur raccourciſſement tend à rapprocher les côtes & à diminuer les intervalles qui les ſéparent. Au reſte, quelqu'extraordinaire que puiſſe paroître l'opinion que j'expoſe ici, je pourrois lui trouver des défenſeurs parmi les Anatomiſtes les plus célèbres, ſi elle n'étoit étayée ſur l'expérience dont le témoignage l'emporte ſur toute eſpèce d'autorité. En effet, ſans parler de Galien, de Bérenger de Carpi, de François Bayle, & de pluſieurs autres, même parmi les

modernes, qui ont penſé que les muſcles intercoſtaux externes ſervent à la dilatation de la poitrine, & les internes à ſa contraction, Véſale, Falloppe & Borelli, très-verſé dans les Mathématiques qu'il a par-tout appliquées à l'Anatomie, & plus en état que qui que ce ſoit de juger de l'action des parties muſculeuſes, d'après leurs attaches & la direction de leurs fibres, penſent que ces muſcles ont un ſeul & même uſage, qui eſt de rétrécir cette cavité. S'ils contribuent en quelque ſorte à ſa dilatation, ce ne peut être, dit Fallope, que par accident, & parce que chacun d'eux étant attaché au bord inférieur d'une côte & au bord ſupérieur de celle qui la ſuit, il n'eſt pas poſſible que la première s'élève ſans entraîner en même temps la ſeconde.

Les muſcles qui augmentent la capacité de la poitrine, ſont ſans doute différens, ſelon que la reſpiration eſt lente, douce & naturelle, ou que les mouvemens en ſont grands, rapides & précipités. Dans le premier cas, le diaphragme eſt celui dont l'action eſt la plus marquée; mais quoique les côtes changent très-peu de ſituation, elles ſont cependant ſenſiblement écartées les unes des autres. Celles qui ſont ſupérieures me paroiſſent élevées par les ſcalènes, & ſur-tout par les dentelés poſtérieurs ſupérieurs, dont les dentelures s'écartent d'autant plus des vertèbres où les côtes ont leur point d'appui, qu'elles deviennent inférieures, ce qui répond fort bien à l'étendue du mouvement des côtes qui eſt moindre à la première & à la ſeconde, qu'à celles qui les ſuivent juſqu'à la ſeptième; de même les côtes inférieures me ſemblent abaiſſées, tant par les quarrés des lombes que par les dentelés poſtérieurs inférieurs. Ces derniers occupent en effet un plus grand eſpace au bord inférieur de la dernière côte, & s'y attachent plus loin des vertèbres qu'aux trois côtes qui ſuivent en montant; auſſi l'expérience m'a-t-elle fait voir que le mouvement de haut en bas que j'ai obſervé ſur les côtes inférieures, eſt plus marqué à la dernière & qu'il devient moins grand dans celles qui ſuivent juſqu'à la cinquième. C'eſt peut-être pour donner aux deux dernières côtes plus de facilité à ſe laiſſer entraîner

en différens ſens, qu'elles n'ont en arrière qu'une articulation avec les vertèbres qui leur répondent, pendant que toutes les autres en ont deux, & qu'en devant ces côtes manquent de connexion avec le ſternum. Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire dans celui où la reſpiration ſe fait avec plus de force, les muſcles dont il vient d'être parlé ſont aidés par beaucoup d'autres dont il eſt inutile de faire l'énumération, étant connus de tous les Anatomiſtes.

Il réſulte de ce que l'on vient de dire, que les muſcles qui ſervent au rétréciſſement de la poitrine, ſont plus nombreux & plus forts que ceux qui la dilatent: en effet, les intercoſtaux, tant internes qu'externes, les ſterno-coſtaux, les ſous-coſtaux, & ſur-tout les muſcles du bas-ventre, dont l'action tend à ramener les côtes de haut en bas, l'emportent ſur les ſcalènes, les dentelés ſupérieurs, les ſous-claviers, & autres qui relèvent celles qui ſont ſupérieures; mais en cela la poitrine ne préſente rien que ce que l'on voit dans les autres parties de la machine animale, où les muſcles fléchiſſeurs ſont en plus grand nombre & plus robuſtes que ceux qui ſont deſtinés à l'extenſion: d'ailleurs, comme l'a fort bien remarqué Véſale, il faut plus de force pour la voix, la toux, l'éternument, l'expulſion des matières fécales, celle du fœtus, en un mot pour toutes les fonctions qui dépendent de l'expiration, que pour l'inſpiration.



NOUVELLES

NOUVELLES EXPÉRIENCES SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Par M. l'Abbé Bossut.

Les Expériences que nous fimes sur la résistance des Fluides, en 1775, M. d'Alembert, M. le Marquis de Condorcet & moi, & dont nous avons rendu compte dans un Ouvrage particulier, avoient pour objet principal de comparer la résistance des fluides indéfinis en étendue avec celle des fluides contenus dans des canaux étroits ou peu profonds. On sait qu'elles furent ordonnées par M. Turgot, alors Contrôleur général des Finances, pour savoir si le projet d'un Canal souterrain qui a eu une célébrité éphémère, ne joignoit pas à une foule d'autres vices, celui d'exiger pour le tirage des bateaux, une plus grande force qu'il ne la faut, proportion gardée, sur les rivières ou sur les canaux larges & profonds. Il paroît que nos recherches ont fixé sur ce point l'opinion de cette partie du Public, qui n'a d'autre intérêt que de connoître & de recevoir la vérité.

Lû à l'Assemblée publique de la Saint-Martin 1779.

Parmi ces expériences, il s'en trouve plusieurs sur la résistance oblique des fluides; mais nous avouames dès-lors que cette branche importante du Problème avoit besoin d'être encore examinée. En conséquence, M. le Marquis de Condorcet & moi avons fait une longue suite de nouvelles expériences, destinées en grande partie à découvrir la loi suivant laquelle diminue la résistance d'une proue angulaire, à mesure que l'angle de cette proue devient plus aigu. M.rs Dez, d'Agelet & Verkaven, Professeurs de Mathématiques à l'École royale militaire, ont bien voulu nous seconder avec un zèle que nous ne pouvons trop reconnoître. Voici l'exposition & les résultats de tout ce travail.

CHAPITRE I.

Préparation aux Expériences.

I.

LES Expériences dont il s'agit, ont été faites à Paris, au mois d'Août 1778, ſur l'ancien réſervoir des eaux, conſtruit ſous l'adminiſtration de M. Turgot le père, Prévôt des Marchands, pour arroſer le Boulevart, & pour nettoyer l'Aqueduc, vulgairement nommé le *Grand-égoût*, qui partant du voiſinage, va ſe décharger dans la Seine près de Chaillot. Ce réſervoir, ſitué à l'extrémité nord de la vieille rue du Temple, eſt un quarré long, ou plutôt un parallélipipède rectangle *ABCD*, dont la longueur *AB* eſt de 200 pieds,
Fig. 1. la largeur *AD* de 100 pieds, & la profondeur d'eau, au temps de nos expériences, a toujours été d'environ 8 pieds & demi.

I I.

ON a fait mouvoir ſucceſſivement ſur le fluide pluſieurs bateaux, & on a déterminé, au moyen d'une excellente Montre à ſecondes, le temps qu'ils emploient à parcourir un eſpace donné. L'eſpace décrit par chacun d'eux, eſt la droite *EF* parallèle aux parois longitudinales *BA*, *CD*, & diſtante de la paroi nord *CD*, de 48 pieds. En *G*, *I* & *H*, *K*, ſont quatre planches plantées verticalement; les deux premières ſont percées chacune dans la partie ſupérieure d'une fente étroite & longue ſuivant la hauteur, de manière que ces fentes forment des pinnules qui ſervent à obſerver le paſſage du bateau, & à le rapporter aux planches *H*, *K*; les diſtances *ID*, *KA*, ſont chacune de 40 pieds; & les diſtances *GC*, *HB* chacune de 64 pieds. A la ligne *MN* décrite réellement par le bateau, nous ſubſtituons la ligne *GI*, de même longueur, & ſituée ſur le bord du baſſin, laquelle eſt de 96 pieds meſurés très-exactement, par le moyen de la toiſe de l'Académie.

III.

COMME le bateau parvenu en *N* pourſuivroit ſa route avec la même vîteſſe, & par-là ſeroit expoſé à venir ſe briſer contre la paroi *DA*, ſi le poids, qui par ſa chute le fait mouvoir, continuoit d'agir ſur lui; on fait en ſorte que le poids ſoit entièrement tombé un peu après que le bateau a paſſé la ligne *IK;* d'où il réſulte que le mouvement du bateau s'éteint en vertu de la réſiſtance que l'eau lui oppoſe continuellement ſur la longueur *NF*, & qu'il eſt ordinairement tout-à-fait anéanti quand le bateau eſt encore diſtant de pluſieurs pieds du point *F*.

Je dis *ordinairement;* car lorſque le bateau a une proue fort aiguë, & qu'il a été tiré par un grand poids, l'eſpace *NF* ne ſuffiroit pas pour l'extinction de ſon mouvement. Dans ces ſortes de cas, nous ne faiſons parcourir au bateau que l'eſpace *Mn* ou *Gi*, qui eſt de 72 pieds.

IV.

ON voit dans les *Figures 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & 10*, tout l'appareil des machines qui ont ſervi à produire les mouvemens dont nous avions beſoin.

Le bateau *B* eſt tiré dans le ſens *EF* par une corde qui eſt attachée au milieu ou centre de gravité *C* de ſa partie ſubmergée: cette corde vient paſſer ſous la poulie *A* de renvoi, qui eſt de cuivre, & va s'envelopper ſur la roue *X* d'un tour horizontal, ſoutenu en l'air par deux montans; elle eſt forcée de s'envelopper ainſi par un poids *P* ſuſpendu à une autre corde *G*, qui ſe déroule de deſſus le cylindre *V* du tour: les deux points *C* & *A* ſont de niveau. De plus, comme la corde *CAD* eſt mince, & que ſa peſanteur ſpécifique diffère peu de celle de l'eau, ſa partie *CA* peut être conſidérée comme ſenſiblement rectiligne. Fig. 2.

La *Figure 3* repréſente l'élévation du tour, laquelle eſt perpendiculaire au profil longitudinal de la *Figure 2;* en combinant enſemble ces deux Figures, on voit toutes les

parties du tour, & les montans qui le soutiennent. Le cylindre & la roue sont de bois, mais ils sont revêtus l'un & l'autre d'une lame de cuivre arrondie circulairement sur le tour;
Fig. 4. l'essieu du cylindre est de fer, & ses extrémités *t* tournent sur deux rouleaux *r* de fer, dont les essieux aussi de fer
Fig. 5. tournent dans des yeux de cuivre. On voit de face le cylindre *V*, son essieu *t*, les rouleaux *r*, leurs essieux *s*. Toutes ces parties sont portées par deux chappes de fer clouées à
Fig. 3. deux planches qui s'assemblent avec les montans *TT, TT:* ces mêmes montans sont liés entre eux dans la partie supérieure par le chapeau *Z;* & dans la partie inférieure, ils sont fixés solidement, comme on le voit dans les *Figures 3* & *6;* ils ont chacun environ 20 pieds de hauteur.

Le diamètre de la roue = 2 pieds 9 pouces 7 lignes; celui du cylindre = 4 pouces $1\frac{1}{3}$ lignes; celui de chaque tourillon du cylindre = 11 lignes; celui de chaque rouleau = 7 pouces 11 lignes; celui de chaque tourillon des rouleaux = $8\frac{3}{4}$ lignes; celui de la poulie *A* de renvoi, = 5 pouces $\frac{1}{2}$ ligne; celui de chacun des tourillons de cette poulie = $4\frac{2}{3}$ lig. celui de la corde *CAD* = $1\frac{3}{4}$ lig. celui de la corde *G* = $4\frac{3}{4}$ lignes.

Le poids total de la roue & du cylindre est de 45 livres 11 onces 36 grains; la longueur de l'axe commun au cylindre & à la roue est de près de 4 pieds.

V.

LORSQU'ON veut faire une expérience, on commence
Fig. 2. par amener le bateau *B* de *F* vers *E*, par le moyen d'une corde *HKI* qui va passer sous la poulie *K* de renvoi, & s'envelopper autour d'un cylindre *I* garni d'une manivelle qu'un homme fait tourner. On voit ce mécanisme séparément dans la *Figure 7*. Le bateau allant dans le sens *FE*, le poids *P* s'élève, la corde *G* qui le soutient se roule sur le cylindre *V*, & la corde *CAD* se dévide de dessus la roue. Quand le poids *P* est arrivé à sa plus grande hauteur, on lâche la manivelle, le poids descend, le bateau commence sa course

de E vers F, & on a ſoin de dévider la corde IKH de deſſus le cylindre, pour qu'elle n'oppoſe pas de réſiſtance ſenſible au mouvement du bateau.

La poulie K eſt de cuivre & ſon diamètre $=$ 5 pouces $\frac{1}{2}$ ligne ; celui de chacun des tourillons de cette poulie $=$ $4\frac{2}{3}$ lignes; celui de la corde HKI $=$ $1\frac{3}{4}$ ligne.

VI.

POUR empêcher que le bateau ne ſerpente en cheminant, & pour le faire aller en ligne droite, on a tendu fortement dans la direction EF une corde qui a 8 lignes de diamètre, & qui fait un ventre peu ſenſible au-deſſus de la ſurface de l'eau ; on peut d'autant mieux négliger ce ventre, que la corde eſt un peu ſoulevée en ſens contraire par le bateau: cette même corde paſſe entre deux paires de poulies x de cuivre, aſſemblées dans deux chappes dont les pieds s'attachent à une longue planche qui ſe poſe ſur chaque bateau, dans la direction de ſon mouvement: on voit ces poulies en différens ſens, & la *Figure 11* montre comment la planche yy qui les porte, s'applique ſur chaque bateau : il y a en avant de chaque paire de poulies un petit rouleau mobile u qui ſoutient la corde, & favoriſe le gliſſement du corps flottant. Fig. 2. Figures 8, 9 & 10.

Le diamètre de chacune des poulies x $=$ 4 pouces ; celui de chacun de leurs eſſieux $=$ $2\frac{1}{2}$ lignes ; la diſtance yy des deux paires de poulies x, eſt conſtamment de 8 pieds 1 pouce. Fig. 11.

VII.

NOUS avons fait courir ſur l'eau dix-neuf eſpèces de bateaux : ſavoir,

1.° Un parallélipipède rectangle X, dont le plan eſt le rectangle $MNOP$; la largeur MN $=$ 2 pieds; la longueur MP $=$ 4 pieds; l'enfoncement nh dans le fluide $=$ 2 pieds; la hauteur nN de la partie ſaillante hors de l'eau, eſt d'environ 7 pouces. Fig. 12. Fig. 11.

2.° Quatorze bateaux priſmatiques Y, ayant une proue Fig. 13.

iſocèle *MQN*, dont l'angle *Q* du ſommet varie de 12 degrés en 12 degrés, depuis 168 degrés juſqu'à 12 ; la largeur *MN* de chacun d'eux = 2 pieds; la longueur *MP* = 4 pieds; l'enfoncement *nh* dans l'eau = 2 pieds; la partie *nN* ſaillante hors de l'eau, eſt d'environ 7 pouces.

Fig. 14. 3.° Un parallélipipède rectangle *Z*, dont la largeur *MP* = 4 pieds; la longueur *MN* = 2 pieds; l'enfoncement *mg* dans l'eau = 2 pieds; & la partie *mM* ſaillante hors de l'eau = 7 pouces environ.

Fig. 15. 4.° Un bateau priſmatique *V*, dont la proue eſt composée de deux parties planes égales *MH*, *KP*, & d'une partie angulaire & iſocèle *HQK*; la largeur totale *MP* = 4 pieds; chacune des parties *MH* ou *KP* = 1 pied, *HK* = 2 pieds; la longueur *MN* = 2 pieds; l'enfoncement *mh* dans l'eau = 2 pieds; la partie *mM* ſaillante hors de l'eau = 7 pouces; & l'angle *HQK* = 24 degrés.

Fig. 16. 5.° Deux bateaux priſmatiques *S*, ayant chacun une proue circulaire, dont la flèche *QR* eſt égale dans l'un au rayon *RM*, & dans l'autre au demi-rayon; la largeur *MN* = 2 pieds; la longueur *MP* = 4 pieds; l'enfoncement *nh* dans l'eau = 2 pieds; & la partie *nN* ſaillante hors de l'eau = 7 pouces environ.

CHAPITRE II.

Expoſition des Expériences.

I.

LES poids qu'on emploie ſucceſſivement pour faire mouvoir un bateau, ſe fixent ſur un plateau attaché à l'extrémité de

Fig. 2. la corde *G*: il y a donc réellement dans chaque poids moteur, pour chaque expérience, deux poids ſéparés; l'un eſt celui qu'on poſe ſur le plateau; l'autre la peſanteur même du plateau, qui ſubit quelques variations ſelon que le plateau eſt plus ou moins mouillé. On a eſtimé ces variations le plus exactement qu'il a été poſſible. Pour plus de ſimplicité dans

l'expreſſion de la totalité du poids moteur, nous diſtinguons deux parties dans le poids particulier du plateau; l'une qui eſt conſtamment de 10 livres, & que nous joignons tout de ſuite au poids poſé ſur le plateau; l'autre qui varie dans l'intervalle de demi-livre à $2\frac{1}{2}$ livres, & qui accompagne, au moyen du ſigne $+$, la première ſomme: cette ſeconde partie du poids du plateau eſt la ſeule qui ſoit un peu incertaine; mais on voit qu'une pareille incertitude ne peut produire aucun changement ſenſible dans les réſultats.

Quant à la variation qui arrive au poids de la corde *G*, à meſure qu'elle ſe déroule, nous la compenſons par un bout de corde de même groſſeur que *G*, ſuſpendu au plateau; ainſi le poids de la corde qui ſoutient le poids moteur peut être regardé comme conſtant, & nous le comprenons dans celui du plateau.

I I.

CHAQUE bateau a toujours parcouru plus de 40 pieds, avant que d'arriver à la ligne *G H*, de laquelle on commence à compter le mouvement; ainſi il n'y a plus alors d'accélération, & l'on peut regarder le mouvement comme uniforme ſur l'étendue *MN* ou *Mn*. Fig. 1.

On a eu de la peine à obſerver les remous, à cauſe de la diſtance où l'on étoit des bateaux: on ne trouvera donc ici qu'un petit nombre d'obſervations de ce genre.

La même expérience a toujours été répétée quatre ou cinq fois, & on a pris un milieu entre les temps des mouvemens, lorſqu'on jugeoit d'ailleurs que ces temps étoient déterminés avec une exactitude ſuffiſante. Nous allons préſenter le tableau de toutes nos opérations, le plus brièvement & le plus clairement qu'il nous ſera poſſible.

EXPÉRIENCES I, II, III, IV, V.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 12.	60 + 1,8.	96.	78,08.
Résistance directe.	110 + 2,5.	96.	57,51.
	160 + 2,5.	96.	47,44.
	210 + 2,5.	96.	41,49.
Remou central = 2 $^{Po}\frac{1}{2}$.	260 + 2,5.	96.	37,32.

EXPÉRIENCES VI, VII, VIII, IX, X.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13.	60 + 2,0.	96.	77,50.
Angle $MQN = 168^d$	110 + 2,5.	96.	56,95.
	160 + 2,5.	96.	47,22.
	210 + 2,5.	96.	41,26.
Remou central = 2 $^{Po}\frac{1}{2}$.	260 + 2,5.	96.	37,12.

EXPÉRIENCES XI, XII, XIII, XIV, XV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13.	60 + 2,5.	96.	75,09.
Angle $MQN = 156^d$	110 + 2,5.	96.	56,15.
	160 + 2,5.	96.	46,44
	210 + 2,5.	96.	41,03.
Remou central = 2 $^{Po}\frac{1}{3}$.	260 + 2,5.	96.	36,52.

EXPÉRIENCES

EXPÉRIENCES XVI, XVII, XVIII, XIX, XX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13.	60 + 2,5.	96.	73,38.
Angle $MQN = 144^d$	110 + 2,5.	96.	54,75.
	160 + 2,5.	96.	45,35.
Remou central 21 lign.	210 + 2,5.	96.	39,58.
	260 + 2,5.	96.	37,57.

EXPÉRIENCES XXI, XXII, XXIII, XXIV, XXV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13.	60 + 0,5.	96.	72,08.
Angle $MQN = 132^d$	110 + 1,5.	96.	53,25.
	160 + 2,5.	96.	43,75.
Remou central = 21 lig.	210 + 2,5.	96.	38,26.
	260 + 2,5.	96.	34,30.

EXPÉRIENCES XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, XXX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 2,5.	96.	68,32.
Figure 13.	110 + 2,5.	96.	50,84.
	160 + 2,5.	96.	41,84.
Angle $MQN = 120^d$	210 + 2,5.	96.	36,62.
	260 + 2,5.	96.	32,77.

EXPÉRIENCES XXXI, XXXII, XXXIII, XXXIV, XXXV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 1,5.	96.	65,85.
Figure 13.	110 + 2,5.	96.	48,75.
	160 + 2,5.	96.	39,50.
Angle $MQN = 108^{d}$	210 + 2,5.	96.	34,46.
	260 + 2,5.	96.	31,05.

EXPÉRIENCES XXXVI, XXXVII, XXXVIII, XXXIX, XL.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 0,5.	96.	63,00.
Figure 13.	110 + 0,5.	96.	46,45.
	160 + 2,5.	96.	38,05.
Angle $MQN = 96^{d}$	210 + 2,5.	96.	32,66.
	260 + 2,5.	96.	29,27.

EXPÉRIENCES XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 0,5.	96.	60,55.
Figure 13.	110 + 0,5.	96.	44,56.
	160 + 2,5.	96.	35,78.
Angle $MQN = 84^{d}$	210 + 2,5.	96.	31,25,
	260 + 2,5.	96.	27.51.

EXPÉRIENCES XLVI, XLVII, XLVIII, XLIX, L.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 2,5.	96.	57,50.
Figure 13.	110 + 2,5.	96.	42,75.
	160 + 2,5.	96.	34,85.
Angle $MQN = 72^d$	210 + 2,5.	96.	29,65.
	260 + 2,5.	96.	25,86.

EXPÉRIENCES LI, LII, LIII, LIV, LV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 0,5.	96.	55,45.
Figure 13.	110 + 2,5.	96.	40,04.
	160 + 2,5.	96.	33,05.
Angle $MQN = 60^d$	210 + 2,5.	96.	28,25.
	260 + 2,5.	96.	24,77.

EXPÉRIENCES LVI, LVII, LVIII, LIX, LX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
	60 + 2,5.	96.	52,51.
Figure 13.	110 + 2,5.	96.	38,05.
	160 + 2,5.	96.	31,61.
Angle $MQN = 48^d$	210 + 2,5.	96.	27,56.
	260 + 2,5.	96.	24,30.

EXPÉRIENCES LXI, LXII, LXIII.

BATEAU qui a été mu.	Poids moteurs, exprimés en livres.	ESPACES parcourus, exprimés en pieds.	TEMPS des mouvemens, exprimés en fecondes.
Figure 13. Angle $MQN = 36^d$	60 + 2,5.	96.	51,15.
	110 + 2,5.	96.	36,96.
	160 + 2,5.	96.	30,53.

EXPÉRIENCES LXIV, LXV, LXVI.

BATEAU qui a été mu.	Foids moteurs, exprimés en livres.	ESPACES parcourus, exprimés en pieds.	TEMPS des mouvemens, exprimés en fecondes.
Figure 13. Angle $MQN = 24^d$	60 + 1,5.	96.	49,48.
	110 + 2,5.	96.	35,75.
	160 + 2,5.	96.	30,23.

EXPÉRIENCES LXVII, LXVIII, LXIX.

BATEAU qui a été mu.	Poids moteurs, exprimés en livres.	ESPACES parcourus exprimés en pieds.	TEMPS des Mouvemens, exprimés en fecondes
Eigure 13. Angle $MQN = 12^d$	60 + 2,5.	72.	37,04.
	110 + 2,5.	72.	26,50.
	160 + 2,5.	72.	22,51.

SCHOLIE.

Le but des expériences précédentes, eſt de faire connoître les rapports des réſiſtances pour une ſuite de proues angulaires qui varient de 12 degrés en 12 degrés, depuis 180 degrés, c'eſt-à-dire depuis le ſimple plan juſqu'à l'angle de 12 degrés. Ayant rempli cet objet principal de notre travail, nous avons encore examiné d'autres points importans de la réſiſtance des fluides; telles ſont les queſtions ſuivantes.

PREMIÈRE QUESTION.

Les réſiſtances des proues polygones ou curvilignes ſuivent-elles les mêmes loix que les réſiſtances des proues angulaires ſimples!

SECONDE QUESTION.

La poupe plus ou moins alongée d'un Vaiſſeau influe-t-elle ſenſiblement, toutes choſes d'ailleurs égales, ſur la vîteſſe du ſillage!

TROISIÈME QUESTION.

La longueur d'un Vaiſſeau eſt-elle indifférente pour la marche, en ſuppoſant que la ſurface préſentée au choc du fluide ſoit toujours la même!

QUATRIÈME QUESTION.

Quels changemens produira-t-on dans la vîteſſe du ſillage, ſi l'on couvre d'une pointe triangulaire le milieu d'une proue plane ou celui d'une poupe plane!

Les expériences que nous allons rapporter nous ſerviront, ſinon à réſoudre généralement ces queſtions, du moins à en donner des ſolutions particulières applicables à pluſieurs cas.

Dans les ſix premières, cotées *LXX, LXXI, LXXII, LXXIII, LXXIV, LXXV*, on a fait courir les bateaux repréſentés par la *Figure 16*.

Dans celles qui ſont cotées *LXXVI, LXXVII, LXXVIII, LXXIX, LXXX, LXXXI*, le bateau mu n'eſt autre choſe

que celui de la *Figure 13*, retourné de l'avant à l'arrière, de ſorte que *O P* eſt maintenant la proue & *MQN* la poupe: ainſi on aura des réſiſtances directes qu'on pourra comparer avec celles du bateau de la *Figure 12*, où la poupe eſt un ſimple plan vertical, de même que la proue.

L'expérience cotée *LXXXII*, a été faite avec le bateau de la *Figure 14*, dont la largeur $MP = 4$ pieds, la longueur $MN = 2$ pieds, & l'enfoncement dans l'eau $= 2$ pieds, comme il a été dit.

Les deux expériences cotées *LXXXIII, LXXXIV*, ont été faites avec le bateau de la *Figure 15*, l'angle *KQN* de la proue étant ici de 24 degrés; & enfin celles qui ſont cotées *LXXXV, LXXXVI*, ont été faites avec le même bateau, retourné de l'avant à l'arrière, l'angle *KQN* de la poupe étant de 24 degrés, comme celui de la proue dans les deux précédentes.

EXPÉRIENCES LXX, LXXI, LXXII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en ſecondes.
Figure 16.	60 + 2,0.	72.	42,25.
$QR = RM$.	110 + 2,5.	72.	30,50.
	160 + 2,5.	72.	25,25.

EXPÉRIENCES LXXIII, LXXIV, LXXV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en ſecondes.
Figure 16.	60 + 2,0.	72.	51,25.
$QR = \frac{RM}{2}$.	110 + 2,5.	72.	37,25.
	160 + 2,5.	72.	30,50.

EXPÉRIENCES LXXVI, LXXVII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13 retournée; l'angle *MQN* de la poupe étant = 48^d.	160 + 2,5. 260 + 2,5.	96. 96.	44,80. 35,18.

EXPÉRIENCES LXXVIII, LXXIX, LXXX.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 13 retournée. Angle *MQN* de la poupe = 24^d.	160 + 2,5. 210 + 2,5. 260 + 2,5.	96. 96. 96.	43,85. 38,35. 34,48.

EXPÉRIENCE LXXXI.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACE PARCOURU, exprimé en pieds.	TEMPS DU MOUVEMENT, exprimé en secondes.
Figure 13 retournée. Angle *MQN* de la poupe = 12^d.	160 + 2,5.	72.	32,62.

EXPÉRIENCE LXXXII.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACE PARCOURU, exprimé en pieds.	TEMPS DU MOUVEMENT, exprimé en secondes.
Figure 14.	110 + 2,5.	72.	72,00.

EXPÉRIENCES LXXXIII, LXXXIV.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 15.	110 + 2,5.	72.	60,00.
Angle $KQH = 24^d$.	210 + 2,5.	72.	43,25.

EXPÉRIENCES LXXXV, LXXXVI.

BATEAU QUI A ÉTÉ MU.	POIDS MOTEURS, exprimés en livres.	ESPACES PARCOURUS, exprimés en pieds.	TEMPS DES MOUVEMENS, exprimés en secondes.
Figure 15 retournée. L'Angle KQH de la poupe $= 24^d$.	110 + 2,5. 210 + 2,5.	72. 72.	69,00. 50,01.

CHAPITRE III.

Conséquences qui résultent des Expériences précédentes.

I.

Nos Expériences de l'année 1775, ont suffisamment prouvé, & on trouveroit également par les précédentes, que la résistance d'une surface quelconque, plane ou courbe, mue avec différentes vîtesses, est à peu de chose près, comme le quarré de la vîtesse : on a trouvé aussi que les résistances directes de différentes surfaces planes, mues avec la même vîtesse, sont sensiblement proportionnelles aux étendues de ces surfaces, pourvu néanmoins que le fluide ait dans tous les cas une liberté suffisante de venir gagner l'arrière du corps flottant, comme nous le verrons ci-dessous. Ainsi sur ces deux points, l'expérience est à peu de chose près d'accord avec la théorie ordinaire; mais relativement à la loi

la loi du quarré du ſinus de l'angle d'incidence d'un fluide ſur un plan, l'expérience s'éloigne ſenſiblement de la théorie, du moins lorſque les angles d'incidence deviennent un peu aigus. Notre objet préſent eſt d'abord d'examiner, au moyen des ſoixante-neuf premières expériences qui précèdent, ſi la loi du choc pour une ſuite de proues angulaires ſimples, n'a pas une marche conſtante & régulière qu'on puiſſe ſoumettre aux formules de l'analyſe : Problème abſolument nouveau juſqu'ici ; nous tâcherons enſuite de réſoudre ou d'éclaircir, par les autres expériences, les queſtions intéreſſantes qui ont été propoſées dans le Scholie du chapitre précédent.

I I.

L'EFFORT total que le poids moteur fait pour deſcendre, eſt contre-balancé à chaque inſtant par la réſiſtance de l'eau dont nous ſommes occupés, par celle de l'air & par le frottement. On peut s'aſſurer, comme dans notre premier Ouvrage ſur la réſiſtance des fluides, que la réſiſtance de l'air eſt ici ſi petite qu'elle peut être entièrement négligée ſans ſcrupule ; la réſiſtance qui provient du frottement des parties de la machine, & du mouvement de la corde qui tire le bateau, eſt toujours beaucoup moindre que celle de l'eau ; néanmoins il ſaudroit en tenir compte, ſi on vouloit aſſigner la meſure abſolue de la réſiſtance de l'eau ; mais comme nous nous propoſons ſimplement de déterminer les rapports des réſiſtances de l'eau, nous pouvons faire abſtraction du frottement, parce que dans les mouvemens uniformes, tels que nous les conſidérons, le frottement étant ſenſiblement proportionnel à la preſſion, les réſiſtances totales que ſurmonte le poids moteur en deſcendant ſont entr'elles,

à peu de chose près, comme les mêmes résistances diminuées des effets des frottemens.

III.

1.° Soient pour un même espace & un même temps donnés :

La valeur absolue de la résistance directe qu'éprouve une surface plane donnée . . . . $= P$.

La valeur relative, prise arbitrairement, de la même résistance $= p$.

La valeur absolue de la résistance qu'éprouve une surface quelconque X . . . . $= R$.

La valeur relative de la même résistance . . . . $= r$.

L'espace parcouru . . . . $= E$.

Le temps du mouvement . . . . $= T$.

2.° Soient pour un autre espace & un autre temps donnés :

La valeur absolue de la résistance qu'éprouve la surface X . . $= Q$.

L'espace parcouru . . . . $= e$.

Le temps du mouvement . . . . $= t$.

Cela posé, on a d'abord par hypothèse, $P : p :: R : r$, & par conséquent $r = R \times \frac{p}{P}$; d'un autre côté, l'expérience donne $R : Q :: \frac{E^2}{T^2} : \frac{e^2}{t^2}$; donc $R = Q \times \frac{E^2 t^2}{e^2 T^2}$; substituant cette valeur de R dans celle de r, on aura $r = p \times \frac{Q}{P} \times \frac{E^2 t^2}{e^2 T^2}$.

D'où l'on voit que connoissant par l'expérience les quantités P, E, T, Q, e, t, on connoîtra le rapport de p à r, c'est-à-dire le rapport de la résistance directe d'une surface plane donnée à la résistance d'une autre surface quelconque: pour une même vîtesse laquelle a pour expression $\frac{E}{T}$.

IV.

Il eſt à propos de remarquer que le rapport des deux réſiſtances dont on vient de parler, ſera le même pour toute autre vîteſſe $\frac{E'}{T'}$; car ſoient P', p', R', E', T' les quantités analogues chacune à chacune des quantités P, p, R, r, E, T, tout le reſte demeurant d'ailleurs le même; on trouvera, comme dans l'article précédent,

$$r' = p' \times \frac{Q}{P'} \times \frac{E'^2 t^2}{e^2 T'^2};$$

or $$\frac{Q}{P'} \times \frac{E'^2 t^2}{e^2 T'^2} = \frac{Q}{P} \times \frac{E^2 t^2}{e^2 T^2};$$

car ſuivant l'expérience, $P : P' :: \frac{E^2}{T^2} : \frac{E'^2}{T'^2}$. Donc $\frac{p'}{r'} = \frac{p}{r}$.

On voit par-là que ſi on ſuppoſe $p' = p$, on aura auſſi $r' = r$.

V.

D'après ces principes, nous avons conſtruit la Table ci-jointe, laquelle contient les rapports des réſiſtances, ſuivant la théorie & ſuivant l'expérience, pour quinze ſortes de proues angulaires. Ainſi nous ſuppoſons dans cette Table que la baſe MN, qui eſt de 2 pieds, demeurant conſtamment la même, l'angle MQN d'une proue formée en triangle iſocèle, eſt d'abord de 180 degrés (ce qui eſt le cas de la réſiſtance directe ou perpendiculaire), puis de 168 degrés, puis de 156 degrés, puis de 144 degrés, ainſi de ſuite juſqu'à 12 degrés; nous repréſentons la réſiſtance directe par le nombre arbitraire 10000, enſuite nous déterminons, par la théorie ordinaire & par les formules de l'article precédent, les valeurs relatives des réſiſtances pour les angles propoſés. Fig. 13.

TABLE comparative des résistances sous même vîtesse, pour une suite d'angles MQN, *depuis 180 degrés jusqu'à 12 degrés.*

Fig. 13.

SUITE des ANGLES *MQN.*	RÉSISTANCES comparatives, suivant la THÉORIE.	RÉSISTANCES comparatives, suivant L'EXPÉRIENCE.	DIFFÉRENCES des deux suites précédentes.
Angle $MQN = 180^d$	10000.	10000.	0.
168.	9890.	9893.	3.
156.	9568.	9578.	10.
144.	9045.	9084.	39.
132.	8346.	8446.	100.
120.	7500.	7710.	210.
108.	6545.	6925.	380.
96.	5523.	6148.	625.
84.	4478.	5433.	955.
72.	3455.	4800.	1345.
60.	2500.	4404.	1904.
48.	1654.	4240.	2586.
36.	955.	4142.	3187.
24.	432.	4063.	3631.
12.	109.	3999.	3890.

VI.

ON voit par cette Table, que les résistances effectives ne diminuent pas en même raison que les quarrés des sinus des angles d'incidence: l'expérience s'éloigne de plus en plus de la théorie, à mesure que les angles d'incidence deviennent plus petits. Il seroit facile de construire une courbe du genre parabolique, dont les ordonnées représenteroient les résistances telles que l'expérience les donne: on pourroit remplir le même objet par la méthode de M. de la Grange, pour former

des Tables des Planètes d'après les seules observations, ou par celle que M. le Marquis de Condorcet a donnée pour déduire en général les loix des phénomènes d'après les observations; mais tous ces moyens exigent des calculs un peu longs pour la pratique. En considérant attentivement la suite des différences entre les résistances effectives & les résistances théoriques, nous avons observé qu'on pouvoit représenter les résistances effectives par une formule qui, sans être absolument générale, s'applique à un très grand nombre de cas, & qui ne demande que des calculs numériques très-simples.

VII.

En effet, chaque terme de la suite des différences dont il s'agit, étant l'excès de la résistance effective sur la résistance donnée par la théorie, & cette même suite allant toujours en montant, nous avons dit: la formule propre à représenter les résistances effectives, doit ou peut contenir 1.° le terme que donneroit la théorie; 2.° un terme ou un assemblage de termes dont la valeur aille toujours en augmentant suivant la loi de la suite proposée. Nommons x l'angle NMQ; P la résistance directe de la base NM; φ la résistance que devroit souffrir, selon la théorie, la proue angulaire MQN dans le sens de sa hauteur QR; on aura, comme on sait, $\varphi = P\,\text{cos}.x^2$. Soit π la résistance effective de la même proue; & examinons s'il ne seroit pas possible de représenter les résistances effectives par une formule de cette espèce $\pi = P\,\text{cos}.x^2 + Mx^n$, qui est la plus simple qu'on puisse employer sous le point de vue que nous venons d'exposer, & dans laquelle l'exposant n est un nombre au-dessus de zéro, afin qu'on ait $\pi = P$, lorsque $x = 0$. Fig. 13.

VIII.

Dans la Table de l'*article V*, les angles x forment une progression arithmétique, dont la différence est égale au premier angle qui est de 6 degrés; ainsi en nommant q ce premier angle, & supposant $P = 10000$, on aura 1.°

cette ſuite d'équations :

$$P\,(\text{coſ. } 0)^2 = 10000,\quad P\,(\text{coſ. } q)^2 = 9890;$$
$$P\,(\text{coſ. } 2q)^2 = 9568,\quad P\,(\text{coſ. } 3q)^2 = 9045,$$

....

$$P\,(\text{coſ. } 14q)^2 = 109.$$

2.° Suppoſons (ſi la choſe eſt permiſe, ce qu'on verra dans un moment), que les termes de la ſuite des différences qui ſe trouvent entre les réſiſtances effectives & les réſiſtances théoriques, ſoient proportionnels chacun à chacun des termes de la ſuite :

$$0\,q^n;\quad 3\,q^n,\quad m\,(2\,q)^n,\quad m\,(3\,q)^n,\quad m\,(4\,q)^n,$$

....

$$m\,(14\,q)^n,$$

en ſorte qu'on ait

$$3 : 10 :: 3\,q^n : m\,(2\,q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 2^n,$$

$$3 : 39 :: 3\,q^n : m\,(3\,q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 3^n,$$

$$3 : 100 :: 3\,q^n : m\,(4\,q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 4^n,$$

$$3 : 210 :: 3\,q^n : m\,(5\,q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 5^n,$$

....

$$3 : 3890 :: 3\,q^n : m\,(14\,q)^n :: 1 : \frac{m}{3} \times 14^n,$$

& par conſéquent

$$m \times 2^n = 10,\quad m \times 3^n = 39,\quad m \times 4^n = 100,$$

....

$$m \times 14^n = 3890,$$

En combinant ſucceſſivement la première de ces équations avec chacune des autres, on trouvera pour n les valeurs ſuivantes :

$$n = \frac{\log. 39 - \log. 10}{\log. 3 - \log. 2} = \frac{591065}{176091} = 3{,}35, \text{ à peu-près};$$

$$n = \frac{\log. 100 - \log. 10}{\log. 4 - \log. 2} = \frac{1000000}{301030} = 3{,}32;$$

$$n = \frac{\log. 210 - \log. 10}{\log. 5 - \log. 2} = \frac{1322219}{397940} = 3{,}32;$$

$$n = \frac{\log. 380 - \log. 10}{\log. 6 - \log. 2} = \frac{1579784}{477121} = 3{,}31;$$

$$n = \frac{\log. 625 - \log. 10}{\log. 7 - \log. 2} = \frac{1795880}{544068} = 3{,}30;$$

$$n = \frac{\log. 955 - \log. 10}{\log. 8 - \log. 2} = \frac{1980003}{602060} = 3{,}28;$$

$$n = \frac{\log. 1345 - \log. 10}{\log. 9 - \log. 2} = \frac{2128722}{653213} = 3{,}26;$$

$$n = \frac{\log. 1904 - \log. 10}{\log. 10 - \log. 2} = \frac{2279667}{698970} = 3{,}26;$$

$$n = \frac{\log. 2586 - \log. 10}{\log. 11 - \log. 2} = \frac{2412629}{740363} = 3{,}25;$$

$$n = \frac{\log. 3187 - \log. 10}{\log. 12 - \log. 2} = \frac{2503382}{778151} = 3{,}21;$$

$$n = \frac{\log. 3631 - \log. 10}{\log. 13 - \log. 2} = \frac{2560026}{812913} = 3{,}13;$$

$$n = \frac{\log. 3890 - \log. 10}{\log. 14 - \log. 2} = \frac{2589950}{845098} = 3{,}06;$$

d'où l'on voit que la valeur de n eſt à peu-près conſtante, & que par conſéquent celle de m l'eſt auſſi; ainſi, la ſuppoſition que nous avons faite, relativement aux rapports des termes de la ſuite des différences, eſt ſenſiblement permiſe, du moins pour la plus grande partie de cette ſuite: la valeur moyenne de n eſt à très peu de choſes près, 3,25 ou $3\frac{1}{4}$, & celle de m eſt en conſéquence 1,051; par conſéquent, la formule approchée de la réſiſtance ſera

$$\Pi = 10000 \times \text{coſ.}\, x^2 + 3{,}153 \times \left(\frac{x}{q}\right)^{3\frac{1}{4}}.$$

IX.

On voit que nous ne propoſons pas cette formule comme entièrement générale; nous ne la donnons que pour les cas où l'angle d'incidence du fluide ſur chaque face de la proue eſt un peu grand. Lorſque l'angle d'incidence du fluide eſt de 12 degrés, ce qui eſt le cas des Expériences *LXIV, LXV, LXVI*, le terme $3,153 \times (\frac{x}{q})^{3\frac{1}{4}}$ devient 4766, tandis que l'expérience donne ſimplement 3631; la formule s'éloigne encore plus de la vérité pour de plus petits angles d'incidence.

Du reſte, l'objection que la formule devroit donner la réſiſtance nulle lorſque $x = 90^d$, n'a pas de fondement, 1.° parce que tous les triangles *NMQ* ayant la même baſe *NM*, il y aura toujours une réſiſtance, même lorſque $x = 90^d$, puiſque le bateau pouſſera toujours devant lui une colonne fluide dont la largeur eſt finie; 2.° parce l'angle x étant parvenu aux environs de 90^d, la proue s'alonge conſidérablement; d'où il réſulte que le frottement du fluide le long des parois du bateau, peut augmenter au point de former une réſiſtance ſenſible, comparable & additive à celle qui provient du choc de l'eau.

X.

Quelle que ſoit la loi de la réſiſtance des proues angulaires ſimples, elle n'eſt pas applicable aux proues polygones & curvilignes, ou du moins elle n'y eſt applicable qu'avec des modifications ou des coëfficiens que nous n'avons pu découvrir juſqu'ici. M. le Chevalier de Borda avoit déjà remarqué * que la théorie ordinaire donne les réſiſtances des ſurfaces courbes plus grandes qu'elles ne ſe trouvent par l'expérience, tandis qu'au contraire l'expérience donne les réſiſtances des ſurfaces planes plus grandes qu'elles ne ſe trouvent par la théorie. Nous avons fait la même obſervation, & nous en avons conſtaté la juſteſſe par un grand nombre d'expériences où nous avons employé des proues compoſées de parties planes

* *Mémoires de l'Acad. 1763.*

planes & de parties angulaires, & des proues circulaires : ainsi, par exemple, les Expériences cotées ci-dessus, *LXX*, *LXXI*, *LXXII*, font voir que la proue demi-circulaire éprouve une résistance qui est à celle du diamètre MN, comme 13 est à 25 environ, tandis que suivant la théorie ordinaire, ces deux résistances devroient être entr'elles comme les nombres 2 & 3; au contraire, selon l'expérience, la proue angulaire MQN pour l'angle Q de 90^d, éprouve une résistance qui est à celle du diamètre MN, comme 29 est à 50 environ, tandis que suivant la théorie, ces deux résistances devroient être entr'elles comme les deux nombres 1 & 2; d'où l'on voit que la résistance des proues curvilignes & celle des proues angulaires simples, contredisent en sens opposé la théorie ordinaire. Nous n'avons point encore trouvé de formule propre à représenter généralement ces deux espèces de résistances. Pour espérer de parvenir à une telle formule, il faudroit faire directement des expériences sur des proues polygones ou curvilignes d'un très-grand nombre d'espèces; mais on sent combien un pareil travail seroit long, pénible & dispendieux : il y a un autre moyen de parvenir au même but, c'est d'étudier avec attention dans les bateaux ordinaires, dans les Vaisseaux flottans à la mer, les propriétés dépendantes de la résistance du fluide, & de combiner l'effet de cette résistance avec la forme de la carène. Des Tables construites sur de semblables observations, variées & multipliées, serviroient à déterminer la loi de la résistance, & à régler la proportion des parties de chaque Vaisseau, relativement à son objet : les défauts qui se glissent presqu'inévitablement dans les constructions de toutes les machines, pourroient être ensuite corrigés, du moins en grande partie, par le moyen de l'arrimage. Nous ne pouvons pas répondre d'une manière plus précise à la première des questions qui ont été proposées dans le Scholie du chapitre précédent.

Fig. 16.

X I.

La seconde question de ce Scholie, *si la proue demeurant*

la même, une poupe plus ou moins alongée fait diminuer la résistance, est plus simple; & nous pouvons y répondre avec une certaine précision. En comparant les *Expériences LXXVI, LXXVII*, chacune avec chacune des *Expériences III, V;* les *Expériences LXXVIII, LXXIX, LXXX*, chacune avec chacune des *Expériences III, IV, V;* & l'*Expérience LXXXI* avec l'*Expérience III:* on voit qu'une poupe alongée fait augmenter sensiblement la vîtesse du sillage; & comme on connoît par ces expériences les rapports des temps employés à parcourir un même espace, on est en état de déterminer les rapports des résistances: ainsi, par exemple, on trouvera que sous même vîtesse le bateau de la *Figure 12*, garni d'une poupe triangulaire isocèle, dont l'angle du sommet est de 48 degrés, éprouve une résistance moindre que celle qu'il éprouvoit quand il n'avoit pas de poupe, dans le rapport de $15\frac{3}{4}$ à 14 environ.

XII.

La troisième question du même Scholie, *si la longueur d'un vaisseau influe sur la vîtesse du sillage*, est en quelque sorte comprise dans les précédentes, & se résout par les mêmes moyens. Il est constant, par nos Expériences de 1775, que les résistances perpendiculaires de différentes surfaces planes, pour une même vîtesse, sont sensiblement proportionnelles aux étendues de ces surfaces; mais, comme nous l'avons déjà observé dès ce temps-là, cette loi n'a lieu que pour des bateaux qui ont une certaine longueur relative à leur largeur. Aujourd'hui, si l'on compare l'*Expérience LXXXII* avec l'*Expérience II*, on trouvera que pour une même vîtesse la résistance du bateau de la *Figure 14* est à la résistance du bateau de la *Figure 12*, comme 31 est à 11 à peu-près, tandis que si la loi citée avoit lieu généralement, les deux résistances devroient être comme les nombres 22 & 11. La raison pour laquelle le bateau de la *Figure 14* éprouve une si grande résistance, est qu'il a trop de largeur comparativement à sa longueur ou à la dimension, suivant le sens de laquelle il est mu; d'où

il réſulte que le fluide écarté par-devant, n'a pas une liberté ſuffiſante pour couler le long du bateau, & pour venir occuper le creux qui ſe forme à l'arrière. Il exiſte donc dans tous les cas un certain rapport entre la largeur & la longueur d'un Vaiſſeau, pour que la vîteſſe du ſillage acquierre toute la plénitude dont elle eſt ſuſceptible; mais quel eſt ce rapport? Il dépend viſiblement en partie de la direction des molécules fluides, en partie de la forme de la carène, & en partie de la vîteſſe même du ſillage : vainement on entreprendroit de le ſoumettre aux formules de l'analyſe ; les élémens de la queſtion ſont trop compliqués, trop peu appréciables, trop mélés enſemble ; mais les *Expériences LXXVI, LXXVII, LXXVIII, LXXIX, LXXX, LXXXI*, où le bateau de la *Figure 12* a une poupe angulaire, étant combinées avec les expériences *I, II, III, IV, V*, où le même bateau eſt dépourvu d'une poupe angulaire, font voir que pour la réſiſtance directe & pour des vîteſſes de 2 ou 3 pieds par ſeconde, la longueur du Vaiſſeau doit être au moins triple de ſa largeur, ſi l'on veut que la vîteſſe du ſillage atteigne ſon *maximum*. Si la vîteſſe étoit plus grande, le rapport de la longueur du Vaiſſeau à ſa largeur ſeroit auſſi plus grand. Nous n'avons pas beſoin d'ajouter que la longueur étant une fois ſuffiſante pour la vîteſſe du ſillage, on ne pourroit que diminuer cette vîteſſe en augmentant la longueur du Vaiſſeau, puiſqu'on augmenteroit par-là le frottement le long de ſes côtés; mais il faut avouer que ce frottement eſt peu ſenſible, & qu'il ne le deviendroit que ſur des longueurs conſidérables.

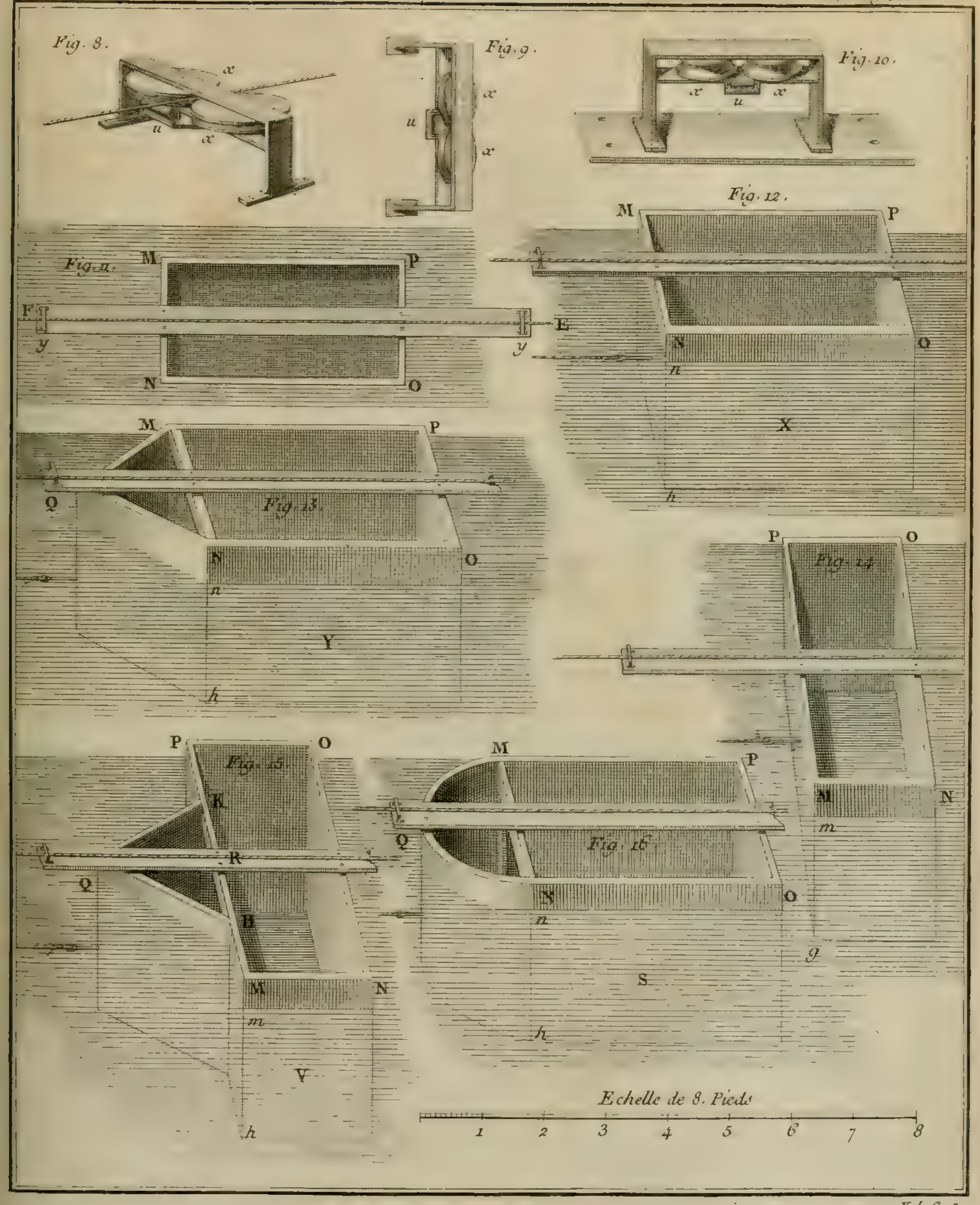
XIII.

ENFIN la quatrième queſtion propoſée également dans le Scholie cité, au ſujet des changemens qui peuvent arriver dans la vîteſſe du ſillage, lorſque l'on couvre d'une pointe triangulaire le milieu d'une proue plane, ou d'une poupe plane, va s'éclaircir par les *Expériences LXXXIII, LXXXIV, LXXXV, LXXXVI*; elle embraſſe, comme on voit, deux

objets. Ce qui a donné lieu au premier de ces Problèmes, eſt que le fluide allant choquer perpendiculairement les
Fig. 15. ſurfaces planes *PK, HM,* doit ſe détourner moins facilement de ſa direction, que ſi les parties *KO, HN* étoient enlevées, ou que le bateau eût à l'avant une forme ſemblable à celui de la *Figure 13;* d'où il paroît s'enſuivre que la réſiſtance de la proue *KQN,* doit augmenter. Les *Expé-*
Fig. 15. *riences LXXXIII, LXXXIV,* prouvent que cette conjecture eſt fondée; car il réſulte de l'*Expérience LXXXII,* que le ſyſtème des deux ſurfaces *PK, HM,* tiré par un poids de 56$^{liv.}$,25, parcourroit 72 pieds en 72 ſecondes, ou que le même ſyſtème, tiré par un poids de 81 livres, parcourroit 72 pieds en 60 ſecondes, qui font la durée de l'*Expérience LXXXIII.* Retranchant 81 livres de 112^{l},5, le reſte 31^{l},50 ſera le poids qui tire la proue *KQN* dans le cas de l'*Expérience LXXXIII;* or ſi cette proue étoit iſolée, ou que les deux parties planes *PK, MH* fuſſent enlevées, on trouveroit, au moyen de l'*Expérience LXIV* & de la loi pour les vîteſſes d'un même bateau; on trouveroit, dis-je, que la proue dont il s'agit, étant tirée ſimplement par un poids de 23^{l},53, parcourroit 72 pieds en 60 ſecondes; d'où l'on voit que la proue *KQN,* dans le cas de l'*Expérience LXXXIII,* éprouve une plus grande réſiſtance que ſi elle étoit iſolée: la même choſe ſe conclut par l'*Expérience LXXXIV.*

Quant à la ſeconde partie de la queſtion, on trouve, en comparant l'*Expérience LXXXV* avec l'*Expérience LXXXII,* que la poupe *KQH* fait diminuer la réſiſtance, ce qui rentre dans l'*article XI.*




Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Echelle de 8. Pieds
1
2
3
4
5
6
7
8

Y. le G. Sc.



I

K

A

X

F

N

D

D

I

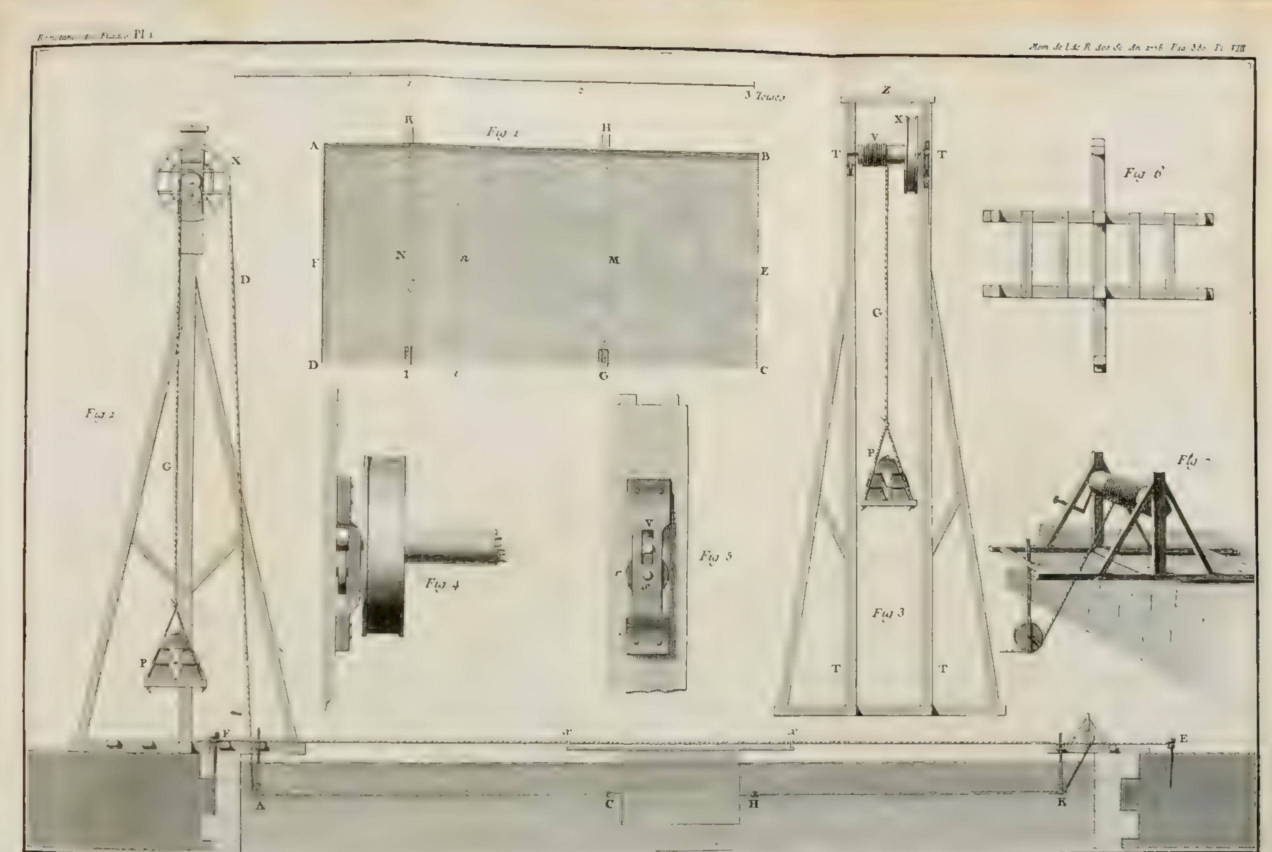
Fig. 2.

G

P

F

A


1
2
3 Toises
Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
M
N
P
T
V
X
Z

QUATRIÉME MÉMOIRE SUR L'ANATOMIE DES OISEAUX.

De la structure de l'organe de l'Ouïe des Oiseaux comparé avec celui de l'Homme, des Qadrupèdes, des Reptiles & des Poissons.

Par M. VICQ-D'AZYR.

DE toutes les propriétés particulières aux Animaux, la sensibilité est celle qui les distingue le mieux d'avec les corps dont ils se rapprochent le plus, tels que les Plantes : ceux dans lesquels elle a le plus d'influence, sont regardés comme les plus parfaits, & la pulpe nerveuse qui en est le siége, semble être destinée à établir une liaison constante entre les corps auxquels elle appartient & tout ce qui les environne.

Lû à la Séance publique de la S.t Martin, 1778.

C'est pour cette raison que la description des nerfs & celle des organes des sens, dans lesquels ils se distribuent, ont toujours fixé l'attention des Physiciens; mais il ne suffit pas de connoître leur développement dans une classe d'animaux, ce n'est qu'en faisant un tableau dont l'anatomie comparée peut seule offrir l'ensemble, qu'il est possible de déterminer leurs rapports & leur étendue respective dans le système général des corps organiques.

Il est vrai que pour obtenir des résultats satisfaisans, on doit supposer un nombre prodigieux de connoissances acquises dans l'anatomie des différens Animaux : il s'en faut bien que l'on soit assez avancé pour que l'histoire de tous les sens puisse être traitée de cette manière.

L'organe de l'ouïe est un de ceux que l'on a examinés avec le plus de soin, sur-tout dans l'homme & dans les quadrupèdes.

Nous avons cru devoir placer ici une courte deſcription de l'oreille de l'homme, que l'on peut regarder comme le modèle le plus parfait, & qui d'ailleurs ſera le point central de toutes nos comparaiſons dans ce Mémoire.

En dehors, une conque ſigurée comme un pavillon, & un conduit externe tortueux & oblique, ſont deſtinés à tranſmettre les ſons juſqu'à une membrane élaſtique & tendue comme celle d'un tambour : les frémiſſemens de cette membrane ébranlent trois oſſelets que deux muſcles meuvent & qui ſont placés dans la cavité du tympan ; celle-ci communique avec la bouche par un conduit appelé *trompe d'Euſtache ;* avec la partie poſtérieure de la tête, par les cellules maſtoïdiennes ; & avec le labyrinthe, par deux ouvertures, appelées des noms de *fenêtre ronde & ovale ;* un des oſſelets qui eſt implanté dans la dernière, propage le mouvement juſqu'au labyrinthe ; ſes impreſſions y ſont reçues par une pulpe nerveuſe qui ſe diſtribue dans trois conduits ovales & demi-circulaires & dans une ſpire oſſeuſe très-élégamment contournée, & que l'on a comparée à un limaçon : une humeur lymphatique maintient la ſoupleſſe de cette pulpe & peut être reſorbée dans l'intérieur du crâne par deux conduits appelés *aqueducs de Cotunni.*

On ſait que ces groſſes maſſes vivantes qui habitent les mers les plus profondes, & que l'on connoît ſous le nom de *cétacées*, ſont pourvues de l'organe de l'ouïe : le poiſſon muet eſt ſenſible à l'impreſſion des ſons, ſans pouvoir en produire aucun ; l'animal qui rampe, le froid reptile, entend auſſi, & la ſtructure de ſon oreille n'a point échappée à la curioſité des Anatomiſtes. M.rs Geoffroy & Camper ſont ceux qui ſe ſont le plus diſtingués dans ce genre de recherches *(a)*.

C'eſt pour compléter ces travaux, que je me ſuis déterminé

(a) J'ai auſſi donné la deſcription de l'organe de l'ouïe des Poiſſons, dans deux Mémoires ſur l'anatomie de ces animaux, imprimés parmi ceux des Savans étrangers.

à faire connoître l'organe de l'ouïe des oiſeaux dans tous ſes détails.

Leur voix eſt très-étendue, & dans un grand nombre d'eſpèces, elle eſt très-mélodieuſe; un double larynx & une trachée-artère très-mobile, & quelquefois même ſingulièrement recourbée, en ſont les inſtrumens; mais un animal qui produit une ſuite de ſons, doit prendre quelque plaiſir à les entendre : la mélodie de la voix ſuppoſe donc une grande perfection dans l'oreille des oiſeaux.

Parmi les Anciens, Ælien *(lib. II, cap. 12)*, Ariſtote *(lib. IX, cap. 39)*, Pline, en ont à peine eu quelque connoiſſance; ils avoient ſeulement obſervé que les oiſeaux ſont très-ſenſibles au bruit, que l'éducation peut leur apprendre à former les ſons les plus agréables, & que cependant ils manquent d'oreille externe. Parmi les Modernes, Aldrovande, Peyer *(Obſ. p. 45)*, Derham *(b)*, Pérault & Brich, ont parlé de l'oſſelet que le tympan contient; il en eſt auſſi fait mention dans les Tranſactions Philoſophiques, *n.° 199*, & Haller l'a décrit dans le tome V.e de ſa Phyſiologie, *p. 213*. La trompe qui établit une communication entre le tympan & la partie interne & poſtérieure du bec, eſt annoncée dans le *n.° 119* des Tranſactions Philoſophiques; enfin les conduits demi-circulaires ont été décrits par Pérault, qui en a même donné une figure, accompagnée d'une explication très-ſuccincte, par Schelammer, & dans les Tranſactions Philoſophiques, *n.° 199*.

Mais quoique les parties les plus eſſentielles à l'organe de l'ouïe des oiſeaux ſoient connues, elles n'ont pas été décrites avec aſſez de ſoin; il y en a d'ailleurs quelques-unes dont on n'a fait aucune mention, & nul auteur n'en a préſenté l'enſemble.

Afin de remplir le mieux qu'il nous ſera poſſible l'objet que nous nous propoſons dans ce Mémoire, nous donnerons

---

(b) Derham l'a repréſenté dans la vingt-troiſième figure qui eſt très-défectueuſe; il place un triangle ſur l'oſſelet, & la longue branche n'y eſt point exprimée. Voyez auſſi *Blaſ. anat. planche 42, fig. 3.*

d'abord une explication exacte de la ſtructure de cet organe; nous le comparerons enſuite avec celui des autres animaux qui en ſont pourvus, & nous finirons en faiſant quelques réflexions ſur la perception des ſons en général.

ARTICLE PREMIER.

UN examen attentif de l'organe de l'ouïe des oiſeaux préſente le conduit auditif externe, la membrane du tympan, le tympan lui-même, l'oſſelet conique qu'il renferme, les cellules oſſeuſes communiquantes, le conduit qui tient lieu de trompe d'Euſtache, le labyrinthe, les conduits demi-circulaires, le conduit droit, le nerf auditif & les ouvertures auditives internes.

Conduit audi-tidif externe.

1.° Dans la région externe, on aperçoit le conduit auditif; il eſt environné de plumes qui ont une ſtructure particulière: elles ſont diviſées en un grand nombre de filets longs, grêles, égaux de chaque côté & aſſez écartés les uns des autres, comme on peut le voir dans la *figure 7;* preſque tous les oiſeaux ont ces plumes arrangées ſymétriquement ſur pluſieurs lignes; elles ſont très-élégamment diſpoſées dans le cotinga ordinaire, ainſi que dans celui dont le bec eſt ſurmonté par un appendice, dans l'alouette de Cayenne, dans la tourterelle des bois, & même dans le roitelet; dans quelques-uns, leur forme eſt des plus agréables; l'oiſeau-mouche huppé de Cayenne & l'oiſeau-mouche à oreilles, en fourniſſent des exemples: dans l'oiſeau de Paradis à gorge dorée, décrit par M. Sonnerat, & connu maintenant ſous le nom de *ſifilet,* elles ſont très-longues & terminées par une lentille de belle couleur; dans le grand & le petit duc, elles forment une eſpèce de bouquet; dans le chat-huant, toutes les plumes qui environnent les yeux & le bec, ont le même caractère; dans le cazoar & dans l'autruche, au contraire, les parties latérales de la tête ſont nues & abſolument à découvert.

Le conduit auditif des oiſeaux eſt ligamenteux, oblique, arrondi, aſſez court, ſoutenu ſur un bord creux qui le rétrécit &

& très-mobile ; le muscle crotaphyte adhère à sa paroi antérieure ; deux petits muscles sont situés en bas & en arrière, & paroissent destinés à le mouvoir & à redresser les plumes qui sont courbées sur son ouverture.

2.° La membrane du tympan, placée au fond du conduit auditif, est tournée en devant, elle s'insère à un contour assez inégal; sa forme est ovale, & son volume est très-grand par rapport à celui de l'oiseau ; elle fait une saillie en dehors ; on y trouve trois lames, l'interne & l'externe sont fournies par le périoste; la lame moyenne est très-mince, transparente & imperforée. La *figure 5* représente la membrane du tympan en *L, B.* Membrane du tympan.

3.° Le tympan offre une cavité qui est simplement arrondie dans quelques oiseaux, comme dans les gallinacées, & qui, dans la chouette & dans plusieurs autres, est divisée par une saillie transversale : ces différences sont exprimées dans la première & dans la troisième figure. J'ai trouvé cinq ouvertures principales dans le tympan, trois conduisent au tissu cellulaire osseux ; la première est très-élevée & se dirige obliquement; la seconde est située dans le tissu réticulaire de la base du crâne ; la troisième est placée en arrière : on les voit en *A, D, C.* Les deux autres sont, 1.° celle qui communique avec le labyrinthe, & qu'on appelle la *Fenêtre ovale;* 2.° l'orifice de la trompe d'Eustache, que j'ai été surpris de trouver aussi considérable : ces deux ouvertures sont représentées en *D, E.* Le tympan. Fig. 1. *Idem.*

4.° Un osselet conique, appelé *collumella* par Schelammer, est placé dans le tympan ; sa base qui ressemble à un petit parasol, est fermée par une plaque osseuse arrondie, qu'une membrane assujettit dans l'ouverture ovale ; le manche ou pétiole, plus étroit dans le milieu, augmente un peu de volume auprès de la membrane du tympan à laquelle il adhère ; dans ce contact, on voit deux petites branches de longueur inégale qui font un angle aigu avec le manche de l'osselet. Il m'a semblé quelquefois qu'une de ces deux branches étoit musculaire ; la plus longue ne se trouve pas dans tous L'osselet.

les oiſeaux; je l'ai obſervée conſtamment dans les gallinacées; elle eſt très-déliée, & elle ſe porte le long de la membrane du tambour, à peu-près ſuivant la direction de la trompe d'Euſtache; l'autre, plus courte, plus groſſe, & qui ſe trouve dans tous les oiſeaux, s'attache à la même membrane dont elle meſure la convexité, & elle s'insère auprès de l'ouverture ovale; on les voit toutes deux en *f*, *g*, où l'oſſelet eſt repréſenté en *D E*: ce dernier eſt quelquefois environné par pluſieurs filets ligamenteux très-fins; on n'y obſerve rien de plus: Derham a donc eu tort de le repréſenter comme ſurmonté par un appendice triangulaire qui déborde des deux côtés.

Fig. 5.

Cellules communicantes.

5.° Tout l'appareil de l'organe de l'ouïe, dans les oiſeaux, eſt entouré par un tiſſu ſpongieux très-étendu, dont les cellules communiquent entr'elles d'un côté de la tête à l'autre & avec le tympan; la baſe du crâne eſt également creuſée par des cavités réticulaires qui s'étendent juſqu'à la membrane ſupérieure, de ſorte que les conduits demi-circulaires ſe trouvent comme iſolés, & placés librement au milieu d'un eſpace aſſez conſidérable : ces cavités paroiſſent en *E*, *F*.

Fig. 6.

Trompe d'Euſtache.

6.° Le conduit qui tient lieu de la trompe d'Euſtache, eſt étroit & un peu aplati; il eſt placé en bas, & il s'ouvre antérieurement vers les deux petites faces articulaires ſur leſquelles le mouvement de la partie ſupérieure du bec s'exécute.

Labyrinthe.

7.° La cavité du labyrinthe eſt ronde & fort étroite; une pulpe nerveuſe très-fine y eſt répandue; une ſeule ouverture communique avec le tympan, & c'eſt par le moyen de l'oſſelet conique implanté dans cette ouverture, que la pulpe nerveuſe eſt ébranlée.

Conduits demi-circulaires.

8.° Les conduits demi-circulaires ſont au nombre de trois; deux, inégaux en grandeur, ſont verticaux; le troiſième eſt horizontal : le grand conduit vertical eſt incliné de devant en arrière; le petit conduit perpendiculaire eſt ſitué obliquement de droite à gauche, & il coupe les deux autres à angle droit : le conduit demi-circulaire horizontal, s'ouvre par ſes

deux extrémités au niveau de celles du grand conduit perpendiculaire. J'ai trouvé dans plusieurs oiseaux des renflemens vers leurs orifices, qui en augmentent l'étendue & la surface : on voit ces trois conduits dans la *figure 2*, & les renflemens dans la *figure 6*, en *H*, *C*.

9.° On aperçoit à la partie interne du labyrinthe un prolongement figuré, comme une portion de conduit demi circulaire, avec cette différence qu'il est droit ; il forme en bas & en arrière une espèce de cul-de-sac. Pérault le regardoit comme un limaçon ; mais outre qu'il n'y a ni rampe, ni cloison quelconque, il ne communique point immédiatement avec le tympan par une ouverture qui puisse être comparée à la fenêtre ronde, de sorte qu'il n'a aucun des caractères du *coclea :* on le voit en *HI* & en *D*. Conduit droit. Fig. 2 & 6.

10.° Dans la région interne & postérieure du crâne, on trouve quatre ou cinq ouvertures remarquables ; deux plus grandes ne communiquent point avec l'organe de l'ouïe ; deux plus petites donnent passage aux nerfs qui y sont destinés. Trous & nerfs auditifs.

La plus grande de ces ouvertures est placée au milieu d'une excavation étroite & circulaire, qui répond au grand conduit vertical. Je l'ai prise au premier coup-d'œil pour le conduit auditif interne ; mais elle ne contient qu'un prolongement de la substance cérébrale, avec quelques vaisseaux qui m'ont paru sortir par son extrémité.

La seconde des ouvertures, qui ne communique point avec l'organe de l'ouïe, est située en bas & en arrière.

Les nerfs auditifs naissent de la moëlle alongée près du cervelet ; ils passent par deux ouvertures très-rapprochées & fort étroites, qui sont représentées en *B*, *E* ; ils sont eux-mêmes très-minces : un des deux est plus gros & fait un trajet plus considérable. Fig. 4.

J'ai cru que je rendrois mon travail plus complet en recherchant la structure de l'organe de l'ouïe dans l'autruche, qui, comme l'on sait, est un oiseau très-pesant & pour ainsi dire attaché à la surface de la terre ; & dans la chauve-

ſouris, animal dont la forme bizarre ſemble réunir les caractères des quadrupèdes avec ceux des oiſeaux, & qui habitant le même élément que ces derniers, pourroit être ſoupçonné d'avoir dans la ſtructure de l'oreille, de grands rapports avec eux. M. Daubenton m'ayant procuré une tête d'autruche, je l'ai diſſéquée avec beaucoup d'attention ; les conduits demi-circulaires m'ont paru peu étendus & fort étroits, vu le grand volume de l'oiſeau, & je n'y ai trouvé que l'ébauche du conduit droit : l'organe de l'ouïe de l'autruche n'eſt donc pas auſſi-bien developpé que celui des autres oiſeaux; ceux-ci étant en effet ſouvent placés au centre d'une ſphère très-étendue, avoient beſoin de conduits auriculaires très-ouverts & très-vibratils.

Pour ce qui eſt de la chauve-ſouris, l'organe de l'ouïe de cet animal, dont aucun Anatomiſte n'a fait la deſcription, l'éloigne de la ſtructure des oiſeaux pour le rapprocher de celle des quadrupèdes : la diſſection m'y a fait voir un pavillon cartilagineux très-ample; un tympan formé par une cavité ſphérique & tranſparente ; une membrane qui s'y inſéroit obliquement; trois oſſelets dont un tenoit lieu de marteau, avec une apophyſe grêle très-prolongée, & un muſcle très-exprimé, un limaçon contenu dans un tubercule que le tympan renfermoit, & trois conduits demi-circulaires.

Les oiſeaux dont j'ai diſſéqué l'organe de l'ouïe, ſont le Coq-d'Inde, la Poule, le Pigeon, la Chouette, la Pie, le Geai, la Tourterelle, le Pic-vert, le Canard, le Moineau & le Serin.

ARTICLE II.

LA deſcription qui a été faite de l'organe de l'ouïe des oiſeaux, la force & la mélodie de leur voix, & ſur-tout cette extrême ſenſibilité au bruit, qui en les avertiſſant du moindre danger, rend leur fuite auſſi prompte qu'utile en une infinité de circonſtances, ſuffiſent ſans doute pour faire connoître combien ce ſens eſt parfait dans cette claſſe d'animaux; mais nous en apprécierons plus facilement les rapports,

en comparant les différentes parties qui le compoſent, avec celles que l'Anatomie a démontrée dans l'oreille de l'homme, des quadrupèdes, des reptiles & des poiſſons.

La conque auditive ſert dans l'homme & dans les quadrupèdes à réunir & à diriger les vibrations ſonores vers le tympan; cette partie manque dans les oiſeaux; elle auroit peut-être nui dans le vol, en augmentant le poids & l'étendue des parties antérieures du corps : dans pluſieurs reptiles & dans les poiſſons, il n'y a pas même de conduit auditif externe.

L'uſage de la membrane du tambour eſt de tranſmettre le ſon juſqu'au labyrinthe, par l'intermède d'un ou de pluſieurs oſſelets; elle eſt très-grande & très-déliée dans l'oiſeau, où elle fait une ſaillie en dehors; dans l'homme, elle en fait une en dedans; dans les reptiles & dans les poiſſons, elle eſt très-épaiſſe; & dans quelques-uns même, elle ne diffère pas de la peau qui recouvre le reſte du corps.

La cavité du tympan eſt moins grande, relativement au volume du corps dans l'homme & dans les quadrupèdes, que dans les oiſeaux; la conque, en réuniſſant un plus grand nombre de vibrations ſonores, ſupplée peut-être dans les premiers à l'étendue du tympan; & cette étendue eſt néceſſaire dans les oiſeaux, qui, comme nous l'avons dit, n'ont pas de conque auditive : dans les reptiles, le tympan eſt étroit; & dans les poiſſons, il exiſte à peine; on ne trouve d'ailleurs la corde du tambour ni dans ces derniers, ni dans les oiſeaux.

Dans l'homme & dans les quadrupèdes, la cavité du tympan eſt agrandie par des cellules, qu'on appelle *maſtoïdiennes*, & un aſſemblage de petits grains oſſeux recouvre les conduits demi-circulaires & le limaçon; dans les oiſeaux, ces cellules n'exiſtent point à la vérité, mais un réſeau oſſeux très-étendu y ſupplée, & environne tous les conduits qui ſont preſque iſolés; la force des vibrations doit être augmentée par les ondulations de l'air qui y circule avec facilité; les ouvertures qui établiſſent une communication entr'elles & le

tympan, ſont plus nombreuſes dans les oiſeaux que dans tous les autres animaux connus: on n'y trouve point de fenêtre ronde, non plus que dans les reptiles; dans les poiſſons, il n'y a pas même de fenêtre ovale.

Quelques reptiles, tel que la Grenouille, ont, ſuivant la remarque de M. Geoffroy, la trompe d'Euſtache courte & large; dans les oiſeaux au contraire, elle eſt longue & étroite.

Les oſſelets du tympan ſont deſtinés à communiquer le mouvement juſqu'à la fenêtre ovale: dans tous les animaux qui ont un limaçon, on trouve trois oſſelets, le marteau, l'enclume & l'étrier; cette conformation eſt celle de l'homme & des quadrupèdes; les oiſeaux qui manquent de limaçon, n'ont qu'un oſſelet; dans quelques-uns des reptiles qui ont des extrémités, il eſt figuré en platine comme dans l'oiſeau. La *figure 8* préſente celui de la tortue, dégagé de toute adhérence; il eſt très-alongé; on le voit en place dans la *figure 9* en *E D*, & il tient à la membrane du tympan repréſentée en *D* dans la *figure 10;* celui du caméléon eſt plus grêle; la platine eſt fort étroite, & il ſe termine vers l'autre extrémité par un léger renflement; on le voit dans la *figure 11* en *D E ſ*, où cet oſſelet eſt iſolé, & dans la *figure 12* où il occupe ſa place naturelle en *G*. Ces trois deſſins ont été faits par M. Geoffroy lui-même, qui a bien voulu me permettre d'en faire uſage: j'ai cru que cette courte deſcription, en ſervant de pièce de comparaiſon pour mon travail, complèteroit celui des Anatomiſtes ſur l'organe de l'ouïe des reptiles qui ont des extrémités; dans les reptiles alongés, l'oſſelet eſt très-irrégulier; dans l'oiſeau, il ſupplée à l'étrier, & il eſt, comme lui, placé dans la fenêtre ovale: ſes deux appendices paroiſſent répondre au marteau & à l'enclume. Dans les poiſſons épineux, on trouve trois oſſelets aplatis & ſitués ſur la pulpe auditive; & dans les cartilagineux, une ſubſtance friable comme de l'amidon, en tient la place; mais il eſt eſſentiel de remarquer que c'eſt dans le crâne qu'elle ſe trouve, ainſi que les oſſelets, & non dans le tympan, dont les poiſſons ſont dépourvus.

Les conduits demi-circulaires ſont également au nombre de trois dans preſque tous les animaux, ſi l'on en excepte peut-être quelques-uns des reptiles qui n'ont point d'extrémités; mais c'eſt dans les oiſeaux où, eu égard au volume du corps, ils ont incomparablement le plus d'étendue, & où ils ſont d'ailleurs le plus élégamment contournés; ceux de l'homme ſe terminent ſur le même niveau : dans l'oiſeau, le petit conduit vertical deſcend plus bas que le grand, de toute la moitié de ſon ſegment.

Les reptiles & les poiſſons n'ont rien qui reſſemble au limaçon; dans les oiſeaux, un conduit droit y ſupplée.

Tous les animaux dans leſquels on trouve la conque auditive, les trois oſſelets & le limaçon, ont auſſi un conduit auditif interne : dans les oiſeaux & dans les reptiles au contraire, les deux ouvertures nerveuſes ſont placées au niveau de la ſurface interne du crâne; de ſorte que l'organe de l'ouïe des oiſeaux, quoique beaucoup plus parfait que celui des reptiles, a cependant avec lui des rapports conſtans.

Nous n'avons point parlé des inſectes, parce que, quoique pluſieurs, tels que la ſauterelle & le grillon, appellent leurs femelles, on ignore cependant juſqu'ici comment la perception des ſons ſe fait dans ces animaux.

ARTICLE III.

CE Tableau de comparaiſon, qui prouve combien les travaux des Modernes ont avancé l'anatomie de l'Oreille, fournit immédiatement les conſéquences ſuivantes:

1.° L'exiſtence des oſſelets, ſi elle n'eſt pas eſſentielle, eſt au moins très-utile pour la perception des ſons, puiſqu'on la trouve ſans aucune exception dans tous les animaux ſuſceptibles de les entendre; mais il n'eſt pas néceſſaire qu'il y en ait pluſieurs, puiſqu'un ſeul ſuffit aux oiſeaux & aux reptiles.

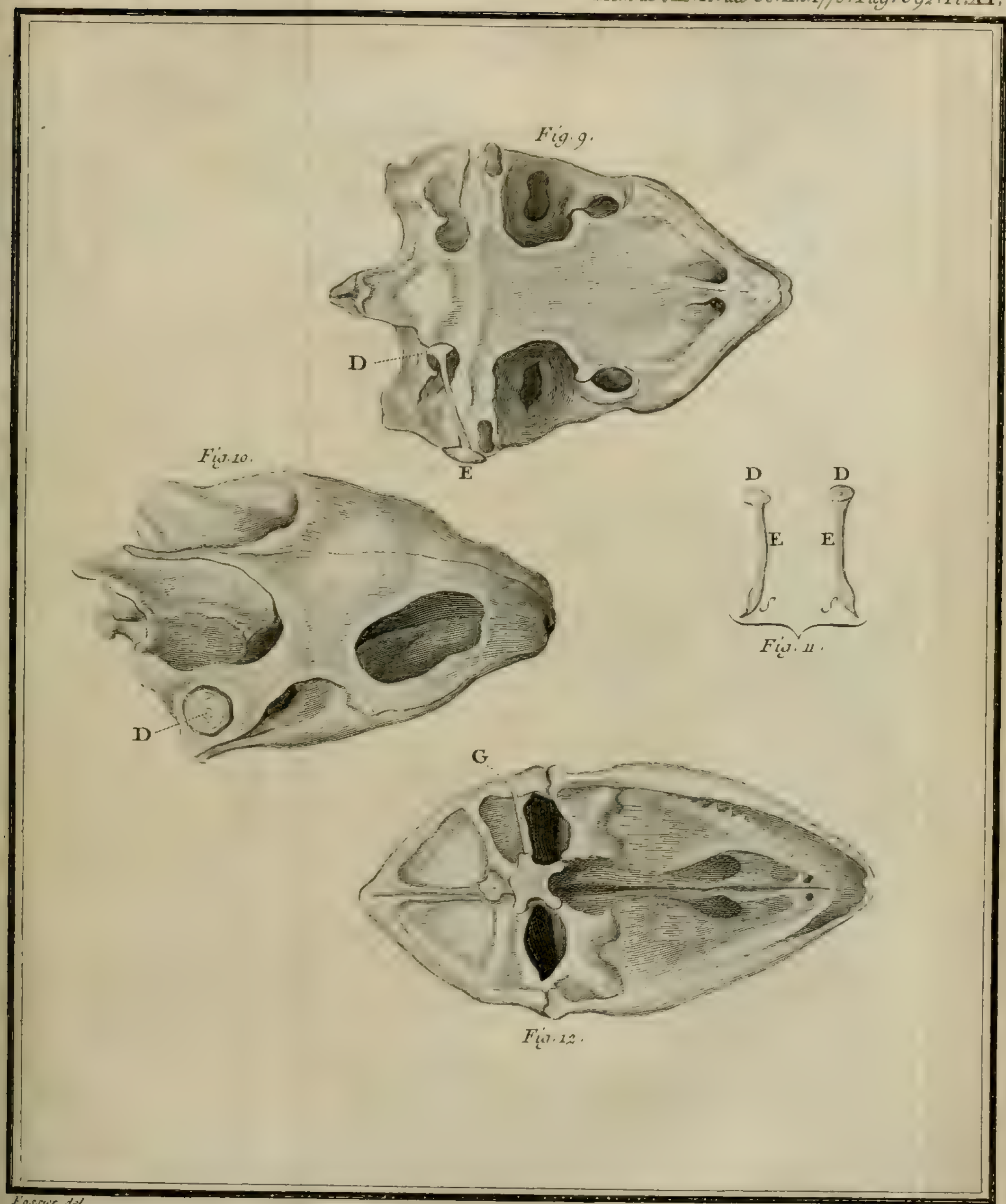
2.° il eſt également démontré que les conduits demi-circulaires ſont une partie eſſentielle à l'organe de l'ouïe, puiſqu'ils exiſtent dans tous les animaux où cet organe a été aperçu & bien décrit.

3.° Enfin le limaçon, qui eſt particulier à l'homme & aux quadrupèdes, n'eſt pas indiſpenſablement néceſſaire aux fonctions de l'oreille interne, puiſque les oiſeaux qui en ſont dépourvus entendent très-bien.

Il y a apparence (nous prions que l'on veuille bien nous permettre cette conjecture) que le limaçon forme avec les conduits demi-circulaires, dans chaque oreille, un double inſtrument composé de deux parties très-diſtinctes, dans leſquelles la perception des ſons ſe fait ſéparément, mais avec des rapports déterminés, ce qui doit ajouter à l'harmonie, à la ſenſibilité, & pour ainſi dire à l'intelligence de l'organe.

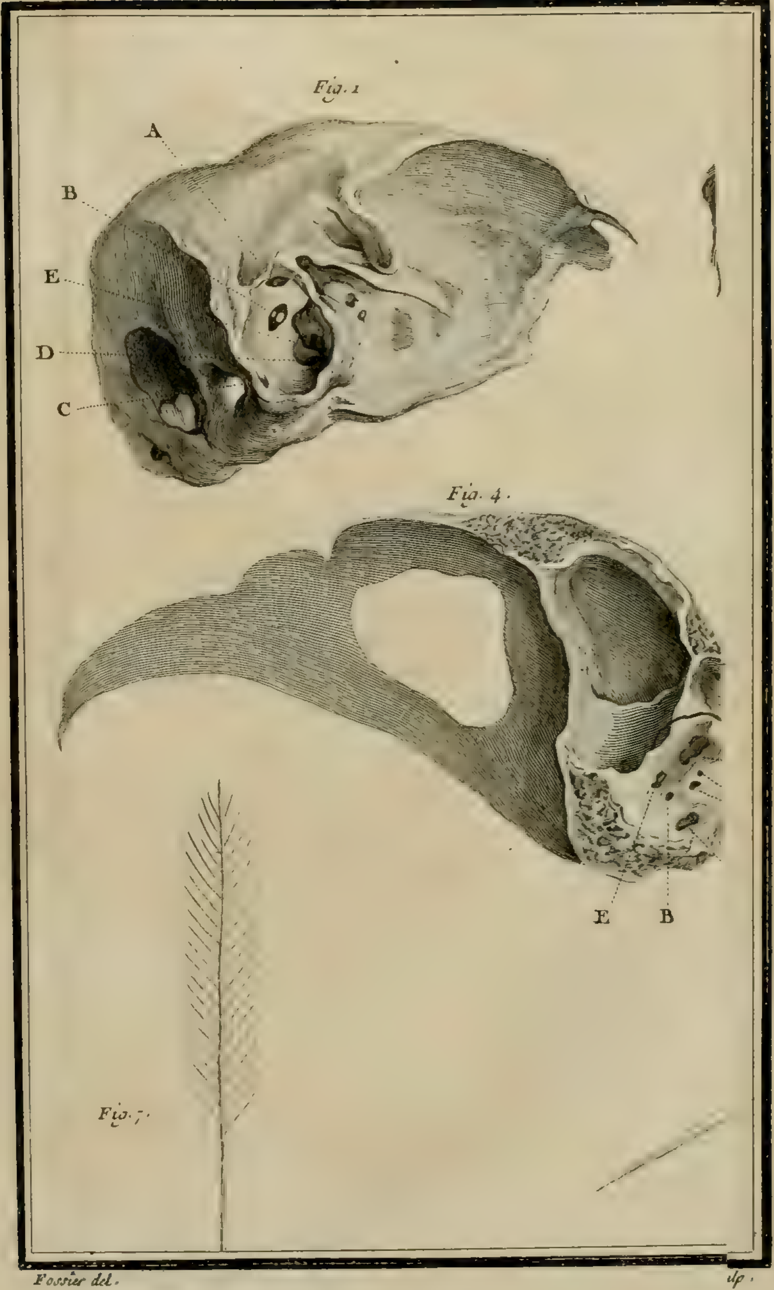
Ne pouroit-on pas d'après ces réflexions, conſidérer le ſens de l'ouïe ſous un double point de vue; premièrement, par rapport aux parties eſſentielles à ſa ſtructure, qui ſont une membrane, au moins un oſſelet, des conduits demi-circulaires & une pulpe nerveuſe; ſecondement, par rapport à ſes parties acceſſoires, qui ſont la conque, le conduit auditif interne, pluſieurs oſſelets, des muſcles, la corde du tympan, & ſurtout le limaçon? Ainſi les animaux dans leſquels on a démontré cet organe, pourroient être diviſés en deux claſſes; les uns réuniſſent en effet toutes les parties qui le conſtituent; les autres ont ſeulement celles que nous avons dit lui être eſſentielles. L'homme & les quadrupèdes doivent être rangés dans le premier ordre: outre que les oiſeaux ſont à la tête du ſecond, on peut encore ajouter qu'ils ont les parties eſſentielles à l'organe de l'ouïe, les ſeules dont ils ſoient pourvus, beaucoup plus développées que l'homme & tous les autres animaux; de ſorte que le ſens de l'ouïe dans les oiſeaux eſt auſſi parfait qu'il eſt ſimple, & juſqu'à ce que l'on ait déterminé avec plus d'exactitude l'uſage de la lame ſpirale du limaçon qui leur manque, nous ne croyons pas que l'on puiſſe rien dire de plus précis ſur la place qu'il convient de leur aſſigner.





Fossier del. Y. le Gouaz Sculp.


MUSEUM



Fossier del.



Fig. 1 — A, B, E, D, C

Fig. 2 — E, I, H, A, D

Fig. 3 — E, B, F, D, C

Fig. 4 — D, A, F, E, B

Fig. 5 — D, L, f, E, A, g, B

Fig. 6 — F, E, A, H, C, D

Fig. 7

Fig. 8

SECOND MÉMOIRE
SUR
LES TACHES DU SOLEIL,
CONTENANT
DIVERSES OBSERVATIONS DE TACHES,
Avec les positions qui en résultent, & la confirmation des résultats précédens.

Par M. DE LA LANDE.

DANS mon premier Mémoire ſur les Taches du Soleil *(Mém. de l'Acad. année 1776, page 457)* j'ai donné une détermination nouvelle de l'Équateur & de la rotation du Soleil; mais je n'ai pas diſſimulé que, vu le petit nombre d'obſervations faites juſqu'à préſent, ces recherches étoient ſuſceptibles d'être perfectionnées: je n'ai pas perdu de vue cet objet, & je vais raſſembler ici des obſervations que j'ai faites depuis l'impreſſion de mon premier Mémoire. Commencé en 1778, fini en 1780.

Je commencerai par quelques réflexions relatives aux premiers Aſtronomes qui obſervèrent les taches du Soleil; ce ſera un ſupplément qui complètera le Traité des taches du Soleil, contenu dans le Mémoire précédent. Le premier Ouvrage qui parut ſur les taches du Soleil, fut celui de Fabricius, intitulé *Joh. Fabricii Phryſii de maculis in ſole obſervatis, & apparente earum cum ſole converſione narratio.* Wittebergæ, 1611, *petit in-4.°*

L'Épître dédicatoire eſt datée du 13 Juin 1611: dans cet Ouvrage, qui a quarante-trois pages, il n'y en a que huit où il ſoit parlé des taches du Soleil. En voici un extrait, où j'ai renfermé en peu de mots tout ce que l'Auteur dit ſur cette matière; le reſte eſt un verbiage de Métaphyſique inutile à notre objet.

« Après que les Lunettes ont été découvertes en Hollande, » on a commencé à regarder la Lune, ensuite Jupiter & Saturne, » & Galilée y a trouvé des choses singulières: pour moi, poussé » par la même curiosité, je m'occupai à regarder le Soleil, dont » les bords me paroissoient avoir des inégalités remarquables, » que mon père, David Fabricius, avoit déjà remarquées, » comme je l'ai appris par ses Lettres dans le temps que je m'en » occupois. J'aperçus une tache noirâtre sur le Soleil, plus rare & » plus pâle d'un côté, assez grande par rapport au disque du Soleil; » je crus d'abord que c'étoit un nuage; mais l'ayant regardée dix » fois avec différentes lunettes, & ayant appelé mon père pour » la lui faire voir, nous fumes assurés que ce n'étoit point un » nuage; le Soleil s'élevant de plus en plus, nous ne pouvions » plus le regarder, d'autant que lors même qu'il est à l'horizon, » il affecte les yeux de manière que, pendant plus de deux » jours, la vue des objets est altérée: c'est pourquoi j'avertis » ceux qui voudroient faire de pareilles Observations, de » commencer à recevoir la lumière d'une petite portion du » Soleil, afin que l'œil s'y accoutume, & parvienne peu-à-peu » à supporter la lumière du disque entier du Soleil. Nous pas- » sames le reste de la journée & la nuit suivante avec une » extrême impatience, & en rêvant sur ce que pouvoit être cette » tache: si elle est dans le Soleil, je la reverrai sans doute; si » elle n'est pas dans le Soleil, son mouvement nous la rendra » invisible. Enfin je la revis dès le matin avec un plaisir in- » croyable; mais nous vimes qu'elle avoit un peu changé de » place, ce qui augmenta notre incertitude: cependant nous » imaginames de recevoir les rayons du Soleil par un petit » trou dans une chambre obscure & sur un papier blanc, & nous » y vimes très-bien cette tache en forme de nuage alongé; » le mauvais temps nous empêcha de continuer ces Observa- » tions pendant trois jours. Au bout de ce temps-là, nous vimes » la tache qui étoit avancée obliquement vers l'Occident; nous » en vimes une autre plus petite vers le bord du Soleil, qui » dans l'espace de peu de jours parvint jusqu'au milieu; enfin » il en survint une troisième; ensuite la première disparut, &

ſes autres quelques jours après. Je flottois entre l'eſpérance « & la crainte de ne pas les revoir ; mais dix jours après, la « première reparut à l'Orient : je compris alors qu'elle faiſoit « une révolution, & depuis le commencement de l'année je « je me ſuis confirmé dans cette idée, & je les ai fait voir à « d'autres qui en ſont perſuadés. Cependant j'avois un doute « qui m'empêcha d'abord d'écrire à ce ſujet, & qui me faiſoit « même repentir du temps que j'avois employé à cette Obſer- « vation : je voyois que ces taches ne conſervoient pas entr'elles « les mêmes diſtances, qu'elles changeoient de forme & de « vîteſſe ; mais j'eus d'autant plus de plaiſir lorſque j'en eus ſenti « la raiſon. Comme il eſt vraiſemblable, par ces Obſervations, « que les taches ſont ſur le corps même du Soleil, qui eſt « ſphérique & ſolide, elles doivent devenir plus petites & « ralentir leur mouvement ſur les bords : nous invitons les « Amateurs des vérités phyſiques à profiter de l'ébauche que « nous leur préſentons ; ils ſoupçonneront ſans doute que le « Soleil a un mouvement de converſion, comme l'a dit « Jordanus Bruno *, & en dernier lieu Képler dans ſon Livre « ſur les mouvemens de Mars, car ſans cela je ne ſais ce que « nous ferions de ces taches. Je ne ſuis pas de l'avis que ce ſoient « des nuages ; je ne ſuis pas non plus de l'avis de ceux qui ont « placé les Comètes dans le Soleil, comme des émiſſaires « deſtinés à y revenir bientôt : j'aime mieux me taire ſur tout « cela que de parler au haſard ; je ſuis même tenté de regarder « ce mouvement du Soleil comme la cauſe des autres mouve- « mens céleſtes, ſuivant ces paroles d'Ariſtote, qui dit dans « ſes Problèmes, *que le Soleil eſt le père & l'auteur des* « *mouvemens.* »

* Brûlé en 1600.

On voit par-là que Fabricius étoit bien peu avancé ſur les taches que le haſard lui avoit fait apercevoir ; Galilée alla bien plus loin, comme il eſt naturel de le penſer. Galilée, dans ſon Diſcours ſur la Comète de 1618, *page 3*, dans ſon *Saggiatore* ou *Trutinator*, *pages 2 & 209*, & dans ſes Dialogues du Syſtème du Monde, *page 337*, a toujours ſoutenu qu'il étoit le premier qui eût vu les taches du Soleil,

& que Scheiner n'avoit commencé à les observer qu'après avoir vu les Écrits de Galilée ; Scheiner s'en justifie dans son *Rosa Ursina:* il dit qu'il avoit commencé à les voir au mois de Mars 1611, en mesurant avec une lunette le diamètre du Soleil; il reprit ces observations au mois d'Octobre; il en avertit deux Jésuites, qui le dirent à M. Velser, Magistrat d'Ausbourg, qui aimoit les Savans; celui-ci engagea le P. Scheiner à lui écrire à ce sujet, des Lettres qui furent imprimées en 1611 sous le nom d'*Appelles,* parce que le P. Busæe, Provincial des Jésuites, ne voulut pas permettre que ces nouveautés parussent sous le nom du P. Scheiner: celui-ci observe que Galilée n'a produit aucune observation figurée avant celle du 5 Avril 1612, tandis qu'il en a produit de 1611.

Le premier livre où Galilée ait parlé des taches du Soleil, est intitulé *Istoria dimostrazioni intorno alle macchie Solari; Roma, 1613:* on lit dans la Préface, que Galilée étant à Rome au mois d'Avril 1611, avoit fait voir les taches du Soleil à plusieurs personnes dans le jardin Quirinal du Cardinal Bandini, & qu'il en avoit parlé quelques mois auparavant à ses amis de Florence, tandis que l'anonyme, caché sous le nom d'*Apelles* (ou le P. Scheiner) ne cite que des observations du mois d'Octobre 1611.

On y voit aussi *(page 10)* que Marc Velser, Duumvir d'Ausbourg, avoit envoyé à Galilée, le 6 Janvier 1612, les trois Lettres qui portoient le nom d'*Apelles,* en lui demandant son avis à ce sujet; Galilée qui craignoit les ennemis des nouveautés, n'osoit qu'à peine s'expliquer, & encore moins faire imprimer ses idées sur les choses qu'il n'avoit pas parfaitement approfondies: cependant, on voit dans sa Lettre à Velser, du 4 Mai 1612 *(page 16)* des raisonnemens solides contre l'idée de Scheiner, qui ne croyoit pas possible que les taches fussent dans le corps même du Soleil, & qui les regardoit alors comme des Planètes tournant autour du Soleil, à une petite distance, ainsi que Mercure & Vénus. Galilée le réfute, quoiqu'en lui donnant beaucoup d'éloges,

& le traitant de génie ſublime *(page 28)*. Il obſerve que ces taches ne ſont pas permanentes, qu'elles ſe condenſent ou ſe diviſent, s'augmentent & ſe diſſipent; il les compare à des fumées ou à des nuages *(page 21)*; il ajoute que quelquefois il y en a beaucoup, & quelquefois point du tout : il penſe qu'elles ſont à la ſurface du Soleil *(page 26)*; qu'elles n'ont pas de hauteur ſenſible *(page 41)*; qu'elles décrivent toutes des cercles parallèles entr'eux *(page 32)*, quoiqu'il y en ait quelquefois une trentaine à la fois *(page 33)*, & que le Soleil en tournant chaque mois, les ramène à notre vue *(page 49)*; qu'il y en a qui durent un ou deux jours, d'autres trente ou quarante & plus *(page 31)*; qu'elles ſe rétréciſſent & ſe rapprochent les unes des autres ſur les bords du Soleil, ſans changer de longueur ou de diſtance du Nord au Sud *(pages 20 & 34)*, & que ce rétréciſſement eſt celui des différentes parties d'un globe, vu de loin *(page 35)*. Galilée y parle des pôles de la rotation du Soleil ; mais il n'avoit pas encore remarqué la différence de 7 degrés qu'il y a entre ces pôles & ceux de l'écliptique *(page 37)*, & il croyoit que l'écliptique même étoit le plus grand cercle de leur converſion.

Dans ſa Lettre du 14 Août 1612, il obſerve que les taches ne s'écartent pas de plus de 30 degrés de l'Équateur ſolaire, ce qui a été confirmé par la ſuite des Obſervations qu'on a faites; il y donne la manière d'obſerver les taches, en recevant ſur un papier l'image du Soleil au travers d'une lunette; il attribue cette idée à un de ſes Élèves, Benedetto Caſtelli *(page 52)*; il ajoute que les plus belles taches ſe voient ſans inſtrument, en faiſant entrer par un petit trou l'image du Soleil dans une chambre obſcurcie, ce qu'il avoit fait ſur-tout le 20 Août 1612. Enfin il explique, par les taches du Soleil, le prétendu paſſage de Mercure ſur le Soleil, dont il eſt parlé dans la vie de Charlemagne.

Dans ſa troiſième Lettre, du 1.er Décembre 1612, Galilée répond aux argumens par leſquels Scheiner ſoutenoit que les taches étoient éloignées de la ſurface du Soleil : il aſſure que

toutes les taches ſont viſibles pendant le même eſpace de temps *(page 116)*, un peu plus de quatorze jours *(pages 116, 129 ou 142)*, quoique *(page 131)* Scheiner prétendît en avoir vu qui employoient quatorze jours, & d'autres ſeize, à traverſer le diſque du Soleil *(page 126)*, & qu'il en voulût conclure qu'elles étoient éloignées du Soleil *(page 128)*. Galilée dit s'en être aſſuré par plus de cent deſſins, faits en grand & avec ſoin *(page 116)*.

Il aſſure *(page 132)* que l'on voit quelquefois dans le Soleil de petits endroits plus clairs que le reſte, & dans leſquels s'obſerve le même mouvement que dans les taches, ce qui étoit bien ſuffiſant pour démontrer le mouvement de rotation du Soleil, & par conſéquent la cauſe du mouvement des taches. Ainſi il ne manquoit dès-lors à la théorie des taches du Soleil qu'une ſuite d'Obſervations détaillées pour bien conſtater la durée de la rotation du Soleil & la ſituation de ſon Équateur: c'eſt ce que fit le P. Scheiner dans ſon grand Ouvrage, intitulé *Roſa Urſina*. Il eſt aſſez indifférent à leur réputation de ſavoir lequel des deux les a le premier aperçues dans ſa lunette; mais Galilée paroît être le premier qui ait raiſonné avec juſteſſe ſur la nature & le mouvement des taches, & le P. Scheiner celui qui les a le plus obſervées & qui a le mieux approfondi toutes les circonſtances de leur mouvement. Je ne parlerai point dans ce Mémoire du Problème qui conſiſte à déterminer la poſition de l'Équateur ſolaire par trois Obſervations d'une tache; je me ſuis aſſez étendu ſur cet article *(Mém. de 1776, p. 465 & ſuiv.)*; j'ajouterai ſeulement qu'il a paru vers le même temps une pièce de M. Hedin, intitulée: *Diſſertatio Aſtronomica de rotatione Solis & Planetarum; Upſaliæ, 1776, in-4.º*: on y trouve une ſolution du Problème de la rotation du Soleil, qu'il a tâché de rendre un peu plus ſimple que celle de M. de S.t Jacques de Sylvabelle, qui ſe trouve dans le quatrième Volume des *Mémoires préſentés à l'Académie*.

M. du Séjour a donné auſſi dans les Mémoires de 1776, *page 278*, une méthode analytique pour trouver l'Équateur

ſolaire, & M. de la Grange en avoit donné une en 1764 dans la Pièce qui remporta le Prix ſur la Nutation de la Lune, & qui a été publiée en 1777 dans le neuvième & dernier Volume des Pièces des Prix.

Je viens aux Obſervations qui peuvent ſervir à conſtater les retours des taches & les élémens de la rotation ſolaire, & je commencerai par reprendre d'anciennes Obſervations par leſquelles j'ai calculé les déclinaiſons ſolaires de diverſes taches, afin que quand on croira les avoir vu reparoître, on puiſſe vérifier la période par les anciennes Obſervations.

Les premières taches qui paroiſſent avoir été obſervées avec l'exactitude des nouvelles méthodes, sont celles de 1672, dont M. le Monnier a rapporté les Obſervations dans ſon *Hiſtoire céleſte, pages 23 & 24*.

ANNÉE 1672.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Novemb. 12	18″ au 2.e bord	7′ 10″ au bord A.	11^s 15^d 9	12^d 48′ A.
13	22 ½	8. 0.	11. 26. 41	11. 18
14	31 ½	24. 10. au bord B.	0. 9. 37	13. 0
20	28 au 1.er bord	18. 0.	3. 3. 59	15. 33
22	9	15. 0.	4. 1. 48	11. 3

La ſeconde colonne contient les différences de paſſages entre la tache & l'un des bords du Soleil : dans les trois premières Obſervations, on compare la tache avec le ſecond bord ou le bord oriental ; dans les autres, avec le bord ſuivant.

Dans la troiſième colonne, on trouve la différence de hauteur méridienne ou de déclinaiſon entre la tache & le bord auſtral ou le bord boréal du Soleil.

Dans la quatrième, ſont les longitudes vues du Soleil, meſurées ſur l'écliptique, & que j'ai déduites des Obſervations.

Dans la dernière colonne, ſont les déclinaiſons de la tache par rapport à l'Équateur ſolaire, que j'ai calculées, en

ſuppoſant le nœud à 2ſ 18d & l'inclinaiſon de 7d 20′: ces déclinaiſons devroient être toutes égales ; mais on n'avoit alors ni micromètres ni verniers ſur les quarts-de-cercle : ces hauteurs méridiennes n'étoient probablement pas d'une aſſez grande exactitude ; il ne faut pas 15 ſecondes d'erreur pour produire 1 degré ſur la déclinaiſon ſolaire ; d'ailleurs une tache qui eſt un peu irrégulière & qui change de forme, ne peut pas ſe déterminer avec une ſi grande préciſion : cependant on voit que cette tache avoit environ 12 degrés $\frac{3}{4}$ de déclinaiſon auſtrale.

Les obſervations ſuivantes ſeront diſpoſées dans le même ordre.

La tache du mois de Juin 1676 avoit à peu-près la même déclinaiſon que la précédente : les obſervations ſe trouvent à la *page 206* de l'*Hiſtoire céleſte.*

ANNÉE 1676.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Juin..... 26	34″ ½ au 2.e bord	19′ 25″ au bord ſup.	8ſ 4d 21′	13d 46′ A.
27	50 ½	19. 45.	8. 20. 1	13. 27
28	67	20. 0.	9. 5. 14	13. 11
Juillet... 1	15 au 1.er bord	20. 2.	11. 3. 46	12. 11

Le milieu entre ces déclinaiſons eſt 13d 9′.

Ces deux taches ayant paru à peu-près ſur le même parallèle, j'ai voulu voir ſi ce ſeroit la même tache qui auroit reparu après cinquante-deux rotations du Soleil ; mais il faudroit ſuppoſer quelques heures de plus pour la durée de chacune : ainſi elles ne s'accordent pas avec mes réſultats antérieurs.

Dans la même année, on trouve d'autres obſervations, *Hiſtoire céleſte, page 218 & ſuivantes*, que j'ai calculées de la manière ſuivante ; mais les calculs de la dernière colonne ſuppoſent le nœud à 2ſ 16d.

ANNÉE

ANNÉE 1676.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de HAUTEURS.	LONGIT.	DÉCLIN. solaire.
Octob.. 30	34″ au 1.er bord	15′ 20″ au bord sup.	2f 6d 46′	5d 10′ A.
Nov.... 1	15	12. 55	3. 3. 11	5. 10
19	11 $\frac{1}{4}$	22. 50	11. 20. 59	4. 54
21	27 $\frac{1}{4}$ au 2.e bord	21. 20	0. 14. 1	5. 31
22	40	20. 20	1. 2. 57	4. 12
23	53 $\frac{1}{4}$	19. 20	1. 13. 52	5. 44
24	68 $\frac{1}{2}$	17. 40	2. 1. 21	2. 54
25	56 au 1.er bord	16. 55	2. 14. 48	4. 33
27	29	14. 40	3. 12. 7	3. 36
28	18	14. 10	3. 26. 5	4. 27
29	9 $\frac{1}{4}$	13. 46	4. 10. 1	5. 11
30	3	13. 20	4. 26. 6	5. 4
Déc..... 16	6 $\frac{1}{2}$ au 2.e bord	19. 50	0. 16. 48	4. 25
18	22 $\frac{1}{2}$	19. 0	1. 18. 19	5. 27

Il paroît que c'étoit la même tache obſervée pendant deux périodes: les deux obſervations extrêmes éloignées d'environ deux rotations ſolaires, donnent pour chacune 25j 4h; il s'en faut ſix heures que cela ne s'accorde avec mon réſultat; mais ſix heures ne font que 3 degrés $\frac{1}{2}$; ce n'eſt pas une minute ſur le Soleil.

A la *page 314*, on trouve les obſervations de la tache du mois de Mai 1684, que M. Caſſini regardoit comme étant la même que les taches de 1625, 1644, 1688 & 1702 (*Mémoires de l'Académie, 1702, page 133*); mais il n'y a que deux obſervations complètes.

ANNÉE 1684.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉR. de HAUTEURS.	DISTANCE au bord le plus proche.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Mai..... 6	9″ au 2.e bord	12′ 40″ b. B.	1′ 26″ au b. le pl. pr.	5f 11d 25′	10d 23′ A.
7	16 $\frac{1}{2}$	13. 40	3. 37	5. 27. 22	11. 43

J'en conclus que cette tache dut passer par le milieu de son parallèle, le 10 à $21^h 22'$. En la comparant avec celle qui y passa le 5 Mai 1688, à 18 heures, ou à cinquante-trois retours de $27^j 11^h 16'$; c'est une heure de moins que suivant M. Cassini : ainsi les taches même qui lui ont servi à établir sa durée de la rotation, n'y satisfont pas d'une manière convaincante.

Quand aux taches du mois de Mai 1686, je desirois beaucoup de pouvoir les discuter, puisqu'il y en a une dont M. Cassini s'étoit servi pour déterminer la durée de la rotation solaire : M. Cassini le fils, qui s'occupe avec beaucoup de zèle de tout ce qui intéresse l'Astronomie, a pris la peine de chercher ces observations dans les Registres originaux; il m'a communiqué même celles du P. Bonfa, faites à Avignon; je les ai calculées, & je n'ai rien pu trouver de concluant : il faut qu'il y ait eu beaucoup de taches dans ce temps-là, & je n'ai pu distinguer celle dont M. Cassini s'étoit servi; j'ai lieu de croire que ce n'étoit pas une des plus grosses, & dès-lors elle ne peut guère servir à appuyer des conclusions générales pour la durée de la rotation.

Dans les anciens *Mémoires de l'Académie, tome X, page 708,* on trouve cinq observations de M. de la Hire, faites vers ce temps-là, & toujours à midi.

ANNÉE 1686.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. heliocentrique	LONGIT. solaire.
Avril.... 23	$0^d\ 8'\ 30''$ *or.*	$1'\ 3''$ au Nord.	$6^s\ 1^d\ 47'$	$13^d\ 58'$ A.
28	0. 7. 12 *occ.*	7. 0 au Midi.	8. 14. 40	15. 59
29	0. 9. 13	7. 58	8. 27. 11	15. 34
30	0. 11. 0	9. 0	9. 12. 2	15. 33
Mai..... 1	0. 12. 18	9. 50	10. 2. 27	14. 20

Cette tache ayant la même déclinaison que celle de 1713, observée par M. de l'Isle, j'ai voulu les comparer, & j'ai

trouvé trois cents quatre-vingt-neuf rotations de $25^j\,10^h\,5'$; il faudroit ſuppoſer une heure & demie de plus pour trouver une révolution de moins dans cet intervalle : la période de M. Caſſini ne ſatisfait point du tout à cet intervalle ; elle donne trois cents quatre-vingt-ſix rotations & trente-ſept centièmes ; ainſi il y a un tiers de révolution de trop, ce qui augmenteroit d'une demi-heure chaque période.

Cette tache n'eſt pas celle qui ſervit à M. Caſſini pour déterminer la période des retours $27^j\,12^h\,20'$, puiſqu'elle devroit avoir 10 degrés $\frac{1}{2}$ de déclinaiſon, & paſſer par le milieu du Soleil, le 23 Avril au matin; mais il paroît qu'elle étoit bien peu conſidérable. S'il y a donc quelque choſe de probable à cet égard, c'eſt la détermination que j'ai donnée dans mon premier Mémoire, fondée ſur pluſieurs apparitions d'une très-groſſe tache au même point du globe ſolaire, & que l'on verra confirmée encore ci-après par les obſervations du mois de Juin 1778, & par d'autres taches de 1777 & 1779.

Dans l'Hiſtoire de l'Académie de 1707, *page 11*, il eſt parlé de deux taches obſervées en 1705 & 1707, qui avoient 12 à 13 degrés de déclinaiſon boréale : les obſervations n'y ſont pas rapportées, mais on y voit que la première avoit paſſé par le milieu du Soleil, le 11 Avril 1705 à 20 heures, & la ſeconde le 30 Novembre 1707 à 7 heures : l'intervalle eſt de $962^j\,46^h$, qui, diviſé par 35, donne pour chaque révolution ſynodique $27^j\,11^h\,58'$; c'eſt 23 minutes de moins que ſuivant M. Caſſini ; il faudroit donc qu'il y eût 13 heures d'erreur dans un des paſſages par le milieu du Soleil, ce qui ne peut pas ſe préſumer : ainſi cet intervalle ne ſatisfait pas à la période de $27^j\,12^h\,21'$, mais la mienne y répond encore moins.

Le 8 Janvier 1750, il y avoit ſur le Soleil cinq taches, dont M. Garipuy, Correſpondant de l'Académie, à Toulouſe, détermina la poſition, à cauſe de l'éclipſe du Soleil de ce jour-là *(Mémoires préſentés, tome II, page 336)*; la ſeconde étoit la plus groſſe, & la quatrième la plus petite. Voici les obſervations avec le calcul que j'en ai fait ; les diſtances ont

été meſurées parallèlement à l'Équateur, & dans le ſens perpendiculaire à l'Équateur.

ANNÉE 1750.	DISTANCES au bord OCCIDENTAL.	DISTANCES au bord AUSTRAL.	LONGITUDE.	DÉCLINAIS. ſolaire.	
Janvier. 8	6′ 46″	11′ 2″	4ˢ 28ᵈ 9′	20ᵈ 51′ A.	
8	8. 52.	14. 5.	4. 26. 21.	11. 1	belle tache.
8	12. 50.	13. 19.	4. 2. 0.	13. 51	
8	13. 11.	14. 5.	4. 0. 13.	11. 9	
8	28. 35.	18. 45.	1. 28. 3.	5. 13 B.	

La ſeconde tache paroît avoir la même déclinaiſon que celle qui fut obſervée aux mois de Juin & Juillet 1684, & dont j'ai rapporté les calculs dans mon premier Mémoire; mais l'intervalle de temps eſt trop grand pour qu'on en puiſſe tirer des concluſions, faute d'obſervations intermédiaires; d'ailleurs, des taches qui n'ont été obſervées qu'une fois, ne ſont pas les plus propres à inſpirer de la confiance dans les réſultats.

En 1752, étant à Berlin à l'occaſion de la parallaxe de la Lune, avec le quart-de-cercle mural de M. le Monnier, qui a cinq pieds de rayon, je ne négligeois aucune des obſervations qui ſe préſentoient à faire : j'eus occaſion de voir pluſieurs taches, ſur-tout celle du mois de Juillet que j'ai employée avec ſuccès à déterminer la rotation du Soleil. Voici le détail des obſervations que je n'avois pas rapportées dans mon premier Mémoire, en y joignant les obſervations de deux autres taches. La lunette du quart-de-cercle porte un vernier qui donne 15 ſecondes, mais avec lequel on diſtingue facilement trois ſecondes, comme on peut en juger par l'accord des hauteurs méridiennes que j'ai rapportées dans nos *Mémoires de 1751;* ce n'eſt pas qu'il n'y ait des erreurs plus grandes dans les diviſions, mais elles ne ſont pas dans l'eſpace de quelques minutes; ainſi les différences des hauteurs méridiennes ou des déclinaiſons entre les taches & les bords du Soleil, ſont exactes à 3 ou 4 ſecondes près.

ANNÉE 1752.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Mars... 9	24″ ¼ au 1.er bord.	14′ 10″ au bord sup.	6s 23d 10′	14d 39′ B.
11	8 ¼	17. 0.	7. 19. 53	13. 23
Juin... 27	13 au 2.e bord.	23. 49 au bord sup.	6. 22. 45	14. 33 A.
Juillet... 1	66	20. 16.	9. 6. 24	13. 59
2	82 ¼	20. 29.	9. 21. 57	14. 12.
10	6 au 2.e bord.	13. 49.	7. 12. 11	9. 54 B.
12	7	13. 30.	7. 16. 4	12. 14
13	14	14. 0.	7. 29. 14	11. 6
17	68	13. 59.	9. 26. 36	10. 52
19	91	12. 58.	10. 19. 17	12. 32
20	108 ¼	12. 35.	11. 7. 40	11. 34
MILIEU entre les six observations de la dernière tache..				11. 22

En 1767, M. Darquier, Correspondant de l'Académie, à Toulouse, observa le 30 Janvier une belle tache, comme on le voit à la *page 128* de ses Observations imprimées; sa longitude se trouve de $3^s\ 19^d\ 14'$, & sa déclinaison solaire de $20^d\ 7'$ australe.

La même année j'ai observé quelques taches; il y en a une dont j'ai rapporté les observations dans mon premier Mémoire. Voici le détail d'une autre.

ANNÉE 1767.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Avril... 17	41″ au 1.er bord	11′ 18″ au bord sup.	7s 12d 35′	20d 4′ B.
18	29	12. 10.	7. 22. 29	19. 47

Celle du mois de Juin de la même année, observée avec soin par le P. Fixlmillner, se trouve dans son excellent Ouvrage intitulé *Decennium Astronomicum*; Styræ, 1776,

in-4.°, page 23; sa déclinaison solaire étoit de $25^d 40'$ boréale. Le 7 Juin à $2^h 42'$, au Méridien de Paris, la longitude héliocentrique de cette tache étoit de $8^s 16^d 52'$, & sa latitude boréale $26^d 20'$.

En 1768, M. Messier a observé trois taches pendant plusieurs jours; j'en ai calculé vingt-une observations; j'avois d'abord intention de les employer à la recherche de l'inclinaison & du nœud, mais elles n'étoient pas assez d'accord entr'elles pour cet objet; je vais les rapporter pour servir au moins à les comparer avec d'autres taches à pareilles déclinaisons.

La seconde, qui a 25 degrés de déclinaison australe, m'a déjà servi à confirmer ma détermination de la durée de la rotation solaire, comme je l'ai dit dans mon premier Mémoire, en la comparant avec celle du mois de Juin 1777, dont on trouvera les observations ci-après *(page 410)*.

Le 4 Mars 1768, quelques minutes après midi, cette tache avoit $6^s 27^d 46'$ de longitude héliocentrique, suivant l'observation de M. Messier, faite avec un ancien télescope Newtonien, dont M. de l'Isle s'étoit servi long-temps pour ces sortes d'observations. Le 5 Juin 1777, la tache observée aussi par M. Messier, passa au fil horaire de sa lunette achromatique, $1' 55''\frac{1}{2}$ après le bord du Soleil, à $19' 58''\frac{1}{2}$ du bord supérieur ou du bord boréal du Soleil, ce qui me donne pour sa longitude héliocentrique $7^s 0^d 6'$.

Ces deux longitudes n'étant différentes que de $2^d 20'$ seulement, la réduction à l'équateur solaire étoit inutile à considérer, & j'ai comparé les longitudes seulement; la différence de $2^d 20'$ répond à 4 heures, suivant la Table du mouvement des taches que j'ai donnée dans les *Mémoires de 1776, page 503;* il faut donc ôter 4 heures de l'intervalle, entre le 4 Mars 1768 & le 5 Juin 1777, qui est de 3380 jours, & l'on aura 3379,83 intervalle de temps qui répond à cent trente-trois révolutions, dont chacune seroit de $25^j 9^h 54'$; tel est le fondement du résultat que j'avois annoncé avant que de rapporter les observations qui me l'avoient fourni *(Mémoires de l'Académie, 1776, page 500)*.

ANNÉE 1768.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique	DÉCLIN. solaire.
Mars.. 1	56″ au 1.er bord	21′ 0″ au bord sup.	5s 27d 41′	19d 36′ A.
2	43 ¼	22. 39	6. 11. 3	20. 54
3	33	24. 13	6. 25. 43	21. 37
4	24 ½	25. 37	7. 11. 18	21. 55
5	20	26. 42	7. 26. 43	22. 6
6	19	27. 16	8. 6. 49	22. 22
1	66 au 1.er bord	21. 27 au bord sup.	5. 18. 16	25. 25 A.
2	54	22. 47	6. 3. 3	25. 30
3	41	24. 18	6. 17. 58	25. 18
4	35 ½	25. 25	6. 27. 46	26. 23
5	29	26. 34	7. 10. 50	26. 45
6	25	27. 29	7. 23. 30	25. 19
7	23 ½	28. 12	8. 5. 38	27. 26
1	68	8. 53	4. 28. 5	16. 33 B.
2	54	10. 20	5. 13. 41	16. 5
3	43 ¼	11. 43	5. 26. 13	15. 10
4	29	13. 6 ½	6. 12. 52	16. 5
5	18 ½	14. 26	6. 27. 18	16. 14
6	10	15. 45	7. 11. 50	16. 7
7	4	17. 7	7. 26. 31	15. 14
8	1	17. 55 ½	8. 10. 30	15. 24

Le jour de l'éclipſe de Soleil qu'il y eut en 1769, M. Meſſier obſerva les immerſions de pluſieurs taches ; & pour rendre ces obſervations plus utiles, il détermina les poſitions des taches, en obſervant deux jours de ſuite, leurs différences d'aſcenſion droite & de déclinaiſon, par le moyen d'un micromètre *. Voici les obſervations & le calcul que j'en ai fait en commençant par les taches les plus boréales.

* C'eſt par erreur qu'on lit dans ce volume, paſſages au fil vertical, & différences de hauteurs.

ANNÉE 1769.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Juin... 3, à 10h ½ mat.	9″ du 1.er bord	13′ 1″ au bord B.	10s 14d 2′	22d 32′ B.
4	3	13. 17	10. 29. 4	22. 41
3	26 du 2.d bord	9. 10	6. 27. 50	14. 5
4	36	10. 11	7. 11. 30	12. 48
3	9	8. 25	5. 23. 20	13. 26
4	13	8. 51	6. 8. 27	13. 0
3	60 du 1.er bord	12. 30	8. 18. 25	12. 48
4	44	13. 21	9. 3. 59	13. 16
3	39 du 2.d bord	10. 23	7. 13. 41	12. 24
4	53	11. 22	7. 28. 32	12. 2
3	47	11. 19	7. 22. 8	10. 44
4	62	12. 48	8. 6. 57	10. 33
3	11	13. 5	6. 14. 11	2. 52
4	16	13. 28	6. 22. 47	2. 51
3	11 du 1.er bord	22. 8	6. 5. 39	23. 57 A.
3	23 du 2.d bord	20. 28	7. 0. 53	25. 55

M. Darquier observa une belle tache le 6 Juin 1773 ; sa déclinaison étoit égale à celle du Soleil, & elle étoit 8′ 41″ à gauche du centre : j'en ai conclu sa longitude 7s 15d 35′, & sa déclinaison solaire 6d 58′ australe.

La tache que j'observai depuis le 13 jusqu'au 23 Juin 1775, & qui m'a servi à déterminer les pôles de la rotation *(Mémoires de l'Académie, année 1776, page 464)* reparut le 10 Juillet, mais extrêmement foible. Voici les observations qu'en fit M. Messier, & le calcul que j'en ai fait, en supposant 8s 17d pour le nœud, & 7d 29′ pour l'inclinaison.

ANNÉE

ANNÉE 1769.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Juillet.. 10	15″½ au bord *or.*	18′ 14″½ au bord B.	$7^s\ 26^d\ 12'$	$5^d\ 30'$
11	23	18. 41	8. 5. 43	5. 10
12	36½	18. 50	8. 19. 59	6. 36

Au mois de Juillet 1775, j'obſervai avec ſoin une autre tache, dans l'intention d'en conclure le lieu du nœud, mais je ne pus avoir aſſez d'obſervations exactes pour remplir cet objet; voici ſeulement les quatre obſervations que je fis, & que je ne pus accorder par aucune hypothèſe vraiſemblable ſur l'inclinaiſon & le nœud. Les déclinaiſons ſolaires ſuppoſent $8^s\ 25^d\ 18'$ pour le nœud, & $7^d\ 30'$ pour l'inclinaiſon.

ANNÉE 1775.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Juillet.. 19	10″ au bord *or.*	14′ 54″ au bord B.	$7^s\ 28^d\ 46'$	$9^d\ 5'$ B.
20	18	14. 54	8. 11. 10	8. 53
21	30	14. 51	8. 25. 47	9. 44
22	41½	14. 41	9. 7. 56	10. 17
MILIEU				9. 30

En 1776, M. Fixlmillner obſerva une tache à Cremſmunſter, au mois de Juillet, & il la revit encore au mois d'Août en forme de tache double; elle avoit 28 degrés ½ de déclinaiſon ſolaire auſtrale : il trouve pour ſa révolution $25^j\ 13^h\ 56'$, ce qui approche beaucoup de celle que M. Caſſini avoit trouvée.

Deux autres taches obſervées au mois d'Août & au mois de Septembre, à 19 degrés de déclinaiſon auſtrale, lui donnent $25^j\ 13^h\ 11'$.

Dans la dernière obſervation, je trouve que chaque ſeconde dans la différence de déclinaiſon obſervée change de 11 minutes

la déclinaiſon ſolaire, ce qui fait voir combien il faudroit de préciſion dans ces obſervations pour pouvoir en déduire le lieu du nœud & l'inclinaiſon.

En 1777, M. Meſſier obſerva depuis le 2 juſqu'au 14 Juin, une tache qui a ſervi à M. Charles, habile Profeſſeur de Mathématiques, pour calculer la poſition de l'axe du Soleil, par une méthode qui lui eſt particulière, & qui a eu l'approbation de l'Académie, mais qu'il n'a pas encore publiée. Je vais rapporter les douze obſervations, & j'y ajouterai celles de quatre autres taches obſervées vers le même temps.

ANNÉE 1777.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Juin...... 2	2″ au 2.ᵉ bord	18′ 26″ au bord B.	5ˢ 22ᵈ 48′	24ᵈ 5′ A.
3	6 ½	18. 47	6. 5. 57	24. 24
5	23	19. 58 ½	7. 2. 19	25. 2
6	32	20. 31	7. 13. 21	24. 41
7	47 ½	21. 35	7. 29. 29	25. 17
8	62	22. 14 ½	8. 13. 51	24. 54
9	62 au 1.ᵉʳ bord	22. 50	8. 27. 42	24. 30
10	49	23. 33	9. 11. 54	24. 44
11	36 ½	23. 58	9. 26. 17	24. 19
12	26	24. 11	10. 10. 29	23. 32
13	18	24. 27	10. 25. 23	23. 41
14	13	24. 20	11. 9. 34	22. 58
1	3 au 1.ᵉʳ bord	14. 11	10. 25. 1	20. 29 B.
5	8	12. 19	10. 19. 3	24. 50
13	5 ½ au 2.ᵉ bord	20. 3	6. 10. 9	25. 28 A.
19	11 ½	20. 13	6. 28. 15	22. 29

La première tache obſervée douze fois, a une déclinaiſon ſolaire qui diffère peu de celle de la ſeconde tache du mois de Mars 1768, dont on a vu les obſervations ci-deſſus : il paroît que c'eſt la même qui a reparu après cent trente-trois révolutions, chacune de $25^j 9^h 54'$, ce qui s'accorde avec mon réſultat de $25^j 10^h$ *(Mém. de l'Acad. 1776, p. 496).*

M. Fixlmillner obſerva depuis le 19 juſqu'au 28 Juin, à Cremſmunſter, une tache à 21 degrés de déclinaiſon ſolaire auſtrale. Le 24 Juin à $4^h\ 2'$, elle avoit $9^s\ 9^d\ \frac{1}{3}$ de longitude: il l'obſerva encore à ſon retour au mois de Juillet; & le 18 à $3^h\ 39'$, elle avoit $8^s\ 16^d$ de longitude. Enfin, dans une troiſième apparition, le 15 Août à $4^h\ 21'$, elle étoit à $9^s\ 19^d\ \frac{1}{2}$. La comparaiſon de pluſieurs obſervations à chaque période, lui donne $25^j\ 15^h\ 29'$ pour la durée de la rotation ſolaire, ce qui ſurpaſſe de 5 heures $\frac{1}{2}$ celle que j'ai trouvée.

Au mois de Juillet 1777, il obſerva quatre autres taches; les premières étoient à 22 & à 24 degrés de déclinaiſon auſtrale: il les revit au mois de Juillet ſuivant, mais cette ſeconde apparition lui donne pour la durée de la rotation $25^j\ 21^h\ 7'$ par la première tache, & $25^j\ 6^h\ 43'$ par la ſeconde.

Une troiſième tache obſervée au mois de Juillet & au mois d'Août, à 23 degrés de déclinaiſon boréale, donne $25^j\ 5^h\ 53'$.

Enfin la quatrième, à 19 degrés de déclinaiſon auſtrale, lui donne $25^j\ 19^h\ 34'$.

Ces différences font voir que les intervalles ſont trop courts, ou que les taches avoient trop changé de forme, pour pouvoir être obſervées. Au reſte, M. Fixlmillner publiera lui-même le détail de ſes Obſervations, & des conſéquences qu'il en a tirées.

Au mois de Juillet 1777, M. Meſſier obſerva une autre tache plus boréale qu'aucune de celles qui précèdent: en voici trois obſervations que j'ai calculées.

ANNÉE 1777.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Juillet.. 28	$6''\frac{3}{4}$ au 1.er bord	$10'\ 22''$ au bord B.	$7^s\ 24^d\ 7'$	$30^d\ 29'$ B.
31	$27\frac{1}{2}$	10. 19	9. 5. 26	31. 9
Août.. 3	$60\frac{1}{2}$	9. 9	10. 13. 54	31. 19

Au reste, M. Messier a observé beaucoup d'autres taches depuis quelque temps, & il en publiera lui-même les détails.

Je rapportai dans mon premier Mémoire, *page 407*, des observations qui me servirent à déterminer la durée de la rotation solaire; elles avoient été faites depuis le 5 jusqu'au 12 Mai 1778, & je les comparai avec des observations antérieures de la même tache, mais je ne parlai point de son retour à la fin de Mai; elle avoit reparu cependant plus petite à la vérité que dans son apparition précédente : je l'observai le 30 Mai, comme on l'annonça dans le Journal de Paris du 1.er Juin; je la vis encore les jours suivans, & voici les observations, quoiqu'elles ne soient pas des plus exactes, parce que je n'ai pu les faire qu'avec un petit instrument.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
Mai 30, midi	25″ du 2.d bord	8′ 41″ du bord B.	$6^s\ 21^d\ 15'$	$14^d\ 10'$ B.
31	36	9. 40	7. 6. 32	13. 17
Juin... 1	21 $\frac{1}{3}$	10. 36	7. 19. 18	12. 47
2	61	11. 55	8. 3. 45	11. 21
5	54 $\frac{1}{2}$ du 1.er bord	14. 33	9. 13. 57	10. 50
6	22	15. 12	9. 28. 11	10. 53

L'observation du 1.er Juin m'a paru la plus exacte; elle donne pour l'ascension droite solaire $7^s\ 17^d\ 39'$: cette observation, comparée avec celle du 5 Mai, où l'ascension droite solaire étoit de $6^s\ 25^d\ 48'$, donne pour la durée de la rotation $25^j\ 10^h\ 54'$; l'observation du 31 Mai, comparée avec celle du 8, donne 14 heures $\frac{1}{2}$; celle du 11 Mai avec celle du 1.er Juin donne 1 heure $\frac{1}{2}$ seulement; le milieu est $25^j\ 9^h$; ce qui s'accorde avec ma période, autant que le comporte un intervalle si court. Mais la même tache reparut au mois de Novembre 1778, comme je l'ai dit dans mon premier

Mémoire, & dans le Journal de Paris du 24 Novembre, & elle a confirmé la durée de la rotation, que j'avois fixée à $25^j\ 10^h$.

Le 1.er Août 1778 il y avoit plusieurs taches sur le Soleil, la plus grosse & la plus terminée précédoit de 42 secondes le deuxième bord du Soleil, & étoit à 11′ 37″ du bord boréal; ainsi elle avoit $9^f\ 21^d\ 28'$ de longitude, & $24^d\ 33'$ de déclinaison boréale, à midi.

Le 5 Août à 9 heures du matin, elle précédoit de 42 secondes $\frac{3}{4}$ le premier bord, & étoit à 8′ 57″ du bord boréal; longitude $11^f\ 13^d\ 50'$; déclinaison $25^d\ 14'$ boréale.

Il y avoit dans le même temps une assez belle tache du côté du Midi, dont voici trois observations.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
AOÛT.				
5 à 9^h mat.	1′ 29″ au 1.er bord	6′ 18″ au bord A.	$9^f\ 8^d\ 3'$	$25^d\ 50'$ A.
6... $9\frac{1}{2}$	0. 54 au 2.e bord	25. 30 au bord B.	9. 19. 20	28. 23
7... midi	1. 7	6. 53 au bord A.	10. 4. 56	27. 34
MILIEU				27. 16

Le 19 Août, parmi plusieurs taches qu'il y avoit sur le Soleil, on en remarquoit au Midi une belle à deux noyaux, environnée d'une grande nébulosité; ces taches à deux noyaux paroissent assez souvent : j'étois curieux de savoir si elles avoient une place fixe; mais il n'y en a pas encore eu à une si grande déclinaison que la suivante. Je fis ces observations avec une lunette de neuf pieds, garnie d'un excellent micromètre.

A la fin d'Août, il y avoit huit ou dix taches sur le Soleil, mais elles n'étoient pas assez remarquables pour qu'on put espérer de les voir revenir, & je ne continuai pas pour lors ces observations.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
AOÛT				
19 à 7h ½ mat.	49″ au 2.e bord	24′ 50″ au bord B.	9s 28d 50′	21d 8′ A.
21.. 8 ½	54 ½ au 1.er bord	22. 49	10. 28. 6	20. 58
22.. midi	40	10. 23 au bord A.	11. 14. 49	20. 52

Vers le même temps, M. Méchain, Aſtronome du Dépôt de la Marine, ayant chez lui une bonne lunette achromatique de M. de Létang, qui porte un micromètre, avec d'autres inſtrumens, que lui avoit confiés M. le Duc d'Ayen, s'en eſt ſervi pour obſerver pluſieurs taches du Soleil, que j'ai calculées : chaque différence d'aſcenſion droite eſt le milieu entre pluſieurs obſervations du même jour.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.
AOÛT				
17 à 9h mat.	53″ ¼ apr. le cent.	16′ 21″ ½ du bord B.	9s 0d 0′	15d 31′ B.
18... 8. 51′	43,2	15. 56 ½	9. 15. 25	15. 50
20... 8. 5	18 ½	14. 36	10. 13. 9	15. 53
21... 7. 47	5 ½	13. 37	10. 26. 27	16. 7
22... 8. 5	8 avant	12. 32	11. 10. 13	16. 3
23... 8. 23	19,8	11. 11	11. 23. 29	16. 57
24... 8. 22	31 ¼	10. 3	0. 7. 21	16. 45
25... 8. 42	40 ¼	8. 37	0. 21. 42	17. 46
MILIEU..				16. 37

Cette tache a ſouffert des altérations conſidérables pendant la durée de ſon apparition, & ſembloit s'être rapprochée d'une autre tache voiſine, dont voici les obſervations, ainſi que de deux autres obſervées de même par M. Méchain, pendant quatre jours chacune, & de trois autres obſervées par moi.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN solaire.
AOÛT				
19 à 7h 50′	40″ 1/4 apr. le cent.	18′ 19″ du bord B.	9s 16d 14′	7d 15′ B.
20... 8. 5	26 1/4	17. 36	10. 2. 7	7. 15
21... 7. 47	12 1/4	16. 45	10. 16. 27	7. 6
22... 8. 5	1 1/4 av. le cent.	15. 35	11. 1. 0	7. 24
23... 8. 23	16	14. 18	11. 15. 36	7. 35
24... 8. 22	29 1/4	12. 55	11. 28. 4	7. 55
25... 8. 42	40 1/4	11. 30	0. 15. 2	8. 29
27... 6. 40	35 1/2 ap. le cent.	17. 57	9. 29. 50	9. 21
28... 8. 24	23 1/2	17. 17	10. 13. 18	8. 53
29... 8. 10	9 1/2	15. 52 1/2	10. 27. 32	8. 37
31... 8. 29	17 1/2 av. le cent.	13. 24	11. 24. 29	8. 5
27... 8. 40	46 1/2 ap. le cent.	14. 30	9. 20. 38	24. 0
28... 8. 24	37 1/2	13. 52	10. 3. 32	24. 25
29... 8. 10	26	13. 3	10. 16. 55	24. 34
31... 8. 29	2 1/2	10. 39	11. 13. 11	26. 0
29... midi	39 du 2.e bord	4. 21 du bord A.	9. 17. 43	20. 27 A.
SEPTEMBRE				
1... 9 1/2 m.	74	25. 17 du bord B.	11. 3. 8	30. 4
3... 9 1/2 m.	33 1/2 du 1.er bord	22. 50	0. 0. 56	28. 38
3... 9 1/2 m.	57 du 2.e bord	24. 28 1/2	10. 20. 47	22. 25

Cette dernière étoit une tache longue & remarquable, qui étoit entrée à la fin d'Août. Celle que j'ai obſervée le 1.er & le 3 étoit ronde, bien terminée, avec une large nébuloſité.

La première des trois taches ſuivantes eſt une très-belle tache obſervée par M. Méchain & par moi : les obſervations du 19 Septembre ſont doubles dans les trois taches ſuivantes, parce que ce jour-là je les obſervai, ainſi que M. Méchain. Dans les obſervations du 20 & du 23, M. Méchain a oublié de marquer l'heure, mais on peut ſuppoſer que c'eſt vers les 9 heures du matin.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISONS.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
SEPTEMBRE					
18 à 7h 46′	20″ ½ ap. le cent.	5′ 26″ du bord A.	10s 16d 7′	22d 16′ A.	
19.. 8. 52	11 ½	6. 28	10. 29. 27	19. 33	
19.. 10. 10	53 ¾ au 2.e bord	25. 34 du bord B.	11. 0. 19	22. 15	21d 24′
20	0 ½ av. le cent.	7. 33 du bord A.	11. 13. 59	21. 49	
23	36	19. 57 du bord B.	0. 28. 15	21. 10	
19.. 8. 52	37 ½ ap. le cent.	6. 34 du bord A.	10. 2. 11	12. 42	
19.. 10. 10	27 au 2.e bord	25. 34 du bord B.	10. 2. 11	13. 37	13. 14
20	28 ½ ap. le cent.	7. 2 du bord A.	10. 15. 16	13. 24	
19.. 8. 52	8 avant le cent.	14. 38 du bord B.	0. 4. 58	8. 32 B.	
19.. 10. 10	72 ½ du 2.e bord	17. 43 du bord A.	0. 6. 12	10. 12	9. 9
20	19 avant le cent.	13. 5 du bord B.	0. 17. 36	9. 5	
23	48 ¼	8. 40	2. 2. 5	8. 48	

La ſuivante eſt une très-belle tache que j'ai obſervée ſix fois avec mon micromètre adapté à une lunette de neuf pieds; elle a bien la même déclinaiſon que celle du 1.er Août, mais elle retarde de deux jours; ainſi ce ne peut être la même. Elle eſt ſuivie de trois autres taches: il y a d'abord quatre obſervations ſur deux taches aſſez remarquables, enſuite une ſeule obſervation ſur une tache extrêmement méridionale, mais mal terminée, & qui faiſoit l'extrémité d'un long amas dans cette partie méridionale, où elles étoient en général mal terminées; il eſt rare de voir des taches à une ſi grande diſtance de l'équateur du Soleil, comme l'avoit déjà remarqué Galilée (Voyez ci-deſſus, *page 397*). Je n'en vois pas la raiſon; mais cela même eſt un motif ſuffiſant pour obſerver ſpécialement les taches qui ont une grande déclinaiſon ſolaire, afin de parvenir à connoître s'il y a réellement une règle à cet égard. On verra ci-après une tache à 40 degrés de déclinaiſon, *page 423*.

ANNÉE

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
SEPTEMBRE					
30 à 10h 15′m.	5″ du 2.e bord	15′ 7″ du bord A.	10f 4d 16′	23d 56′ B.	23d 6′.
OCTOBRE					
1.. 11. 0	11 ½	15. 25	10. 14. 51	22. 55	
2.. 10. 0	19	16. 14	10. 27. 4	23. 39	
4.. 11. 0	41 ½	18. 21	11. 25. 1	23. 3	
5.. 10. 30	52 ½	19. 45	0. 10. 44	21. 59	
8.. 9. 45	86 ¼	24. 7	1. 17. 25	23. 3	
12.. 9. 30	9 ½ du 1.er bord	18. 38	2. 18. 48	10. 13 A.	
13.. 9. 30	5	19. 27	3. 1. 5	10. 30	
12.. 9. 30	25 ¼ du 2.e bord	12. 21	11. 8. 21	8. 13 B.	
13.. 9. 30	38	13. 41	11. 23. 55	8. 21	
27.. midi	46 ½	3. 34	11. 19. 32	31. 24 A.	

Je n'avois pas encore vu de tache aussi éloignée de l'Équateur solaire, que la dernière du 27 Octobre, & je ne l'ai placée ici que par cette raison; mais au mois de Juillet 1780, il en a paru une à 40 degrés de déclinaison solaire boréale.

Au mois de Novembre, M. Méchain a observé deux belles taches; l'une étoit la même que celle du mois de Mai & du mois de Juin, dont j'ai parlé ci-dessus; les observations du mois de Novembre sont dans mon premier Mémoire; l'autre étoit un peu moindre : voici les observations de celle-ci.

ANNÉE. 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. solaire.	MILIEU.
NOVEMBRE					
7 à 0h 37′ s.	35″ ½ ap. le cent.	7′ 47″ ½ du bord A.	0f 1d 28′	13d 31′ A.	13d 30′
8, 10. 5 m.	25 ¼	8. 50	0. 15. 1	12. 33	
11. 9. 28	13 ¾ av. le cent.	12. 35	1. 27. 5	12. 48	
13. 9. 33	40 ½	17. 45	2. 25. 20	15. 6	

La première des deux ſuivantes reſſembloit à celle qui précède; mais elle a reparu trois jours plus tôt que la précédente n'auroit dû revenir.

ANNÉE 1778.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
DÉCEMBRE				
2 à 1h 0' ſ.	108" au 1.er bord	9' 2" au bord A.	1ſ 0d 45'	15d 50' A.
12 à 9. 50 m.	21 ½ ap. le cent.	12. 33 au bord B.	2. 3. 18	16. 25 B.

Au mois de Janvier 1779, M. le Fevre, qui s'occupe depuis long-temps & avec ſuccès, de l'Aſtronomie, a obſervé quatre taches, dans mon Obſervatoire du Collége royal, avec un ſextant de 4 pieds de rayon placé dans le Méridien, & il en a fait lui-même le calcul.

ANNÉE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Janvier 7	19",5, 2.e bord	10' 57" du bord B.	1ſ 25d 48'	16d 9' B.
8	31	10. 42	2. 9. 38	16. 19
9	43,5	10. 37	2. 22. 40	16. 7
10	58,5	10. 43	3. 7. 0	15. 42
11	36,5, 1.er bord	11. 31	4. 20. 17	15. 25
12	1. 49, 1.er bord	18. 37	2. 19. 41	13. 25 A.
13	1. 36,5	18. 35	3. 00. 57	13. 11
14	1. 21,5	18. 47	3. 16. 23	13. 44
15	1. 6	18. 57	4. 0. 10	13. 29
13	0. 19, 2.e bord	19. 47	2. 6. 47	17. 44
15	1. 39, 1.er bord	19. 41	3. 2. 29	17. 58
16	1. 23,5	19. 54	3. 17. 12	17. 2
16	1. 37,5, 1.er bord	20. 10	3. 5. 9	19. 48
18	1. 9,5	20. 45	4. 1. 16	19. 3
19	0. 55	21. 3	4. 15. 13	19. 17

Voici encore trois belles taches obſervées par M. d'Agelet, dans ſon Obſervatoire de l'École Militaire, avec le grand quart-de-cercle mural de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon, au moment de midi.

ANNÉE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
Mars.. 6	0′ 9″, 2.e bord	16′ 19″ bord ſupér.	3ſ 18′ 31″	23d 42′ A.
8	26	17. 15	4. 14. 31	23. 19
10	48	19. 42	5. 10. 42	25. 0
11	1. 11, 1.er bord	20. 44 $\frac{1}{2}$	5. 22. 8	24. 50
13	0. 48 $\frac{3}{4}$	23. 10	6. 17. 31	24. 6
22	0. 5 $\frac{1}{2}$, 1.er bord	14. 58 $\frac{1}{2}$	8. 5. 55	23. 51 B.
22	0. 9 $\frac{3}{4}$, 1.er bord	13. 43	7. 26. 18	25. 15

M. Méchain a obſervé la même année, pluſieurs belles taches, dont j'ai fait le calcul : le 1.er Juillet il y en avoit une autre fort belle, qui paſſoit 43 ſecondes avant le centre du Soleil, & à 10′ 9″ du bord auſtral.

ANNEE 1779.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	LONGIT. héliocentrique.	DÉCLIN. ſolaire.
JUIN				
25 à 7h34′m.	0′ 26″ $\frac{1}{2}$, 2.e bord	11′ 16″ $\frac{1}{2}$ bord infér.	7ſ 23d 17′	18d 31′ A.
28.. 9. 0	0. 0 $\frac{1}{2}$ av. le cent.	10. 17	9. 5. 48	17. 56
JUILLET				
1.. 8. 16	0. 42 $\frac{1}{2}$	9. 43 $\frac{1}{2}$	10. 20. 1	18. 37
SEPTEMBRE				
29.. 8. 39	1. 13,1 2.e bord	20. 54,3 bord ſup.	0. 6. 28	12. 32
30.. 8. 29	1. 25,7	19. 14,5	0. 20. 55	12. 11
OCTOBRE				
2.. 8. 41	0. 20,2, 1.er bord	15. 55,7	1. 19. 45	11. 54
4..	0. 7	13. 25,5	2. 15. 14	10. 58

Tache qui a duré plus de quatre mois.

Au mois de Mai 1779, j'ai obſervé une belle tache qui me paroît avoir duré juſqu'au mois de Novembre, du moins les déclinaiſons ſont peu différentes, & les intervalles des retours ſont à très-peu près proportionnels; les obſervations du mois de Juillet ont été faites & calculées par M. Lefevre, dans mon Obſervatoire du Collége royal: on la voyoit ſans lunette; elle avoit 32 ſecondes de diamètre; & la nébuloſité 1′ 30″ *.

ANNÉE 1779.		TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite.	DÉCLIN. ſolaire.
Mai...	14	8^h 56′ mat.	1′ 10″ bord *or.*	21′ 6″ au bord A.	7^f 18^d 58′	16^d 3′ B.
Juin...	7	10. 0	0. 24,5	22. 13	6. 28. 33	14. 23
	9	9. 0	0. 44	21. 5	7. 22. 33	14. 51
	13	9. 0	0. 36 bord *occ.*	18. 31	9. 18. 53	15. 32
Juillet..	5	0. 4 ſoir.	0. 22 bord *or.*	12. 6	7. 27. 59	14. 58
	8	0. 5	1. 2,2	12. 41 ½	9. 10. 28	14. 39
	9	0. 5	1. 0 bord *occ.*	12. 38	9. 24. 06	14. 51
	10	0. 5	0. 46,5	12. 31 ½	10. 6. 31	14. 58
	11	0. 5	0. 33,5	12. 16 ½	10. 20. 53	15. 7
	12	0. 5	0. 22	11. 55	11. 4. 56	15. 23

Cette tache qui avoit une fort grande nébuloſité, la conſervoit encore très-ſenſiblement des deux côtés le 14 Juillet à 9 heures du matin, étant à 50 ſecondes ſeulement du bord du Soleil. Le 15, elle n'étoit qu'à peu de ſecondes du bord, & je diſtinguois encore la nébuloſité dans la partie tournée du côté du centre du Soleil, avec ma lunette achromatique. J'ai fait la même obſervation les 13 & 14 Juillet 1780, ſur une très-belle tache qui approchoit du bord, ce qui eſt poſitivement contre le ſyſtème de M. Wilſon, que j'ai déjà réfuté dans les *Mémoires de l'Académie, 1776, pages 508 & ſuivantes.*

Réfutation de M. Wilſon.

* Voyez le Journal de Paris, du 12 Juillet 1779.

M. Kratzeinſtein, dans les *Mémoires de Copenhague pour 1778*, rapporte auſſi des obſervations qui lui paroiſſent prouver que les taches du Soleil ſont des cavités; mais il croit auſſi avoir diſtingué de larges éminences ſur la ſurface brillante du Soleil, diſtinguées par une foible ombre. *Éphémérides de Berlin, 1780, page 187.* M. Bernoulli, *Nouvelles Littéraires, 5.e cahier, page 22.*

La tache dont on vient de voir les obſervations, fut vue encore par M. Méchain, au mois d'Août, car il eſt difficile de ne pas la regarder comme une ſeule & même tache; elle avoit 40 ſecondes de diamètre, & on la voyoit à la vue ſimple. Ces obſervations ſont très-exactes, parce qu'elles ont été faites avec une forte lunette achromatique, garnie d'un micromètre, où chaque ſeconde eſt ſenſible, & que les différences de paſſages ont été obſervées ſept à huit fois de ſuite.

ANNÉE 1779.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite ſolaire de la TACHE.	DÉCLIN. ſolaire.
Juillet.. 31	9h 40′ mat.	7″,5 bord *or.*	15′ 26″ au bord B.	8s 4d 36′	12. 56 B.
Août.... 1	8. 30	15,0	15. 20	8. 19. 45	13. 28
5	9. 21	66,4	13. 45	10. 14. 18	13. 14
10	8. 24	12,0 bord *occ.*	9. 36,3	0. 23. 3	13. 13

L'exactitude de ces obſervations m'a fait deſirer de les employer à l'examen de l'inclinaiſon & du nœud de l'Équateur ſolaire: mais pour accorder les deux premières déclinaiſons ſolaires qui diffèrent de 32 minutes, il faudroit diminuer trop conſidérablement l'inclinaiſon de l'Équateur ſolaire; une ſeconde d'erreur ſur la différence de déclinaiſon obſervée, ne produit que 4 minutes ſur la déclinaiſon ſolaire; une demi-ſeconde ſur la différence des paſſages en temps, ne produiſoit que 2 minutes dans l'obſervation du 31 Juillet: il y a donc lieu de croire que s'il ne s'eſt pas gliſſé dans une de ces deux obſervations quelque erreur plus conſidérable, la tache aura ſubi quelque changement dans l'intervalle du 31 Juillet au 1.er Août.

Au reſte, ſi l'on prend le milieu entre les deux premières déclinaiſons, on aura la même choſe que dans les deux dernières obſervations; ainſi, mes déterminations de l'inclinaiſon & du nœud, ſatisfont, autant qu'il eſt poſſible, à ces quatre obſervations.

La nébuloſité qui environnoit cette tache, examinée avec le fort équipage de la lunette de M. Méchain, lui paroiſſoit avoir autant d'étendue à l'Orient qu'à l'Occident, lorſque la tache étoit tout près du bord, le 11 Août; ſeulement, une ou deux petites taches moins avancées vers le bord du Soleil, paroiſſoient manquer de nébuloſité du côté du centre, quoiqu'elle ſut bien viſible du côté du bord; mais cela ne décide rien en faveur de l'hypothèſe de M. Wilſon, puiſque la grande tache n'offroit point pareille apparence, & parce que M. Méchain ne ſait point ſi les petites n'avoient pas déjà cette irrégularité dans leur nébuloſité, avant que d'approcher du bord du Soleil.

Cette même tache a apparu les mois ſuivans; je l'obſervai à Bourg en Breſſe, & M. Méchain l'a obſervée auſſi avec ſoin, à Paris. Je vais employer l'apparition de Septembre à chercher la durée de la rotation.

ANNÉE 1779.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite ſolaire de la TACHE.	DÉCLIN ſolaire.
Août... 31	9h 12′ mat.	0′ 48 bord *or.*	15′ 53″ au bord B.	10ſ 23d 36′	12d 0′ B
Sept..... 29	8. 27	1. 9	13. 16	0. 14. 34	13. 58
30	8. 29	1. 20 ½	11. 54 ½	0. 27. 37	13. 31
Octob.. 2	8. 30	0. 28 ½ b. *oc.*	8. 43 ½	1. 24. 20	14. 34
4	8. 35	0. 26 ⅔			
Nov.... 1	0. 42	0. 15	6. 15	4. 1. 37	14. 31

J'ai réduit les quatre obſervations de la fin de Juillet & du commencement d'Août, à une ſeule, & en prenant un milieu, je trouve que la tache avoit 10ſ 14d d'aſcenſion droite ſolaire, le 4 Août, à 20h 8′, temps moyen; par les quatre obſervations de la fin de Septembre & du commencement

d'Octobre, je trouve qu'elle avoit $1^{f}20^{d}$, le 1.er Octobre à $10^{h}40'$: en comparant ces deux résultats moyens, dans lesquels sont fondus huit observations très-exactes, j'ai pour la durée d'une rotation, $25^{j}9^{h}56'$, ce qui s'accorde singulièrement avec la durée que j'avois établie, *Mém. 1776, p. 497.* Durée de la rotation.

J'ai réduit de même les six observations du commencement de Juillet, à une même époque, & elles m'ont donné pour le 8 Juillet, à $9^{h}50'$, une ascension droite solaire de $9^{f}15^{d}$; cette position, comparée avec celle du 1.er Octobre, donne pour chaque révolution, $25^{j}9^{h}43'$, ce qui diffère encore bien peu de $25^{j}10^{h}$; révolution que j'avois trouvée par de plus longs intervalles, *pages 403, 410 & 413.*

Au mois de Juillet 1780, il a paru une belle tache alongée, dans la partie septentrionale du Soleil, à une déclinaison de 40 degrés, plus grande qu'aucune de celles qu'on avoit observées. Voici trois observations de M. Méchain. Tache à 40 degrés de déclinaison.

ANNÉE 1780.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite solaire de la TACHE.	DÉCLIN. solaire.
Juillet.. 5	4^{h} 52' mat.	29",9 au 2.e bord	5' 46" au bord sup.	7^{f} 12^{d} 21'	40^{d} 3' B.
8	10. 3	41,0	6. 16	8. 21. 42	40. 25
9	10. 5	50,7	6. 24	9. 4. 34	40. 15
12	8. 30	80,5	6. 16	....	....

Il a paru aussi dans le mois de Juillet, une belle tache double, visible sans lunette, & qui a subsisté jusqu'au mois d'Août, que M. Méchain a observé son retour. Son atmosphère étoit fort vaste; le 13, elle n'étoit pas à 2 minutes du bord du Soleil, & l'atmosphère étoit encore fort grande des deux côtés; le 14, on distinguoit à peine un petit filet d'atmosphère des deux côtés de la tache, mais il n'y en avoit pas plus d'un côté que de l'autre, ce qui infirme toujours de plus en plus, dans mon idée, l'hypothèse de M. Wilson, dont j'ai parlé ci-dessus, *page 420.*

ANNÉE 1780.	TEMPS MOYEN.	DIFFÉRENCE de PASSAGES.	DIFFÉRENCE de DÉCLINAISON.	ASCENS. droite ſolaire de la TACHE.	DÉCLIN. ſolaire.
Juillet.. 5	8h 36′ mat.	29″,9 du 2.e bord	11′ 5″ au bord B.	8f 9d 17′	19d 26′ B.
8	9. 48	71,7	11. 26	9. 21. 41	19. 18
9	9. 55	86,3	11. 31	10. 5. 29	18. 50
Août... 2	8. 44	30,0	13. 42	9. 9. 47	18. 42
5	8. 30	69,1	11. 49 $\frac{1}{2}$	10. 20. 15	19. 42
8	8. 9	28,4 du 1.er bord	9. 17	0. 0. 22	19. 55

Ayant calculé les aſcenſions droites ſolaires de la tache dans ces ſix obſervations, je les ai comparées deux à deux;

Par les Obſervations du 9 Juillet & du 2 Août, je trouve 25j 18h 50′

Par celles...... du 8 Juillet & du 5 Août, je trouve 25. 15. 24.

Et par celles.... du 5 Juillet & du 8 Août, je trouve 25. 19. 9.

Ces réſultats diffèrent beaucoup de ceux que j'ai trouvés par les obſervations précédentes; je ne ſais ſi cela vient du peu d'intervalle des obſervations ou d'un changement dans la tache.

Il paroît donc par ce Mémoire & par le précédent, qu'il y a des taches fort conſidérables, qui reparoiſſent au même point phyſique du diſque ſolaire, tandis que d'autres, également remarquables, paroiſſent à des points un peu différens; c'eſt une objection contre mon hypothèſe des montagnes fixes dans le Soleil: ſi l'on vouloit s'en tenir à l'hypothèſe ancienne, & ſuppoſer que les taches ſont des ſcories nageantes à la ſurface du Soleil, on pourroit dire qu'il y a des montagnes intérieures qui arrêtent ces corps flottans, & que par cette double cauſe, il doit y avoir des taches qui reparoiſſent au même point, quoique la plupart paroiſſent en des points différens. Il faudra encore beaucoup de temps & d'obſervations pour achever d'éclaircir de pareils doutes; mais en attendant, je crois qu'on ne peut révoquer en doute la durée de la rotation, que j'ai établie de 25 jours 10 heures.

EXTRAIT

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites à la campagne, près de Paris, pendant les Froids de Janvier 1767; avec des Remarques sur la cause des inégalités des Observations au Thermomètre, & sur l'effet du Froid sur les Animaux, sur les Blés & sur les Plantes potagères. *

Par M. ADANSON.

Lû à l'Académie le samedi 31 Janvier 1767.

LE peu d'accord que l'on voit entre les Observations faites au Thermomètre dans les différens quartiers de Paris, sur les grands Froids que nous venons d'essuyer les 6, 7 & 12 de ce mois, dont la communication a été donnée à l'Académie; & entre celles que j'ai faites au milieu d'un grand jardin, bien à découvert & dans la campagne, me détermine à faire part de mes remarques, non-seulement sur ce froid, mais encore sur ses effets, tant sur les animaux & les plantes, que relativement à l'épaisseur de la glace & à la chaleur du Soleil à midi pendant les jours où il a paru. Voici les moyens dont je me suis servi pour observer avec précision.

Moyens.

Deux thermomètres à l'esprit-de-vin, construits avec la plus grande attention par le sieur Cappy, suivant les principes de M. de Reaumur, portant 80 degrés à l'eau bouillante, nus, c'est-à-dire enfermés dans un tube de verre, & suspendus au milieu d'un chassis, sans autre appui que deux cordons qui lioient ce tube au chassis par les deux bouts, étoient ainsi fixés à un pieu, & à trois pieds au-dessus de terre, au milieu du susdit jardin; je les appellerai *A.*

Deux autres thermomètres aussi à tube, de la même

* L'impression de ce Mémoire ayant été oubliée dans le volume de 1767, on a cru devoir le publier dans celui-ci, pour donner lieu à une comparaison entre le Froid de 1767 & celui de 1776.

conſtruction, & d'une exactitude & conformité dans leur marche avec les deux précédens, éprouvée & confirmée par des obſervations ſuivies & très-variées depuis pluſieurs années, étoient placés contre un mur, l'un au Nord, l'autre au Sud, en dehors d'une fenêtre de ma maiſon, à 21 pieds au-deſſus du niveau des deux thermomètres ci-deſſus; je les appellerai *B*.

Je ne parle pas d'un cinquième thermomètre, conſtruit en 1745, par M. l'Abbé Menon, ſous les yeux de M. de Reaumur, non plus que de deux autres thermomètres qui étoient placés, ſoit à côté des deux derniers, ſoit dans l'intérieur de mon appartement.

Obſervations. Je vais expoſer dans une Table, les réſultats que m'ont donnés ces divers thermomètres, dans les trois jours de grands froids que nous venons d'eſſuyer, en ne prenant pour chaque jour que trois termes les plus éloignés; le premier au point du jour, vers les 7 heures du matin, c'eſt-à-dire, avant le lever du Soleil, qui eſt communément le temps le plus froid de la nuit pendant toute l'année, ſi ce n'eſt en hiver, lorſque par un temps couvert, il vient à ſouffler ſucceſſivement différens vents qui changent cette diſpoſition; le ſecond à midi précis, ou entre midi & une heure, qui eſt le temps le plus chaud du jour en hiver; le troiſième à 8 heures du ſoir, où la température tient une eſpèce de milieu entre les deux précédentes. J'y ai joint les obſervations au baromètre, & ſur les vents & les nuages, ou l'état de l'atmoſphère.

ANNÉE 1767.	À 7 HEURES du MATIN.	À 12 HEURES		À 8 HEUR. du SOIR.	ÉPAISSEUR de la GLACE.	VENTS.	ÉTAT de L'ATMOSPH.
			au SOLEIL.				
Janvier 6	0,3d A. 0,2 B. 27pouc. 9lig.	2d 2	....	0,11d 0,9	4 lignes	Sud-oueſt, foible & fort par intervalle.	Couvert, petite neige.
Janvier 7	0,12½ A. 0,10½ B. 27pouc. 11lig.	0,3 0,2	3	0,8 0,6	20 lignes	Nord-eſt, foible & médiocre.	Serein. Serein.
Janvier 12	0,14 A. 0,12 B. 27pouc. 7lig.	0,3 0,2	6	0,11 0,9	24 lignes	Sud, foible & méd.	Serein. Serein.

Les différences données par ces thermomètres viennent, comme l'on voit, de la différence de leur exposition, & on conviendra aisément que les deux appelés *A*, exposés isolément au milieu du jardin, lesquels ont donné le plus grand froid de 0,14 degrés, le 12 au matin, un peu avant le lever du Soleil, ont marqué la vraie température de l'air libre, celle qui agit immédiatement sur les Plantes; au lieu que ceux appelés *B*, ont donné 1 à 2 degrés de moins, parce qu'étant contigus au mur de la maison & abrités, ils participoient à la chaleur de ces murs & du feu intérieur des appartemens.

Depuis que j'observe, j'ai remarqué constamment cette différence entre les thermomètres appliqués sur une planche contre un mur, & entre ceux qui sont isolés. J'en ai fait mention dans les observations météorologiques, que je communiquai dès l'année 1757, pour le *Journal de Médecine*, en disant que la différence de la température de l'air observée dans Paris & à la campagne, est de 1 degré dans l'espace de 0 à 5 degrés, tant au-dessus qu'au-dessous, & de 2 degrés dans l'espace de 0 à 10 degrés, progression qui doit sans doute augmenter à un plus grand nombre de degrés.

Le vent seul est capable de donner une différence pareille; c'est ainsi que le second des deux thermomètres *A*, qui est à l'abri derrière le piquet de 1 pouce de diamètre qui le supporte, marque un demi-degré depuis 0 jusqu'à 5 degrés, & 1 degré depuis 0 jusqu'à 14 degrés de moins que le premier qui est isolé; lorsque le vent froid vient du côté où le piquet le met à l'abri, comme les 12 & 13 Janvier, où il souffloit du Sud & du Sud-est. La même chose est arrivée, & arrive tous les jours au thermomètre *B*, de la fenêtre regardant le Sud; il marquoit 0,5 degrés par le vent froid de Sud qui frappoit dessus, pendant que le thermomètre opposé *B* regardant le Nord, se soutenoit constamment à 0,4 degrés.

Par les expériences rapportées dans la Table précédente, on voit que la chaleur du Soleil, donnant sur le premier des deux thermomètres *A* isolé, fut le 7 à midi, jusqu'à près

de 1 heure, à 3 degrés au-dessus de 0, tandis que le second de ces mêmes thermomètres, qui étoit à 6 pouces de distance du premier, exposé à l'ombre d'un piquet de 1 pouce seulement de diamètre, marquoit 0,3 degrés; ce qui donne à la chaleur du Soleil 6 degrés au-dessus de la température de la campagne ombragée. Le 12, jour du plus grand froid, le thermomètre isolé marquoit à midi au Soleil 9 degrés, pendant que son voisin marquoit 0,3 degrés à l'ombre, ce qui donne 9 degrés pour la chaleur des rayons du Soleil, frappant immédiatement sur le tube isolé du thermomètre.

Épaisseur de la glace.

L'épaisseur journalière de la glace fut assez proportionnelle aux degrés de froid, savoir; de 4 lignes par 0,3 degrés; de 20 lignes, par 0,12 degrés $\frac{1}{2}$; & de 24 lignes, par 0,14 degrés. Les observations ont été faites d'un midi à l'autre, c'est-à-dire, sur de la glace cassée, par exemple, aujourd'hui à midi, en nettoyant aussitôt l'eau de manière que le lendemain à midi, au bout de 24 heures, on avoit une glace toute nouvelle.

L'épaisseur totale de la glace, formée depuis les premières gelées du 4 Janvier, jusqu'au premier dégel arrivé le 22 suivant, soit sur la Seine, soit sur les eaux tranquilles de la Gare, soit dans un bassin de mon jardin, prise dans les endroits unis, sans neige & sans autres bousins, & où les glaçons ne s'étoient pas entassés ni recouverts les uns les autres, étoit de 6 pouces $\frac{1}{2}$ à 7 pouces au plus. Il est bon de remarquer que la rivière de Seine a été prise entièrement après un froid très-médiocre, comme de 0,3 à 0,5 degrés, parce que ses eaux étant extrêmement basses, & même beaucoup plus basses qu'on ne les a vues en hiver, depuis bien des années, avoient moins de rapidité dans leur cours.

Si l'on ajoutoit ensemble tous les produits de la glace formée chaque jour, & enlevée toutes les 24 heures, depuis le 4 de Janvier inclusivement jusqu'au 21 inclusivement, on auroit 160 lignes, c'est-à-dire, 13 pouces $\frac{1}{3}$ pour son épaisseur totale, au lieu de 7 pouces seulement qu'elle a eu en se formant par couches journalières, appliquées les unes

au-dessous des autres qui leur servoient d'abri. On sent bien par la même raison, que si l'on eût cassé la glace d'heure en heure, tous ces produits rassemblés eussent donné plus de 13 pouces à son épaisseur, ainsi occasionnée artificiellement. J'ai laissé tous ces objets de curiosité, pour m'en tenir à l'observation de son épaisseur naturelle, & pour la comparer à la congélation de la terre qui a été presque d'un tiers moindre, puisqu'elle n'a pas passé la profondeur de 5 pouces.

L'épaisseur de la glace montre dans sa formation bien des irrégularités qui reconnoissent plusieurs causes, dont je pourrois assigner la gradation ou la marche fondée sur nombre d'observations; mais j'en réserve le détail pour d'autres temps. Il me suffira de faire remarquer ici, en faveur des personnes qui construisent des thermomètres; 1.° que la glace conserve intrinséquement un degré de froid proportionnel à celui qui l'a formé; 2.° que la neige produite en pilant de la glace formée par 0,14 degrés de froid, le 12 de Janvier, employée ce même jour, sur le champ, dans une chambre qui étoit pour lors à la température de 8 à 9 degrés, marquoit le terme de la congélation à 0,5 degrés; 3.° enfin que pour avoir, dans un cas pareil, le terme 0 qui marque le premier degré de la congélation de l'eau, il faut laisser cette glace pilée en neige dans une chambre tempérée, & ne l'employer pour le thermomètre, que quand elle est presqu'entièrement fondue.

Effets de ce froid sur les Plantes.

L'effet de ce froid de 0,14 degrés (qui ne fut par conséquent que de 1 degré moindre que celui observé en 1709, & plus grand que tous ceux observés depuis autour de Paris; soit en 1740, où il fut de 0,10 degrés $\frac{1}{2}$; soit en 1742, où il fut de 0,13 degrés $\frac{1}{2}$), a été tel que les Plantes qui avoient résisté aux froids précédens de 0,5 degrés, & qui n'étoient pas couvertes de neige, dont la hauteur étoit de 4 pouces environ, ont été gelées entièrement, comme le Souci, la Giroflée-quarantain blanc & rouge, le Lavatera, appelé *Althæa maritima arborea veneta*, par Tournefort, l'Ortie-grièche annuelle, la Mercuriale, la Valériane rouge, le Pois-

micho hâtif, & le Pois-nain, ſemés dès le 10 Octobre; néanmoins toutes les parties de ces Plantes qui étoient cachées ſous la neige, ont réſiſté à l'action de la gelée, & promettent de repouſſer aux premières chaleurs.

Il en a été de même des blés ſemés au premier d'Août, de Septembre & d'Octobre; ceux d'Août étant trop avancés & montés en tuyaux, ont été entiérement détruits; ceux de Septembre ont peu ſouffert, excepté les blés mars; tels que le Scourjon de Bengale, le Sucrion, l'orge Baillarge, les Avoines, le Polar de Bengale, celui de Viljuif, l'Andalou, & la petite Speaute, appelée *Speautou* en Provence, qui étant déjà montés en chaume, ont péri juſqu'aux racines. Les Polars d'hiver les plus hâtifs, qu'on pourroit appeler *Mi-mars*, parce qu'ils ſemblent tenir un milieu entre les blés d'hiver & les blés mars, tels que le Groſſet, la grande Speaute de Bordeaux, &c. ont perdu ſeulement toutes les feuilles qui étoient au-deſſus de la neige. La grande Speaute de Flandre, le Locar des pays du Nord, & le Seigle qui paroît être plus dur au froid qu'aucun autre blé connu, ont été intacts dans toutes leurs parties. Les blés ſemés au 1.er Octobre & au 1.er Novembre, étant moins avancés que ceux de Septembre, & entièrement couverts de neige, ont encore moins ſouffert. Le Scourjon de Bengale, & le Sucrion ont été les ſeuls que la gelée ait détruits entièrement. Enfin de plus de trente eſpèces ou genres de blés les plus différens de tous les climats, qui ont été ſemés au 1.er Décembre, c'eſt-à-dire, depuis deux mois, pas un n'a encore levé faute de chaleur *, & il y a peu d'hivers où le Froment reſte ſi long temps ſous terre; ces diverſes remarques jointes à beaucoup d'autres expériences de ce genre, dont je ferai part à l'Académie, ſemblent fixer le temps moyen des ſemailles des blés d'hiver, au 1.er Octobre pour le climat de Paris.

Les herbes potagères qui auroient péri par des froids

---

* Ils ont levé depuis la première lecture de ce Mémoire, le 14 de Février, c'eſt-à-dire, après ſoixante-douze jours.

beaucoup moindres que 0,14 degrés, ont résisté, parce qu'elles étoient couvertes de neige; telles sont les Laitues pommées d'hiver, les Chicons, la Chicorée frisée, la Scarole, l'Épinard, le Cerfeuil, l'Oseille, le Persil : l'Œillet, le Fraisier & les Choux-verts, quoique non couverts de neige, ont résisté au grand froid; & il paroît que ces Plantes, sur-tout le Fraisier, & peut-être l'Œillet, résisteroient à des gelées encore beaucoup plus fortes. La plupart des jeunes branches du Figuier & du Laurier-franc, ainsi que les feuilles & boutons à fleur de ce dernier, ont été gelés à la longueur de 5 à 6 pouces.

Si ces froids de 0,14 degrés qui ont sévi dans la campagne autour de Paris, ont épargné bien des Plantes, à cause de la couche de neige de 4 pouces d'épaisseur dont elles étoient heureusement couvertes, ils ont fait sentir leurs terribles effets sur quelques animaux, & même sur les hommes. J'ai trouvé dans mon jardin plusieurs oiseaux, entr'autres des Pinsons, morts de froid, & d'autres qui dénués de force, se laissoient prendre à la main; un Moineau-franc mâle bien vigoureux, mis par expérience en terre, le 11 au soir, à la profondeur de 6 pouces, dans un pot à fleur foncé d'un peu de paille, & recouvert d'un autre pot renversé en forme de chapeau, fut trouvé gelé le lendemain matin 12. Sur les Animaux.

Le Peuple a beaucoup souffert : on amenoit tous les jours à Paris plusieurs hommes & femmes trouvés morts de froid & gelés à la campagne : il est aussi constant que plusieurs personnes aisées, obligées de voyager, allant de Paris à Versailles, dans leurs équipages, ont essuyé une maladie très-sérieuse, par le seul effet du froid : moi-même, pour avoir voulu seulement descendre dans mon jardin, j'ai essuyé une fluxion presqu'aussi considérable que celle que j'éprouvai par les grands froids de Février 1754, à mon arrivée du *Sénégal* en Bretagne, où j'eus gelée & dure comme une pierre, la moitié gauche du visage exposée au vent de Nord-est qui souffloit alors, & qui donnoit 0,18 degrés de froid au thermomètre de M. de Reaumur. Ma première fluxion de cette

année, occaſionnée par le froid de 0, 12 degrés ½, du 7 Janvier, étoit preſqu'entièrement diſſipée le 12, lorſque le froid de 0, 14 degrés, auquel je m'expoſai pour obſerver le thermomètre, la renouvela au point que j'en ai encore aujourd'hui des reſſentimens de douleurs très-violentes dans les os maxillaires. On peut juger par les effets de ces froids, qui ne ſont que les froids les plus ordinaires de la Suède, de la Ruſſie & des autres pays du Nord, à quels dangers s'expoſent les habitans de nos climats tempérés, qui veulent s'expatrier pour aller habiter ces contrées glacées.

Je ne m'étendrai pas davantage ſur ces obſervations iſolées, mais je travaillerai, à mon premier loiſir, à mettre en ordre une ſuite nombreuſe de réſultats que j'ai depuis plus de vingt ans que j'obſerve, ſoit au Sénégal, ſoit en France, les divers météores, les vents, les nuages, la quantité d'eau de pluie, & ſur-tout ſon évaporation, & celle de la terre imbibée, dont je ne vois nulle part des Tables, leſquelles cependant me paroiſſent auſſi importantes que celles de l'eau de pluie, pour trouver le rapport de l'une à l'autre, & ſaiſir en quoi peut conſiſter la quantité qui ſert à la végétation des plantes, celle qui forme les lacs & les rivières, celle enfin qui pénètre dans l'intérieur de la terre pour s'y perdre, & ne reparoître peut-être jamais à ſa ſurface, ou au moins ſeulement dans ces circonſtances éloignées qui occaſionnent dans notre globe ces révolutions terribles, dont les ſiècles les plus reculés montreront encore les traces preſque ineffaçables.



EXPÉRIENCES

EXPÉRIENCES

Sur une espèce de Stéatite blanche, qui se convertit seule au feu en un beau biscuit de Porcelaine.

Par M.rs GUETTARD & LAVOISIER.

LA plupart des terres & pierres argileuses sont des composés plus ou moins métalliques, & il est extrêmement rare de trouver des argiles assez pures & assez blanches pour être employées à la fabrication de la Porcelaine: c'est sans doute cette grande rareté des argiles blanches & des kaolins qui a retardé long-temps en France les progrès de l'art de la Porcelaine; & nous manquerions peut-être encore de fabriques de ce genre, si les découvertes successives de M. Guettard, de M. le Comte de Lauraguais, & de M.rs Macquer, Baumé & de Montigny, n'eussent excité l'industrie nationale. Parmi un assez grand nombre de terres que nous avons ramassées en France dans différens voyages que nous y avons faits, M. Guettard & moi, & sur lesquelles j'ai fait depuis quelques expériences, il n'en est qu'une seule qui ait paru réunir la blancheur, la ténacité suffisante & la qualité réfractaire qui caractérisent la bonne terre à Porcelaine.

Lû le 5 Septemb. 1777.

Le côteau où se trouve cette terre est situé à une lieue & demie ouest de Plombières: le *haut du seuil* est situé au haut de ce côteau, & *Fainmont* dans le bas; circonstances suffisantes pour en déterminer assez exactement la position, pour qu'il ne soit pas possible de s'y méprendre.

La hauteur du côteau, depuis le haut du seuil jusqu'au niveau du ruisseau qui passe à Fainmont, est de quatre cents cinquante à cinq cents pieds environ, mesuré par le baromètre; il est composé dans le haut 1.° de terre végétale, légère & sableuse, entre-mêlée en quelques endroits de pierres sableuses plates; 2.° de rochers horizontaux, de sable d'un grain fin, & qui approchent beaucoup de l'espèce de grès

dont on fait les meules des Rémouleurs: ces pierres ſableuſes occupent environ la moitié du côteau; au-deſſous on trouve des granits en bancs continus inclinés à l'horizon; enfin, preſque dans le bas, & à trente pieds environ du niveau du fond de la vallée, on trouve un banc de ſept à huit pieds d'épaiſſeur, d'une terre blanche, verdâtre en quelques endroits, d'un grain très-fin, aſſez douce au toucher, & qui tient beaucoup de la ſtéatite.

C'eſt la terre blanche de ce banc qui fait l'objet de ce Mémoire: au-deſſous on trouve un banc d'égale épaiſſeur, d'une terre à peu-près de ſemblable nature, mais qui, au lieu d'être blanche, eſt d'un vert-pâle aſſez agréable: cette couleur s'affoiblit beaucoup lorſque la terre ſe sèche.

Cette terre blanche eſt très-pure dans toute l'étendue du banc, & on pourroit même ſe diſpenſer de la laver; elle n'a beſoin pour être employée à faire de la Porcelaine, que d'être battue & corroyée, après quoi elle eſt ſuſceptible de ſouffrir le tour & le moule, & cuite à l'aide d'un feu très-violent, elle donne ſeule & ſans addition d'aucune autre matière, une belle Porcelaine aſſez blanche, greſſeuſe, infuſible au plus haut degré de feu connu, & qui, d'après le petit nombre d'expériences auxquelles nous l'avons ſoumiſe, nous a paru réunir tous les caractères de perfection qu'on peut deſirer.

Le banc de cette terre paroît avoir une très-grande continuité; celui qui eſt au-deſſous & qui a une teinte verdâtre très-marquée, peut être employé à faire des poteries de grès & des uſtenſiles de ménage; nous nous en ſommes aſſurés par des expériences. Le bois étant très-abondant dans tous les environs de ce canton, on pourroit y faire un établiſſement avantageux de Porcelaine & de Poterie de grès, & le tranſport même ne ſeroit pas très-diſpendieux à cauſe de la proximité de Plombières, qui communique par pluſieurs grandes routes avec l'Alſace, la Lorraine, la Franche-Comté & la Champagne.

DESCRIPTION
DE DEUX
MINES DE CHARBON DE TERRE,
Situées au pied des montagnes de Voyes, l'une en Franche-Comté, l'autre en Alſace, avec quelques expériences ſur le charbon qu'on en tire.

Par M.rs GUETTARD & LAVOISIER.

LES Obſervations rapportées dans ce Mémoire, ſont extraites du Journal d'un voyage que nous avons fait enſemble en 1767, M. Guettard & moi; en conſéquence, tout ce qui ſera rapporté dans ce Mémoire, doit nous être regardé comme commun. Lû le 5 Sept. 1777.

La première des deux mines dont il va être queſtion, eſt ouverte dans une montagne de ſchite, entre les villages de Ronchamps & de Champagney, à deux lieues Oueſt-ſud-oueſt de Lure, & à trois lieues Eſt-ſud-eſt de Betfort.

Cette mine s'exploite à découvert & preſque à la ſurface; comme elle étoit nouvellement ouverte lorſque nous avons eu occaſion de l'obſerver, on ne l'avoit attaquée que par le bas de la montagne, & on n'avoit pas encore ſuivi les veines à une grande profondeur.

Les bancs de charbon de terre ſont inclinés de trente degrés environ avec l'horizon; leur épaiſſeur eſt communément de neuf pieds, mais elle n'eſt pas par-tout la même.

Le banc de charbon de terre eſt ſouvent interrompu & troublé par des veines de pyrites qui n'ont pas cependant beaucoup de continuité; quelquefois auſſi ces pyrites ſont répandus en rognons, de la groſſeur d'une noix, dans la maſſe du charbon.

Le *tectum* de la mine eſt un ſchite jaunâtre dans des

endroits, & noirâtre dans d'autres; ce ſchite eſt aſſez tendre, il eſt feuilleté, mais il ne ſe débite pas en feuillets auſſi minces que l'ardoiſe : lorſqu'il a été calciné, il donne de l'alun par lexiviation; on détaillera dans un moment la manière dont ſe fait ce travail en grand. Ce ſchite, comme preſque tous ceux qui recouvrent le charbon de terre, contient quelques empreintes de végétaux, mais elles y ſont très-rares: au-deſſous du banc de charbon de terre, ſe trouve un ſchite plus noir que celui qui ſert de tectum à la mine; les fouilles alors ouvertes ne nous ont pas permis de pouſſer plus loin nos obſervations.

Ce charbon de terre, par l'analyſe chimique, donne à pluſieurs égards les mêmes produits que le charbon de terre ordinaire, mais il en diffère eſſentiellement à d'autres; & c'eſt cette ſingularité, commune à la plupart des charbons de terre des Voyes, qui nous a engagés à donner cette obſervation à l'Académie. Soumis à la diſtillation à la cornue, nous en avons obtenu d'abord, à une chaleur très-douce, du flegme; enſuite il a commencé à ſe dégager une odeur empyreumatique très-marquée, & il a paſſé un peu d'huile claire & limpide, & en même temps un eſprit légèrement acide, qui rougiſſoit complètement le ſirop de violettes, & faiſoit efferveſcence avec les alkalis; cette liqueur acide a été ſuivie d'une huile noire & épaiſſe, ſentant fortement l'empyreume, & il eſt reſté dans la cornue un charbon léger & très-inflammable.

Cette analyſe du charbon de terre de Ronchamps, préſente une exception remarquable, & dont il paroît que les exemples ſont rares: toutes les analyſes de charbons de terre qui ont été publiées juſqu'ici, ſi ce n'eſt celle publiée dans l'Encyclopédie à l'article *charbon*, annoncent qu'on retire de ce foſſile de l'alkali volatil en grande abondance; celui de Ronchamps au contraire donne de l'acide.

L'un de nous ſe rappelle d'avoir entendu dire à M. Rouelle l'aîné, dans ſes Leçons de Chimie, que le charbon de terre de Balleroy en Normandie, préſentoit le même phénomène,

& qu'il donnoit également de l'acide par la diſtillation, au lieu d'alkali volatil.

Nous avons dit que le ſchite qui ſervoit de tectum au charbon de terre de Ronchamps, étoit alumineux; & en effet, dans l'établiſſement naiſſant qui ſe formoit en cet endroit, lorſque nous y paſſames en 1767, M. Guettard & moi, on avoit entrepris d'y former une Fabrique d'alun, & voici comme on opéroit.

On concaſſoit groſſièrement le ſchite alumineux, & on en formoit de longues planches ou couches pyramidales, diſpoſées en toît par le haut; on entre-mêloit avec ce ſchite des morceaux de charbon de terre, & on ménageoit du jour pour la circulation de l'air.

Lorſque tout étoit ainſi diſpoſé, on mettoit le feu au tas, & on laiſſoit la maſſe s'affaiſſer & s'éteindre d'elle-même, ce qui n'arrive que quand tout le charbon de terre eſt conſumé.

Il ſe dégage beaucoup de ſoufre dans cette opération, & ce ſoufre étoit perdu lorſque nous viſitames cette Fabrique; mais on ſe propoſoit de le recueillir dans la ſuite, & d'en tirer parti.

Lorſque le ſchite a été ainſi calciné, on le tranſporte dans de grands baſſins quarrés, creuſés dans la terre & revêtus de planches, dans leſquels on le leſſive en remuant avec un ringard: de ces foſſes, l'eau eſt conduite par des canaux de bois dans de grands réſervoirs où elle s'épure, après quoi elle tombe dans des chaudières de plomb très-épais, qui forment des quarrés très-alongés; la liqueur eſt rapprochée, dans ces chaudières, juſqu'à ce qu'elle ſoit au point de criſtalliſation; enfin on la met à criſtalliſer dans de grandes caiſſes de bois.

Ces mêmes mines préſentoient encore un autre objet d'induſtrie: on y avoit pratiqué une Fabrique de noir de fumée; cinq fourneaux étoient continuellement employés à brûler du charbon de terre pour cet objet; ces fourneaux ſont fort bas, & n'ont point de cendrier; ils ont 12 pieds de long & 6 pieds de large par-devant, ils vont enſuite en

ſe rétréciſſant vers le fond, & ſe terminent en un tuyau qui aboutit dans une chambre de 28 pieds de long ſur 12 ou 13 de large; toutes ces chambres ſont voiſines & mitoyennes: à leur extrémité dans le haut eſt une cheminée qui aboutit dans une galerie haute, commune à toutes les chambres: cette cheminée s'ouvre & ſe ferme à volonté, par le moyen de tuiles & de briques, afin de pouvoir ménager convenablement le feu; communément, on ne laiſſe qu'une ouverture de la groſſeur du poing. Au moyen de ces diſpoſitions, la fumée circule dans la chambre, & s'attache à ſes parois; une petite portion ſeulement parvient juſqu'à la galerie commune, où elle ſe raſſemble de la même manière: on n'entre qu'une fois par mois dans chaque chambre; on détache le noir des murailles ſur leſquelles il s'eſt raſſemblé & on le paſſe à travers un tamis: ce noir eſt lourd, gras & mat; il ſent l'empyreume, un peu le ſoufre, & au total il eſt de la qualité la plus médiocre.

On remplit les fourneaux de charbon de terre toutes les quatre heures: la matière charbonneuſe qu'on en retire n'eſt pas encore perdue; on tire parti de tout dans ce travail, & elle eſt vendue pour la cuiſine & les uſages domeſtiques. Nous ignorons quel a été le ſuccès de cette entrepriſe: tout ce que nous pouvons dire, c'eſt qu'elle promettoit beaucoup en 1767, & qu'elle paroiſſoit montée & ſuivie par des perſonnes très-intelligentes.

Le charbon de terre de Ronchamps n'eſt pas le ſeul de ce canton qui donne de l'acide par diſtillation, au lieu de donner de l'alkali volatil: quelques morceaux que nous avons tirés de veines peu ſuivies qui ſe trouvent près Saint-Hypolite en Alſace, nous ont préſenté le même phénomène.

Le village de Saint-Hypolite eſt ſitué au Nord-eſt de Scheleſtat en Alſace, & à la diſtance d'une lieue & demie environ de cette ville. Pour donner une idée des circonſtances dans leſquelles ſe trouve le charbon de terre qu'on tire de ſes environs, nous allons rapporter ici ce qui ſe trouve inſcrit ſur notre Journal d'obſervations, à la date du 23 Août 1767.

« Le village de Saint-Hypolite eſt à l'extrémité des

anciennes alluvions du Rhin, & tout le terrein voiſin du côté de la plaine d'Alſace eſt couvert de quartz blancs roulés, qui ſont quelquefois liés par un ſable fin, & qui forment des poudingues.

Il en eſt bien autrement du terrein qui ſe trouve au-delà de Saint-Hypolite, c'eſt-à-dire à l'Eſt, & en gagnant vers la montagne : on n'eſt pas plutôt ſorti de ce village qu'on entre tout d'un coup dans un terrein compoſé de granit à grandes plaques de Feld-ſpath; ces granits ſont quelquefois durs, mais ſouvent ils ſont friables, & les grains qui les compoſent ſe ſéparent aiſément les uns des autres ; on diroit que ce ſont plutôt des détritus de granit que des granits même, tant ils ont peu de conſiſtance.

On s'élève ainſi inſenſiblement en ſuivant la route de Sainte-Marie-aux-Mines, & en laiſſant à gauche un ruiſſeau qui paſſe entre Roderſch & Saint-Hypolite : lorſqu'on eſt parvenu à une demi-lieue environ de ce dernier endroit, on trouve à droite une coupe de 40 pieds, faite pour la facilité du grand chemin; elle offre les détails qui ſuivent.

ORDRE des bancs d'une coupe qui ſe trouve à une demi-lieue de Saint-Hypolite, ſur le grand chemin de cet endroit à Sainte-Marie-aux-Mines.

1.° Terre rouge glaiſeuſe qui contient des quartz blancs roulés	3^{p}	$''^{p}$
2.° Terre noire fine ſableuſe, & qui a toute l'apparence d'une terre bitumineuſe	1.	6.
3.° Gravier fin, ou eſpèce de granit tendre & ſans conſiſtance, mêlé de morceaux irréguliers de Feld-ſpath	4.	″
4.° Même gravier mieux lié & plus dur, & qui forme un vrai granit	″	6.
5.° Même gravier ou granit ſans conſiſtance, qu'au *N.° 3*	1.	6.
6.° Même gravier durci, & formant un vrai granit	″	4.
7.° Même gravier ou granit ſans conſiſtance, qu'au *N.° 3*	1.	6.
8.° Schite talqueux gris en feuillets	″	6.

» 9.° Schite noir très-bitumineux.	″p	5p.
» 10.° Granit jaunâtre, d'une consistance à-peu-près semblable » à celle des *N.os 4 & 6*.	″	4.
» 11.° Schite gris bitumineux, avec empreintes de fougères & » autres végétaux.	1.	″
» 12.° Espèce de granit tendre, s'émiettant aisément & n'ayant » presque point de consistance, coupé par un petit filet de » charbon de terre, de 4 lignes d'épaisseur.	5.	″
» 13.° Granit plus dur, dont les grains ont cependant médio- » crement de liaison, pénétré de bitume, & coupé par de petits » bancs de charbon de terre & de schite noir, dont les plus épais » ont 4 à 5 pouces environ.	20.	″
» 14.° Granit un peu plus dur, & dont les grains sont passa- » blement liés, moins brun que le précédent, & qui ne paroît » pas bitumineux; il y en a environ de découvert.	5.	″
TOTAL.	44.	7.

Tous ces bancs s'inclinent vers le penchant de la montagne, c'est-à-dire, vers le Midi, en formant un angle environ de 20 degrés avec l'horizon.

Sur la gauche, en descendant vers le ruisseau, à peu-près dans le même plan que le banc ci-dessus *n.° 13*, on avoit fait différentes fouilles pour obtenir du charbon de terre: les trous sont creusés dans le même gravier graniteux que ci-dessus; mais comme ce gravier a peu de consistance, il se fait fréquemment des éboulemens qui ruinent les travaux: une circonstance qui doit encore rendre l'exploitation de ces mines peu profitable, c'est que quelquefois les petites veines de charbon de terre manquent tout-à-coup, & paroissent se fondre & pénétrer dans le gravier graniteux, qui alors est plus bitumineux. Malgré ces différens obstacles, on paroissoit disposé lors de notre passage en 1767, à entreprendre des travaux suivis en cet endroit: nous en ignorons l'évènement.

Les granits dont nous venons de parler, forment la base de la montagne: en s'élevant davantage, on observe que ces granits sont recouverts de sable rougâtre mêlé de quartz roulés, & dans

& dans lequel on trouve des rochers d'un grain rougeâtre très-fin & très-propre à faire des meules de Rémouleur : ces grès se nomment *mollasse* dans le pays ; ce terrein sableux forme tout le haut de la montagne.

Des morceaux de charbon de terre pris dans les bancs qu'on vient de décrire, ont donné par la distillation à feu nu, par un degré de chaleur modérée, 1.° un peu de flegme; 2.° un esprit très-légèrement acide; 3.° une huile épaisse, noire & empyreumatique de l'acide, & pas un atome d'alkali volatil : il est resté dans la cornue un charbon léger, poreux, tel qu'on l'obtient de tous les charbons de terre.



RECHERCHES SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Par M. COUSIN.

Lû en 1778.

(1.) TOUTES les Équations différentielles du second ordre peuvent être représentées par $\frac{1}{dx}\, dz + \mu = 0$, μ étant une fonction quelconque de x, y & $\frac{dy}{dx} = z$. Soit $dz = \frac{dz}{dx}\, dx + \frac{dz}{dy}\, dy$; on changera de cette manière l'équation différentielle en une équation aux différences partielles $(A) \ldots \frac{dz}{dx} + z\, \frac{dz}{dy} + \mu = 0$.

On doit voir que toute solution de l'équation aux différences partielles qui renfermera une constante arbitraire, sera une des intégrales premières complètes de l'équation différentielle : une de ces solutions qui renfermeroit deux constantes arbitraires, donneroit, en faisant chacune de ces constantes successivement nulle, les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle ; on en tireroit encore l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles, par la Méthode que M. de la Grange a donnée dans les Mémoires de Berlin, de 1774. Mais de quelque manière qu'on parvienne à intégrer complètement l'équation aux différences partielles, on aura z par une équation qui renfermera une fonction arbitraire; il sera facile d'en tirer deux équations particulières, qui seront les intégrales premières complètes de l'équation différentielle.

Le cas le plus simple est celui où $\mu = 0$, & où l'équation aux différences partielles a pour intégrale complète $y - xz + F{:}z = 0$; on en tire $y - xz = a$, $z = b$,

qui ſont les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; & en éliminant z, $y - bx = a$, qui, à cauſe des deux conſtantes arbitraires a & b, en eſt l'intégrale finie complète.

Lorſqu'on aura l'intégrale complète de l'équation *(A)*, il ſera facile de trouver celle de $\frac{du}{dx} + (mu + n)\frac{du}{dy} + \mu' = 0$, m & n n'étant fonctions que de x, y; car on réduira celle-ci à la première, en faiſant $mu + n = z$.

(2.) Mais je remarquerai que ſi l'on donne à l'équation *(A)* la forme $\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, α, β, γ étant des fonctions inconnues de x, y, z, telles que $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = \mu$, je remarquerai, dis-je, qu'on ſatisfera à cette équation aux différences partielles, en prenant

$$z = e^{\int(\sigma dx - \alpha dy + \Sigma dz)}\left\{a - \int e^{-\int(\sigma dx - \alpha dy + \Sigma dz)}\left[\gamma dx + (\beta + \sigma).dy + \Sigma z dz\right]\right\},$$

où e eſt le nombre qui a pour logarithme l'unité, a une conſtante arbitraire, & σ, Σ des fonctions inconnues de x, y, z. Pour que cette expreſſion ſignifie quelque choſe, il faut que les différentes quantités ſous le ſigne $\int$ ſoient des différentielles exactes, c'eſt-à-dire qu'il faut que l'on ait les quatre équations ſuivantes, dans leſquelles on a mis pour β ſa valeur $\frac{\mu - \alpha z^2 - \gamma}{z}$:

$$(a)\ldots\begin{cases}\frac{d\sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dx} = 0, \ \frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} = 0, \ \frac{d\gamma}{dz} - z\frac{d\Sigma}{dx} + \Sigma(\sigma z - \gamma) = 0, \\ \frac{d\sigma}{dx} - \sigma^2 - \frac{\sigma}{z}(\mu - \gamma - \alpha z^2) = \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma - \frac{1}{z}\frac{d(\mu - \gamma - \alpha z^2)}{dx}.\end{cases}$$

(3.) Si l'on fait $e^{-\int(\sigma dx - \alpha dy + \Sigma dz)} = A$; d'où l'on tire $\sigma = -\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$, $\alpha = \frac{1}{A}\frac{dA}{dy}$, $\Sigma = -\frac{1}{A}\frac{dA}{dz}$, & par conſéquent $\frac{d\sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dx} = 0$, $\frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} = 0$; que

l'on mette ensuite ces valeurs dans les deux dernières des équations *(a)*, elles deviendront

$$(b)\ldots\begin{cases}\dfrac{d^2A}{dx^2}+z\dfrac{d^2A}{dx\,dy}+\dfrac{1}{z}\,\dfrac{d.A\gamma}{dx}+\dfrac{d.A\gamma}{dy}-\dfrac{1}{z}\,\dfrac{d.A\mu}{dx}=0,\\ z\dfrac{d^2A}{dx\,dz}+\dfrac{d.A\gamma}{dz}=0.\end{cases}$$

On tirera de la seconde de celles-ci, $A\gamma=\int\frac{dA}{dx}dz-z\frac{dA}{dx}+K$, K étant une fonction arbitraire de x, y; & cette valeur de $A\gamma$ étant substituée dans la première, on aura

$$(c)\ldots\frac{d(K-A\mu)}{dx}+z\frac{dK}{dy}+\int\frac{d^2A}{dx^2}dz+z\int\frac{d^2A}{dx\,dy}dz=0.$$

Cette dernière équation étant différenciée deux fois pour faire disparoître les deux signes d'intégration, donne

$$(d)\ldots\frac{d^2A}{dx\,dz}+z\frac{d^2A}{dy\,dz}-\frac{d^2.A\mu}{dz^2}+2\frac{dA}{dy}=0;$$

donc

$$z^2\frac{dA}{dy}-z\frac{d.A\mu}{dz}+A\mu=\int\frac{dA}{dx}dz-z\frac{dA}{dx}=A\gamma,$$

si l'on fait $K=0$, & cette autre valeur de $A\gamma$ étant substituée dans la première des équations *(b)*, elle deviendra

$$(e)\ldots\frac{d^2A}{dx^2}+2z\frac{d^2A}{dx\,dy}+z^2\frac{d^2A}{dy^2}-\frac{d^2.A\mu}{dx\,dz}-z\frac{d^2.A\mu}{dy\,dz}+\frac{d.A\mu}{dy}=0.$$

Les équations *(d)* & *(e)* sont celles qu'on trouveroit par les méthodes connues, en supposant que A fût le facteur propre à rendre $dz+\mu\,dx$ une différentielle exacte.

(4.) La proposée étant

$$(B)\ldots\frac{dz}{dx}+z\frac{dz}{dy}+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0,$$

où α, β, γ, sont des fonctions de x, y, seulement; si nous prenons pour y satisfaire

$$(C)\ldots z=e^{\int(\sigma dx-\alpha dy)}\{a-\int e^{-\int(\sigma dx-\alpha dy)}[\gamma dx+(\beta+\sigma).dy]\},$$

nous aurons pour équations de condition,

$$\frac{d\sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dx} = 0, \quad \frac{d(\beta + \sigma)}{dx} - \sigma(\beta + \sigma) = \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma.$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{d^2\beta}{dxdy} - \frac{d^2\gamma}{dy^2} - \frac{d.\alpha\gamma}{dy} - (\beta + \sigma)\frac{d\sigma}{dy} - \sigma\frac{d(\beta + \sigma)}{dy},$$

où l'on mettra pour $\frac{d\sigma}{dy}$ sa valeur $- \frac{d\alpha}{dx}$, & on en tirera

$$\sigma = \frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{d^2\beta}{dxdy} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d.\alpha\gamma}{dy} - \beta\frac{d\alpha}{dx}}{2\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}}.$$

Donc σ étant tel que nous venons de le définir, l'équation *(C)*, qui renferme une constante arbitraire, satisfera à l'équation aux différences partielles *(B)*, toutes les fois que les équations de condition auront lieu en même temps, & sera alors l'intégrale première complète de l'équation différentielle correspondante. Il en faut excepter le cas où $2\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}$ seroit nul, & que nous allons examiner.

(5.) Si je fais $\frac{\beta}{2} + \sigma = \rho$, je changerai les équations de condition du *n.° précédent* en celles-ci,

$$2\frac{d\rho}{dy} = \frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}, \quad (D)\ldots \frac{d\rho}{dx} - \rho^2 = \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx} - \frac{\beta^2}{4};$$

Or ayant tiré de la première la valeur complète de ρ, qui renfermera une fonction arbitraire de x, & l'ayant substituée dans la seconde, on verra aisément que comme celle qui en résultera doit servir à déterminer cette fonction arbitraire, elle ne pourra être vraie à moins que $\frac{d\beta}{dy} - 2\frac{d\alpha}{dx}$ ne soit nul, & qu'on n'ait en même temps $\frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx} - \frac{\beta^2}{4}$ fonction de la seule variable x. Ainsi dans le cas dont il

s'agit, ayant pris pour ρ une fonction de x, qui satisfasse à l'équation *(D)*, on aura pour solution de l'équation *(B)*,

$$z = e^{\int[(\rho - \frac{\epsilon}{2}).dx - \alpha dy]} \{a - \int e^{-\int[(\rho - \frac{\epsilon}{2}).dx - \alpha dy]} [\gamma dx + (\rho + \frac{\epsilon}{2}).dy]\};$$

& cette solution pourra renfermer deux constantes arbitraires, car il suffira d'en ajouter une en intégrant l'équation *(D)*.

(6.) En faisant usage de la méthode de M. de la Grange, dont nous avons parlé plus haut, nous trouverons dans le cas présent l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles: en effet, en nommant b la constante arbitraire qui doit entrer dans la valeur de ρ, & faisant pour simplifier,

$e^{\int(\frac{\epsilon}{2} dx + \alpha dy)} = \alpha'$, $e^{-\int \rho dx} = \rho'$, nous aurons

$$z = \frac{1}{\alpha'\rho'} \{a - \int[\alpha'\rho'(\gamma dx + \frac{\epsilon}{2} dy) - \frac{d\rho'}{dx} \alpha' dy]\},$$

& par conséquent

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{\alpha'\rho'}, \quad \frac{dz}{db} = -\frac{z}{\rho'}\frac{d\rho'}{db} - \frac{1}{\alpha'\rho'}\int[\frac{d\rho'}{db}\alpha'(\gamma dx + \frac{\epsilon}{2} dy) - \frac{d^2\rho'}{dx\,db}\alpha' dy].$$

On mettra ces valeurs dans $\frac{dz}{da} da + \frac{dz}{db} db = 0$, & supposant $a = f:b$, on aura

$$f':b - \alpha' z \frac{d\rho'}{db} - \int[\frac{d\rho'}{db}\alpha'(\gamma dx + \frac{\epsilon}{2} dy) - \frac{d^2\rho'}{dx\,db}\alpha' dy] = 0;$$

cette équation & celle-ci,

$$f:b - \alpha'\rho' z - \int[\alpha'\rho'(\gamma dx + \frac{\epsilon}{2} dy) - \frac{d\rho}{dx}\alpha' dy] = 0,$$

suffiront pour résoudre le Problème.

Pour en donner un exemple bien simple, je supposerai $\alpha = \frac{1}{y}$, $\epsilon = \frac{2}{x}$, $\gamma = \frac{X}{y}$, X étant une fonction de x; alors l'équation *(D)* devient $\frac{d\rho}{dx} - \rho^2 = 0$; qui a pour

intégrale complète $\varrho = -\frac{1}{x+b}$; donc $\varrho' = x + b$; on a auſſi $\alpha' = xy$. Par la ſubſtitution de ces valeurs, les deux équations précédentes deviendront $f' : b = xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx\,dx$, $f : b - b\,(xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx\,dx) = x^2yz + \int Xx^2\,dx$; or comme la première fait voir que b ne peut être qu'une fonction de $xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx\,dx$, & que cela ſuppoſé, le premier membre de la ſeconde n'eſt fonction que de la même quantité; il ſuit de ce qui précède, que l'équation aux différences partielles propoſée, a pour intégrale complète,

$$x^2yz + \int Xx^2\,dx = F : (xyz + \frac{y^2}{2} + \int Xx\,dx).$$

(7.) Soient B & K deux fonctions de x, y, z, & ſuppoſons

$$dB = \frac{dB}{dx}\,dx + \frac{dB}{dy}\,dy + \frac{dB}{dz}\,dz,$$
$$dK = \frac{dK}{dx}\,dx + \frac{dK}{dy}\,dy + \frac{dK}{dz}\,dz:$$

cela poſé, ſi $B + F : K = 0$ eſt l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles du premier ordre, en différenciant cette intégrale deux fois, l'une par rapport à y, l'autre par rapport à x, & en éliminant la fonction arbitraire, on trouvera que l'équation aux différences partielles, à laquelle elle appartient, eſt

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} + \frac{dB}{dz}\left(\frac{dK}{dx}\frac{dz}{dy} - \frac{dK}{dy}\frac{dz}{dx}\right)$$
$$- \frac{dK}{dz}\left(\frac{dB}{dx}\frac{dz}{dy} - \frac{dB}{dy}\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Nous avons pour objet de trouver quelques cas d'intégrabilité de $\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \mu = 0$; or ſi l'ayant multipliée

par un facteur ψ, on la compare à la précédente, on aura les trois équations

$$\frac{dK}{dz}\,\frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dz}\,\frac{dK}{dy} = \psi,$$

$$\frac{dB}{dz}\,\frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz}\,\frac{dB}{dx} = \psi z,$$

$$\frac{dK}{dx}\,\frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy}\,\frac{dB}{dx} = \psi \mu;$$

& en éliminant ψ, celles que voici,

$$\Gamma \ldots \frac{dK}{dz}\left(\frac{dB}{dx} + z\,\frac{dB}{dy}\right) - \frac{dB}{dz}\left(\frac{dK}{dx} + z\,\frac{dK}{dy}\right) = 0,$$

$$\Delta \ldots \frac{dK}{dy}\left(\frac{dB}{dx} - \mu\,\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dy}\left(\frac{dK}{dx} - \mu\,\frac{dK}{dz}\right) = 0.$$

(8.) Si pour satisfaire à ces équations, je fais $B = mz + n$, $K = Mz + N$, m, n, M, N étant des fonctions inconnues de x, y; l'équation (Γ) deviendra

$$M\left[\frac{dm}{dy}\,z^2 + \left(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}\right).\,z + \frac{dn}{dx}\right]$$
$$- m\left[\frac{dM}{dy}\,z^2 + \left(\frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx}\right).\,z + \frac{dN}{dx}\right] = 0,$$

& donnera nécessairement

$$M\,\frac{dm}{dy} - m\,\frac{dM}{dy} = 0,$$

$$M.\left(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}\right) - m.\left(\frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$M\,\frac{dn}{dx} - m\,\frac{dN}{dx} = 0.$$

Il sera facile de tirer de la première $m = M\varphi\,1 : x$, & cette valeur étant substituée dans les deux autres, les changera en celles-ci,

$$\frac{dn}{dy} - \varphi\,1 : x\,\frac{dN}{dy} + M\varphi'\,1 : x = 0,$$

$$\frac{dn}{dx} - \varphi\,1 : x\,\frac{dN}{dx} = 0.$$

Si

Si nous convenons de nous servir de $\dot{m}\dot{M}$ pour repréſenter $\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy}$, & ainſi des autres quantités ſemblables, nous tirerons de l'équation (Δ),

$$-\mu M^2 \varphi' 1 : x = \dot{m}\dot{M}z^2 + (\dot{m}\dot{N} + \dot{n}\dot{M})z + \dot{n}\dot{N};$$

nous pourrons donc ſuppoſer μ de cette forme $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$, α, β, γ étant des fonctions de x, y, & nous aurons les trois équations

$$\dot{m}\dot{M} = -\alpha M^2 \varphi' 1 : x, \quad \dot{m}\dot{N} + \dot{n}\dot{M} = -\beta M^2 \varphi' 1 : x;$$
$$\dot{n}\dot{N} = -\gamma M^2 \varphi' 1 : x,$$

que nous changerons facilement en celles-ci,

$$\frac{dM}{dy} = \alpha M, \quad \frac{dN}{dy} = \beta M - \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dN}{dx} = \gamma M;$$

on en tirera

$$M = e^{\int \alpha dy} f 1 : x, N = f 2 : x + \int e^{\int \alpha dy} [(\beta - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) . f 1 : x - f' 1 : x] dy;$$

& par conſéquent $\quad m = e^{\int \alpha dy} f 1 : x \varphi 1 : x,$

$$n = \varphi 2 : x + \int e^{\int \alpha dy} [(\beta - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) . f 1 : x \varphi 1 : x - \frac{d . \varphi 1 : x f 1 : x}{dx}] dy;$$

on aura de plus pour équations de condition,

$$\frac{dN}{dx} = e^{\int \alpha dy} \gamma f 1 : x, \quad \frac{dn}{dx} = e^{\int \alpha dy} \gamma f 1 : x \varphi 1 : x.$$

En ſubſtituant dans la première pour N ſa valeur, on en tirera

$$\frac{f' 2 : x}{f 1 : x} = e^{\int \alpha dy} \gamma - \int e^{\int \alpha dy} [(\beta - 2\int \frac{d\alpha}{dx} dy) . \frac{f' 1 : x}{f 1 : x}$$
$$- \frac{f'' 1 : x}{f 1 : x} + \frac{d\beta}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} dy + \int \frac{d\alpha}{dx} dy . (\beta - \int \frac{d\alpha}{dx} dy)] dy;$$

dont le ſecond membre ne doit pas renfermer y; en la différenciant par rapport à y, on aura l'équation

$$\frac{f''1:x}{f1:x} - (\mathcal{C} - 2\int\frac{d\alpha}{dx}dy) \ldots (x1)\frac{f'1:x}{f1:x} = (X) \ldots$$

$$\ldots \frac{d\mathcal{C}}{dx} - \int\frac{d^2\alpha}{dx^2}dy + \int\frac{d\alpha}{dx}dy.(\mathcal{C} - \int\frac{d\alpha}{dx}dy) - \frac{d\gamma}{dy} - \alpha\gamma,$$

qui donne pour conditions d'intégrabilité que $x1$ & X, ne doivent renfermer de variable que x. Dans ce cas, la même équation donnera la valeur de $f1:x$, & on tirera de celle qui précède $\frac{f'2:x}{f1:x} = e^{\int\alpha\, dy}\gamma - \int e^{\int\alpha\, dy}(\frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma)dy$, dont le ſecond membre eſt évidemment une fonction de x ſeul.

On mettra dans la ſeconde pour n ſa valeur, & on en tirera

$$\frac{\varphi'2:x}{f1:x\varphi1:x} = e^{\int\alpha\, dy}\gamma - \int e^{\int\alpha\, dy}(\frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma)\,dy,$$

$$\frac{d^2.f1:x\varphi1:x}{dx^2.f1:x\varphi1:x} - x1\frac{d.f1:x\varphi1:x}{dx.f1:x\varphi1:x} = X,$$

c'eſt-à-dire que le Problème eſt réduit à trouver deux valeurs de l'inconnue d'une équation linéaire du ſecond ordre.

Autrement, des équations $\frac{dn}{dy} = \frac{dN}{dy}\varphi1:x - M\varphi'1:x$, $\frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dx}\varphi1:x$, on tirera, en différenciant la première par rapport à x, & l'autre par rapport à y,

$$(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx})\varphi'1:x - M\varphi''1:x = 0,$$

ou $$\frac{\varphi''1:x}{\varphi'1:x} = x1 - \frac{2f'1:x}{f1:x},$$

qui donnera $\varphi1:x$ lorſqu'on connoîtra $f1:x$, au moyen de l'équation linéaire dont il vient d'être queſtion; on aura enſuite $\varphi'2x = \varphi1:xf'2:x$; ainſi tout ſera déterminé dans l'intégrale complète $mz + n + F:(Mz + N) = 0$.

(9.) Si l'on prend $B + F:K, q = 0$, où B & K ſont fonctions de $x, y, \frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = z'$, & q fonction de x, y, z, pour repréſenter l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles; on trouvera cette équation en différenciant l'intégrale ſucceſſivement par rapport à chacune des trois variables x, y, z. Ayant donc ſuppoſé

$$dB = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dz}dz + \frac{dB}{dz'}dz',$$

$$dK = \frac{dK}{dx}dx + \frac{dK}{dy}dy + \frac{dK}{dz}dz + \frac{dK}{dz'}dz';$$

$dF:K, q = (\Pi dK + \pi\Pi dq) F':K, q$, Π & π étant des fonctions de K, q, on aura les trois équations

$$\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz'}\frac{dz'}{dx} + [\Pi.(\frac{dK}{dx} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dx}) + \pi\Pi\frac{dq}{dx}]F':K, q = 0,$$

$$\frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz'}\frac{dz'}{dy} + [\Pi.(\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dy}) + \pi\Pi\frac{dq}{dy}]F':K, q = 0,$$

$$\frac{dB}{dz} + \frac{dB}{dz'}\frac{dz'}{dz} + [\Pi.(\frac{dK}{dz} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dz}) + \pi\Pi\frac{dq}{dz}]F':K, q = 0.$$

Je fais $\dfrac{\frac{dK}{dz} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dz}}{\frac{dK}{dx} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dx}} = r$, & après avoir multiplié la première par r, je l'ôte de la troiſième, ce qui donne

$$\frac{dB}{dz} - r\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz'}(\frac{dz'}{dz} - r\frac{dz'}{dx}) + \pi\Pi(\frac{dq}{dz} - r\frac{dq}{dx})F':K, q = 0;$$

de celle-ci, j'ôte la ſeconde après l'avoir multipliée par $\frac{dq}{dz}:\frac{dq}{dy} = s$, & il vient

$$\frac{dB}{dz} - r\frac{dB}{dx} - s\frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz'}(\frac{dz'}{dz} - r\frac{dz'}{dx} - s\frac{dz'}{dy})$$
$$- [\pi\Pi r\frac{dq}{dx} + \Pi s.(\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dy})]F':K, q = 0.$$

Mais cette dernière équation ne doit pas renfermer de fonction arbitraire; de plus, π ne doit prendre aucune valeur, on a donc néceſſairement $\frac{dq}{dx} = 0$, & $\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dy} = 0$; de cette manière on la réduit à

$$\left(\frac{dB}{dz'}\frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz'}\frac{dB}{dx}\right)\frac{dz'}{dz} + \left[\frac{dK}{dz'}\cdot\left(\frac{dB}{dz} - s\frac{dB}{dy}\right) - \frac{dB}{dz'}\cdot\left(\frac{dK}{dz} - s\frac{dK}{dy}\right)\right]\frac{dz'}{dx}$$
$$+ \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz} - s\frac{dK}{dx}\left(\frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz'} : \frac{dK}{dz'}\right) = 0,$$

où s n'eſt fonction que de y, z, laquelle étant connue, on trouvera q en rendant exacte la différentielle $dy + s\,dz$.

Maintenant, ſoit l'équation différentielle du troiſième ordre $\frac{1}{dx}dz' + \mu = 0$, qu'on changera en une équation aux différences partielles $\frac{dz'}{dx} + z\frac{dz'}{dy} + z'\frac{dz'}{dz} + \mu = 0$, qui devient par l'élimination de $\frac{dz'}{dy}$, $\frac{dz'}{dx} + z'\frac{dz'}{dz} + \mu - z\frac{dK}{dy} : \frac{dK}{dz'} = 0$. Après l'avoir multipliée par un facteur ψ, on la comparera à l'équation que nous venons de trouver, & on aura

$$\psi = \frac{dK}{dz'}\cdot\left(\frac{dB}{dz} - s\frac{dB}{dy}\right) - \frac{dB}{dz'}\cdot\left(\frac{dK}{dz} - s\frac{dK}{dy}\right),\ \psi z' = \frac{dB}{dz'}\frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz'}\frac{dB}{dx},$$
$$\psi\mu = \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz} - s\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dy} + \frac{dK}{dy}\left(\psi z + s\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dz'}\right) : \frac{dK}{dz'};$$

d'où l'on tirera, en éliminant ψ,

$$(\Gamma')\ldots\frac{dB}{dz'}\left[\frac{dK}{dx} + z'\cdot\left(\frac{dK}{dz} - s\frac{dK}{dy}\right)\right] - \frac{dK}{dz'}\left[\frac{dB}{dx} + z'\cdot\left(\frac{dB}{dz} - s\frac{dB}{dy}\right)\right] = 0,$$

$$(\Delta')\ldots\mu\left(\frac{dB}{dz'}\frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz'}\frac{dB}{dx}\right) = z'\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz} - s\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx}\right)$$
$$- z\frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} + (z + sz')\frac{dK}{dx}\frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz'} : \frac{dK}{dz'}.$$

(10.) Pour ſatisfaire à ces équations, je ſuppoſerai $B = mz' + n$, $K = Mz' + N$, m, n, M, N étant

des fonctions inconnues de x, y, z; de cette manière je tirerai de l'équation (Γ'),

$$m\frac{dN}{dx}-M\frac{dn}{dx}=0,\; m\frac{dM}{dx}-M\frac{dm}{dx}+m\frac{dN}{dz}-M\frac{dn}{dz}$$
$$-s\left(m\frac{dN}{dy}-M\frac{dn}{dy}\right)=0,\, m\frac{dM}{dz}-M\frac{dm}{dz}-s\left(m\frac{dM}{dy}-M\frac{dm}{dy}\right)=0.$$

La troisième de celles qui précèdent n'étant autre que $\frac{d(M:m)}{dz}-s\frac{d(M:m)}{dy}=0$, elle donne $m=M\varphi:q,x$, & par conséquent

$$m\frac{dM}{dx}-M\frac{dm}{dx}=-M^2\frac{d\varphi:q,x}{dx},\; m\frac{dM}{dy}-M\frac{dm}{dy}=-M^2\frac{d\varphi:q,x}{dy};$$

alors les deux autres deviendront

$$(1)\ldots\ldots\frac{dn}{dx}-\frac{dN}{dx}\varphi:q,x=0,$$

$$(2)\ldots M\frac{d\varphi:q,x}{dx}+\frac{dn}{dz}-s\frac{dn}{dy}-\left(\frac{dN}{dz}-s\frac{dN}{dy}\right)\varphi:q,x=0.$$

De plus, à cause de $\frac{d\varphi:q,x}{dz}-s\frac{d\varphi:q,x}{dy}=0$, l'équation (Δ'), par les substitutions précédentes, sera changée en celle-ci,

$$\mu M=\frac{dM}{dz}z'^2+\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dz}+z\frac{dM}{dy}\right)z'+\frac{dN}{dx}+z\frac{dN}{dy};$$

on pourra donc supposer μ de cette forme $\alpha z'^2+\beta z'+\gamma$, α, β, γ étant des fonctions connues de x, y, z, & on aura

$$\frac{dM}{dz}=\alpha M,\; \frac{dN}{dz}=\beta M-\frac{dM}{dx}-z\frac{dM}{dy},\; \frac{dN}{dx}+z\frac{dN}{dy}=\gamma M.$$

Je ferai usage de la caractéristique ∂ pour désigner une différentielle prise par rapport aux seules variables x, y, & je remarquerai que P étant une fonction quelconque, $\frac{\partial\int P\,dz}{dx}=\int\frac{\partial P}{dx}dz+\int\int\frac{dP}{dy}dz\cdot dz$. Cela posé, il sera facile de tirer des équations précédentes,

$$M = e^{\int\alpha dz} f1:x,y,\ N = f2:x,y + \int e^{\int\alpha dz}\left(\beta - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}\right)dz . f1:x,y - \frac{\partial f1:x,y}{dx}\int e^{\int\alpha dz}dz + \frac{df1:x,y}{dy}\int\int e^{\int\alpha dz}dz.dz,$$

&

$$\frac{\partial f2:x,y}{dx} = \left\{\gamma e^{\int\alpha dz} - \int e^{\int\alpha dz}\left[\frac{\partial\beta}{dx} - \frac{\partial^2\int\alpha dz}{dx^2} + \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}.\left(\beta - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}\right)\right]dz\right\}f1:x,y$$

$$-\int\int e^{\int\alpha dz}\left\{\left[\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\frac{\partial\int\alpha dz}{dx}}{dy} + \frac{d\int\alpha dz}{dy}.\left(\beta - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}\right)\right]f1:x,y + \frac{df1:x,y}{dy}\int\frac{d\alpha}{dx}dz - \frac{df1:x,y}{dx}\int\frac{d\alpha}{dy}dz\right\}dz.dz$$

$$-\frac{\partial f1:x,y}{dx}\int e^{\int\alpha dz}\left(\beta - \frac{2\partial\int\alpha dz}{dx}\right)dz + \frac{\partial^2 f1:x,y}{dx^2}\int e^{\int\alpha dz}dz$$

$$-\frac{d\frac{\partial f1:x,y}{dx}}{dy}\int\int e^{\int\alpha dz}dz.dz.$$

Celle-ci différenciée deux fois, en ne faisant varier que z, donne d'abord

$$\frac{df2:x,y}{dy} = e^{\int\alpha dz}\left\{\left[\frac{d\gamma}{dz} + \alpha\gamma - \frac{d\beta}{dx} + \frac{\partial^2\int\alpha dz}{dx^2} - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}.\left(\beta - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}\right)\right] \ldots\right.$$

$$\left.\ldots(H)f1:x,y - \left(\beta - \frac{2\partial\int\alpha dz}{dx}\right)\ldots(I)\frac{\partial f1:x,y}{dx} + \frac{\partial^2 f1:x,y}{dx^2}\right\}$$

$$-\int e^{\int\alpha dz}\left\{\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\frac{\partial\int\alpha dz}{dx}}{dy} + \frac{d\int\alpha dz}{dy}.\left(\beta - \frac{\partial\int\alpha dz}{dx}\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots(h)f1:x,y + \left(1 + \int\frac{d\alpha}{dx}dz\right)\frac{df1:x,y}{dy} - \frac{df1:x,y}{dx}\int\frac{d\alpha}{dy}dz\right\}dz$$

$$+\frac{d\frac{\partial f1:x,y}{dx}}{dy}\int e^{\int\alpha dz}dz - \frac{d^2 f1:x,y}{dy}\int\int e^{\int\alpha dz}dz.dz,$$

&

$$\left(\frac{dH}{dz} + \alpha H - h\right)f1:x,y - \left(\frac{dI}{dz} + \alpha I - \int\frac{d\alpha}{dy}dz\right)\frac{df1:x,y}{dx}$$

$$-\left[2I + \int\frac{d\alpha}{dx}dz + z.\left(\frac{dI}{dz} + \alpha I\right)\right]\frac{df1:x,y}{dy} + \alpha\frac{\partial^2 f1:x,y}{dx^2}$$

$$+3\frac{d\frac{\partial f1:x,y}{dx}}{dy} = 0.$$

qui renferme les conditions d'intégrabilité qui doivent avoir lieu dans l'hypothèſe actuelle.

(11.) Prenons pour exemple le cas où $\alpha = 0$, $\beta = \delta z + \varepsilon$, $\gamma = \pi z^3 + \rho z^2 + \sigma z + \tau$, tous ces coëfficiens étant des fonctions de x, y; alors l'équation précédente devient $3z\left(2\pi f1:x,y - \frac{d.\delta f1:x,y}{dy} + \frac{d^2 f1:x,y}{dy^2}\right)$ $+ 2\rho f1:x,y - \frac{d.\delta f1:x,y}{dx} - 2\frac{d.\varepsilon f1:x,y}{dy} + 3\frac{d^2 f1:x,y}{dx\,dy} = 0$; d'où l'on tirera deux équations, dont la première $\frac{d^2 f1:x,y}{dy^2}$ $- \frac{d.\delta f1:x,y}{dy} + 2\pi f1:x,y = 0$, aura pour intégrale complète $f1:x,y = x1\,K1 + x2\,K2$, $x1$ & $x2$ étant des fonctions arbitraires de x, ſi par $K1$ & $K2$ on entend deux valeurs de $f1:x,y$ qui ſatisfaſſent à cette équation, en regardant x comme conſtant. On mettra dans l'autre $x1\,K1$ pour $f1:x,y$; ce qui la changera en celle-ci,

$$\frac{x'1}{x1} = (\psi 1)\ldots \frac{3\frac{d^2 K1}{dx\,dy} - 2\frac{d.\varepsilon K1}{dy} - \frac{d.\delta K1}{dx} + 2\rho K1}{\delta K1 - 3\frac{dK1}{dy}}.$$

On aura de plus $\frac{df2:x,y}{dy} = \sigma f1:x,y - \frac{d.\varepsilon f1:x,y}{dx}$ $+ \frac{d^2 f1:x,y}{dx^2}$, $\frac{df2:x,y}{dx} = \tau f1:x,y$, dont la première donnera

$$f2:x,y = X1 + \int\left(\sigma f1:x,y - \frac{d.\varepsilon f1:x,y}{\partial x} + \frac{d^2 f1:x,y}{dx^2}\right)dy;$$

& comme cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde, il en réſulte que

$$X'1 = \tau f1:x,y - \int\left(\frac{d.\sigma f:x,y}{dx} - \frac{d^2.\varepsilon f1:x,y}{dx^2} + \frac{d^3 f1:x,y}{dx^3}\right)dy,$$

il eſt donc néceſſaire que ce ſecond membre différencié, en

ne faisant varier que y, soit égal zéro, ou que l'on ait

$$\frac{d.\tau f1:x,y}{dy} - \frac{d.\sigma f1:x,y}{dx} + \frac{d^2.\epsilon f1:x,y}{dx^2} - \frac{d^3 f1:x,y}{dx^3} = 0.$$

On mettra dans cette équation $x\,1\,K\,1$ pour $f\,1:x,y$, & on aura

$$x\,1\left(\frac{d^3 K1}{dx^3} - \frac{d^2.\epsilon K1}{dx^2} + \frac{d.\sigma K1}{dx} - \frac{d.\tau K1}{dy}\right) + x'\,1\left(3\frac{d^2 K1}{dx^2} - 2\frac{d.\epsilon K1}{dx} + \sigma K1\right)$$
$$+ x''\,1\left(3\frac{dK1}{dx} - \epsilon K1\right) + x'''\,1\,K1 = 0.$$

Il faudra donc que $\psi\,1$ & que les coëfficiens de $x\,1$, $x'\,1$, $x''\,1$, dans l'équation précédente, divisés par $K\,1$, soient chacun fonction de x seul; ce sont-là les conditions d'intégrabilité pour le cas présent.

(12.) Je reviens au cas plus général (*n.° 10*), & je remarque qu'on tirera de l'équation (2)

$$n = \varphi 2:q,x + \int\left[\left(\frac{dN}{dz} - s\frac{dN}{dy}\right).\varphi 1:q,x - M\frac{d.\varphi 1:q,x}{dx}\right]dz.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), elle deviendra

$$\frac{d\varphi 2:q,x}{dx} = \frac{dN}{dx}\varphi 1:q,x - \int\left[\left(\frac{d^2 N}{dx\,dz} - s\frac{d^2 N}{dx\,dy}\right).\varphi 1:q,x\right.$$
$$\left. + \left(\frac{dN}{dz} - s\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right).\frac{d\varphi 1:q,x}{dx} - M\frac{d^2\varphi 1:q,x}{dx^2}\right]dz,$$

dont le second membre ne devra plus renfermer z, sitôt qu'on en aura éliminé y, au moyen de $\int r(dy + s\,dz) = q$, où r est le facteur propre à rendre $dy + s\,dz$ une différentielle exacte; il faudra encore que l'équation qui résultera ne renferme pas de nouvelles conditions.

Je regarderai y comme une fonction de q, x, z, & différenciant par rapport à z, j'aurai,

$$\left(\frac{dy}{dz} + s\right)\frac{d^2 N}{dx\,dy}\varphi 1:q,x + \left(\frac{dN}{dz} - s\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx}\right)\frac{d\varphi 1:q,x}{dx}$$
$$- M\frac{d^2\varphi 1:q,x}{dx^2} = 0;$$

à laquelle

à laquelle on satisfera bien simplement, en supposant $s = \frac{y}{z}$, ce qui donne $q = yz$, $\frac{dy}{dz} = \frac{-q}{z^2}$ & $\frac{dy}{dz} + s = 0$; car alors on pourra prendre $\varphi 1 : q, x = 1$.

(13.) On peut considérer l'équation $\frac{1}{dx} dz^1 + \mu = 0$, sous un autre point de vue, & la regarder comme une équation du second ordre, dont la variable principale ne renferme que x & y. En effet, on peut lui donner cette forme,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2z \frac{d^2 z}{dx\,dy} + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \mu = 0.$$

Si l'on suppose que celle-ci ait pour intégrale complète de l'ordre immédiatement inférieur $B + F : K = 0$, on aura la transformée

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} &+ \left(\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz}\right)\frac{dz}{dx} \\ &+ \left(\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz}\right)\frac{dz}{dy} + \left[\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz'} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz'} + \frac{dz}{dy}.\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dz'} - \frac{dK}{dz}\frac{dB}{dz'}\right)\right]\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right. \\ &\left.+ z\frac{d^2 z}{dx\,dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right) + \left[\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz'}\right. \\ &\left.+ \frac{dz}{dx}\left(\frac{dK}{dz}\frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dz'}\right)\right]\left[\frac{d^2 z}{dx\,dy} + z\frac{d^2 z}{dy^2}\right. \\ &\left.+ \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] = 0,\end{aligned}$$

à laquelle on comparera la proposée, après l'avoir multipliée par un facteur ψ, & on en tirera

$$\psi = \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz'} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz'} + \frac{dz}{dy}.\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dz'} - \frac{dK}{dz}\frac{dB}{dz'}\right),$$

$$\psi z = \frac{dK}{dx}\frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz'} + \frac{dz}{dx}.\left(\frac{dK}{dz}\frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dz'}\right),$$

$$\begin{aligned}\psi\mu = \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} &+ \frac{dz}{dx}.\left(\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz}\right) \\ &+ \frac{dz}{dy}.\left(\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dz}\right);\end{aligned}$$

ou bien, en éliminant ψ,

$$(\Gamma')\ldots\ldots \frac{dK}{dz'}\left(\frac{dB}{dx}+z\frac{dB}{dy}\right)-\frac{dB}{dz'}\left(\frac{dK}{dx}+z\frac{dK}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{dz}{dx}+z\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dB}{dz}\frac{dK}{dz'}-\frac{dK}{dz}\frac{dB}{dz'}\right)=0,$$

$$(\Delta')\ldots\ldots\left(\frac{dB}{dx}-\mu\frac{dB}{dz'}\right)\left(\frac{dK}{dy}+\frac{dK}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$-\left(\frac{dK}{dx}-\mu\frac{dK}{dz'}\right)\left(\frac{dB}{dy}+\frac{dB}{dz}\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+\frac{dz}{dx}\left(\frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz}-\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz}\right)=0.$$

(14.) Soit $B=mz'+n$, $K=Mz'+N$, m, n, M, N étant des fonctions de x, y, z; on tirera de l'équation (Γ')

$$M\frac{dm}{dz}-m\frac{dM}{dz}=0,$$

$$M\frac{dn}{dz}-m\frac{dN}{dz}+z\left(M\frac{dm}{dy}-m\frac{dM}{dy}\right)+M\frac{dm}{dx}$$
$$-m\frac{dM}{dx}=0,$$

$$M\frac{dn}{dx}-m\frac{dN}{dx}+z\left(M\frac{dn}{dy}-m\frac{dN}{dy}\right)=0.$$

La première donne $m=M\varphi 1:x,y$; donc

$$M\frac{dm}{dy}-m\frac{dM}{dy}=M^2\frac{d\varphi 1:x,y}{dy},$$
$$M\frac{dm}{dx}-m\frac{dM}{dx}=M^2\frac{d\varphi 1:x,y}{dx},$$

& les deux autres deviendront

$$\frac{dn}{dz}=\frac{dN}{dz}\varphi 1:x,y-M\left(\frac{d\varphi 1:x,y}{dx}+z\frac{d\varphi 1:x,y}{dy}\right);$$
$$\frac{dn}{dx}+z\frac{dn}{dy}=\left(\frac{dN}{dx}+z\frac{dN}{dy}\right)\varphi 1:x,y.$$

Occupons-nous maintenant de l'équation (Δ'), qu'il ſera facile de transformer comme il ſuit, en adoptant la caractériſtique ∂ avec la ſignification que nous lui avons donnée ci-deſſus, & en faiſant pour ſimplifier

$$\frac{dn}{dy} - \frac{dN}{dy}\,\varphi 1 : x, y = n1,$$

$$\frac{dn}{dx} - \frac{dN}{dx}\,\varphi 1 : x, y = n2,$$

$$\frac{dM}{dy}\,\frac{d\varphi 1 : x, y}{dx} - \frac{dM}{dx}\,\frac{d\varphi 1 : x, y}{dy} = \dot{M}\varphi 1 : x, y,$$

& ainſi des autres quantités ſemblables ; il ſera, dis-je, facile de la transformer en

$$\begin{aligned}\mu\Big[M.\Big(\frac{dz}{dy}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dx} - \frac{dz}{dx}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dy}\Big) - n1\Big] = {} & \frac{dM}{dz}z'^2\Big(\frac{dz}{dy}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dx} - \frac{dz}{dx}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dy}\Big)\\ & + z'\frac{dz}{dx}\Big(\dot{M}\dot{\varphi} 1 : x,y - \frac{n1}{M}\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dz}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dy} - \frac{dM}{dy}\frac{\partial\varphi 1 : x,y}{dx}\Big)\\ & + z'\frac{dz}{dy}\Big(z\dot{M}\dot{\varphi} 1 : x,y + \frac{n2}{M}\frac{dM}{dz} + \frac{dN}{dz}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dx} + \frac{dM}{dx}\frac{\partial\varphi 1 : x,y}{dx}\Big)\\ & + \frac{dz}{dx}\Big(\frac{n2}{M}\frac{dM}{dy} - \frac{n1}{M}\frac{dM}{dx} + \dot{N}\dot{\varphi} : 1\,x,y - \frac{n1}{M}\frac{dN}{dz} - \frac{dN}{dy}\frac{\partial\varphi 1 : x,y}{dx}\Big)\\ & + \frac{dz}{dy}\Big(\frac{zn2}{M}\frac{dM}{dy} - \frac{zn1}{M}\frac{dM}{dx} + z\ddot{N}\varphi : 1\,x,y + \frac{n2}{M}\frac{dN}{dz} + \frac{dN}{dx}\frac{\partial\varphi 1 : x,y}{dx}\Big)\\ & + \frac{\dddot{N}n}{M}.\end{aligned}$$

Cela poſé, ſi l'on prend $\mu = \alpha z'^2 + \beta z' + \gamma$, α, β, γ étant des fonctions de x, y, z, & que l'on faſſe cette ſubſtitution dans le premier membre de l'équation précédente, qui deviendra par-là

$$\begin{aligned}\alpha M z'^2\Big(\frac{dz}{dy}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dx} - \frac{dz}{dx}\frac{d\varphi 1 : x,y}{dy}\Big) & - z'\frac{dz}{dx}\Big(\alpha n1 + \beta M\frac{d\varphi 1 x,y}{dy}\Big)\\ - z'\frac{dz}{dx}\Big(\alpha z n1 - \beta M\frac{d\varphi 1 : x,y}{dx}\Big) & - \frac{dz}{dx}\Big(\beta n1 + \gamma M\frac{d\varphi 1 : x,y}{dy}\Big)\\ - \frac{dz}{dy}\Big(\beta z n1 - \gamma M\frac{d\varphi 1 . x,y}{dx}\Big) & - \gamma n1,\end{aligned}$$

on en tirera, par la comparaison des termes homologues,

$$\frac{dM}{dz} = \alpha M, \quad \frac{dN}{dz} = \beta M - \frac{\partial M}{dx}, \ \& \ \frac{\partial N}{dx} = \gamma M.$$

Donc $$M = e^{\int \alpha dz} f1 : x, y,$$

$$N = f2 : x, y + f1 : x, y \int e^{\int \alpha dz} \left(\beta - \frac{\partial \int \alpha dz}{dx}\right) dz$$
$$- \frac{\partial f1 : x, y}{dx} \int e^{\int \alpha dz} dz + \frac{df1 : x, y}{dy} \int\int e^{\int \alpha dz} dz \cdot dz,$$

$$m = e^{\int \alpha dz} \varphi 1 : x, y\, f1 : x, y,$$

$$n = \varphi 2 : x, y + \varphi 1 : x, y\, f1 : x, y \int e^{\int \alpha dz} \left(\beta - \frac{\partial \int \alpha dz}{dx}\right) dz$$
$$- \frac{\partial . \varphi 1 : x, y\, f1 : x, y}{dx} \int e^{\int \alpha dz} dz + \frac{d . \varphi 1 : x, y\, f1 : x, y}{dy} \int\int e^{\int \alpha dz} dz . dz.$$

On aura de plus les deux équations

$$\frac{\partial N}{dx} = e^{\int \alpha dz} \gamma f1 : x, y, \quad \frac{\partial n}{dx} = e^{\int \alpha dz} \gamma f1 : x, y\, \varphi 1 : x, y;$$

qui serviront à déterminer les fonctions $\varphi 1$, $\varphi 2$, $f1$, $f2$; & à trouver les conditions d'intégrabilité. Ces conditions seront les mêmes que ci-dessus; & pour le cas dont il s'agit *n.° 11*, ayant deux valeurs de $x1$ qui satisfassent aux équations qui renferment cette quantité, si on nomme $M1$, $N1$ & $M2$, $N2$ ce que deviendront M, N par les substitutions successives de ces deux valeurs, on trouvera pour l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du second ordre,

$$M1\, z' + N1 + F : (M2\, z' + N2) = 0.$$

(15.) Si l'on fait $\frac{1}{dx} d z' = z''$, & qu'on représente par $B + F : K = 0$, l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du troisième ordre,

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + 3z \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 3z^2 \frac{d^3 z}{dx dy^2} + z^3 \frac{d^3 z}{dy^3}$$
$$+ 3z' \left(\frac{d^2 z}{dx dy} + z \frac{d^2 z}{dy^2}\right) + z'' \frac{dz}{dy} + \mu = 0;$$

B & K seront donnés par les deux équations

$$(\Gamma'') \ldots\ldots \frac{dK}{dz''}\left(\frac{dB}{dx} + z\frac{dB}{dy} + z'\frac{dB}{dz} + z''\frac{dB}{dz'}\right)$$
$$- \frac{dB}{dz''}\left(\frac{dK}{dx} + z\frac{dK}{dy} + z'\frac{dK}{dz} + z''\frac{dK}{dz'}\right) = 0;$$

$$(\Delta'') \ldots \left(\frac{dB}{dx} - \mu\frac{dB}{dz''}\right)\left(\frac{dK}{dy} + \frac{dK}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dK}{dz'}\frac{dz'}{dy}\right)$$
$$- \left(\frac{dK}{dx} - \mu\frac{dK}{dz''}\right)\left(\frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dB}{dz'}\frac{dz'}{dy}\right)$$
$$+ \frac{dz}{dx}\left(\frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz}\right) + \frac{dz'}{dx}\left(\frac{dK}{dy}\frac{dB}{dz'} - \frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz'}\right)$$
$$+ \left(\frac{dB}{dz'}\frac{dK}{dz} - \frac{dK}{dz'}\frac{dB}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\frac{dz'}{dx} - \frac{dz}{dx}\frac{dz'}{dy}\right) = 0.$$

Soit $B = mz'' + n$, $K = Mz'' + N$, m, n, M, N étant des fonctions de x, y, z'; on tirera de l'équation (Γ''),

$$M\frac{dm}{dz'} - m\frac{dM}{dz'} = 0,$$

$$M\frac{dn}{dz'} - m\frac{dN}{dz'} + z'\left(M\frac{dm}{dz} - m\frac{dM}{dz}\right) + z\left(M\frac{dm}{dy} - m\frac{dM}{dy}\right)$$
$$+ M\frac{dm}{dx} - m\frac{dM}{dx} = 0,$$

$$M\frac{dn}{dx} - m\frac{dN}{dx} + z\left(M\frac{dn}{dy} - m\frac{dN}{dy}\right) + z'\left(M\frac{dn}{dz} - m\frac{dN}{dz}\right) = 0.$$

La première donne $m = M\varphi\,1 : x, y, z$; & par cette substitution, les deux autres deviennent

$$\frac{dn}{dz'} - \frac{dN}{dz'}\varphi\,1 : x, y, z + M\left(\frac{d\varphi\,1 : x,y,z}{dx} + z\frac{d\varphi\,1 : x,y,z}{dy} + z'\frac{d\varphi\,1 : x,y,z}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{dn}{dx} - \frac{dN}{dx}\varphi\,1 : x,y,z + z\left(\frac{dn}{dy} - \frac{dN}{dy}\varphi\,1 : x.y,z\right) + z'\left(\frac{d}{dz} - \frac{dN}{dz}\varphi\,1 : x,y,z\right) = 0.$$

On transformera l'équation (Δ'') en celle-ci,

$$\mu\left\{M\left[\frac{dz'}{dy}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dx}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dx}\right)-\frac{dz'}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dy}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right]-n1\right\}$$

$$=z''^2\frac{dM}{dz'}\left[\frac{dz'}{dy}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dx}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dx}\right)-\frac{dz'}{dx}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dy}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right]$$

$$+z''\frac{dz'}{dx}\left[\dot{M}\varphi 1:x,y,z-\frac{n1}{M}\frac{dM}{dz'}-\frac{dN}{dz'}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dy}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi 1:x,y,z}{dx}\cdot\left(\frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right]+z''\frac{dz'}{dy}\left[z\dot{M}\varphi 1:x,y,z+\frac{n2}{M}\frac{dM}{dz'}\right.$$

$$\left.+\frac{dN}{dz'}\cdot\left(\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dx}+\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{\partial\varphi 1:x,y,z}{dx}\cdot\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\right]$$

$$+\frac{dz'}{dx}\left[\frac{n2}{M}\frac{dM}{dy}-\frac{n1}{M}\frac{dM}{dx}+\dot{N}\varphi 1:x,y,z+\frac{n3}{M}\frac{dM}{dz}-\frac{n1}{M}\frac{dN}{dz'}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi 1:x,y,z}{dx}\cdot\left(\frac{dN}{dy}+\frac{dN}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)\right]+\frac{dz'}{dy}\left[\frac{n2}{M}\frac{dM}{dy}z-\frac{n1}{M}\frac{dM}{dx}z\right.$$

$$+z\dot{N}\varphi 1:x,y,z+\frac{n3}{M}\frac{dM}{dz}z+\frac{n2}{M}\frac{dN}{dz'}+\frac{\partial\varphi 1:x,y,z}{dx}\cdot\left(\frac{dN}{dx}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{dN}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\right]+\frac{\dot{N}n}{M}=0,$$

où la caractéristique ∂ désigne une différentielle prise par rapport aux trois variables x, y, z, & où l'on a fait pour abréger,

$$\frac{dn}{dy}+\frac{dn}{dz}\frac{dz}{dy}-\left(\frac{dN}{dy}+\frac{dN}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\varphi 1:x,y,z=n1,$$

$$\frac{dn}{dx}+\frac{dn}{dz}\frac{dz}{dx}-\left(\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\varphi 1:x,y,z=n2,$$

$$\frac{dn}{dx}\frac{dz}{dy}-\frac{dn}{dy}\frac{dz}{dx}-\left(\frac{dN}{dx}\frac{dz}{dy}-\frac{dN}{dy}\frac{dz}{dx}\right)\varphi 1:x,y,z=n3,$$

$$\frac{dM}{dy}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dx}-\frac{dM}{dx}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dy}+\frac{dz}{dx}\cdot\left(\frac{dM}{dy}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}-\frac{dM}{dz}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dy}\right)$$

$$+\frac{dz}{dy}\cdot\left(\frac{dM}{dz}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dx}-\frac{dM}{dx}\frac{d\varphi 1:x,y,z}{dz}\right)=\dot{M}\varphi 1:x,y,z,$$

& ainsi des autres quantités semblables.

Nous prendrons $\mu=\alpha z''^2+\beta z''+\gamma$; & ayant substitué cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente, nous le comparerons terme à terme au second, ce qui nous donnera

$$\frac{dM}{dz'} = \alpha M \ \& \ M = e^{\int \alpha dz'} f1 : x, y, z,$$

$$\frac{dN}{dz'} = \beta M - \frac{\partial M}{dx}$$

$$\& N = f2 : x, y, z + \int e^{\int \alpha dz'} [(\beta - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}). f1 : x, y, z - \frac{\partial f1 : x, y, z}{dx}] dz',$$

$$\frac{\partial N}{dx} = e^{\int \alpha dz'} \gamma f1 : x, y, z.$$

On aura donc auſſi

$$m = e^{\int \alpha dz'} f1 : x, y, z \varphi 1 : x, y, z,$$

$$n = \varphi 2 : x, y, z + \int e^{\int \alpha dz'} [(\beta - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}). f1 : x, y, z \varphi 1 : x, y, z$$

$$- \frac{\partial . f1 : x, y, z \varphi 1 : x, y, z}{dx}] dz',$$

$$\frac{\partial n}{dx} = e^{\int \alpha dz} \gamma f1 : x, y, z \varphi 1 : x, y, z.$$

En faiſant les ſubſtitutions convenables dans l'équation

$$\frac{\partial N}{dx} = e^{\int \alpha dz'} \gamma f1 : x, y, z,$$

on en tirera

$$\frac{\partial f2 : x, y, z}{dx} = f1 : x, y, z \{ \gamma e^{\int \alpha dz'} - \int e^{\int \alpha dz'} [\frac{\partial \beta}{dx} - \frac{\partial^2 \int \alpha dz'}{dx^2}$$

$$+ \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}. (\beta - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx})] dz' \} - \int\int e^{\int \alpha dz'} \{ [\frac{d\beta}{dz} - \frac{d \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}}{dz}$$

$$+ \frac{d \int \alpha dz'}{dz}. (\beta - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx})] \ldots\ldots (h) f1 : x, y, z + \frac{df1 : x, y, z}{dz} (\int \frac{d\alpha}{dx} dz'$$

$$+ z \int \frac{d\alpha}{dy} dz') - \int \frac{d\alpha}{dz} dz' (\frac{df1 : x, y, z}{dx} + z \frac{df1 : x, y, z}{dy}) \} dz'. dz'$$

$$- \frac{\partial f1 : x, y, z}{dx} \int e^{\int \alpha dz'} (\beta - \frac{2 \partial \int \alpha dz'}{dx}) dz' + \frac{\partial^2 f1 : x, y, z}{dx^2} . \int e^{\int \alpha dz'} dz'$$

$$- \frac{\partial \frac{df1 : x, y, z}{dz}}{dx} \int\int e^{\int \alpha dz'} dz'. dz';$$

& différenciant deux fois, en ne faisant varier que z',

$$\frac{df1:x,y,z}{dz} = e^{\int \alpha dz'}\{[\frac{d\gamma}{dz'} + \alpha\gamma - \frac{\partial \beta}{dx} + \frac{\partial^2 \int \alpha dz'}{dx^2} - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}.(\beta - \frac{\partial \int \alpha dz'}{dx})] \ldots\ldots\ldots (H) f1:x,y,z - \frac{\partial f1:x,y,z}{dx} (I) \ldots\ldots (\beta - 2\frac{\partial \int \alpha dz'}{dx}) + \frac{\partial^2 f1:x,y,z}{dx^2}\} - \int e^{\int \alpha dz'}[h f1:x,y,z + \frac{df1:x,y,z}{dz}(I + \int \frac{d\alpha}{dx} dz' + z\int \frac{d\alpha}{dy} dz') - \int \frac{d\alpha}{dz} dz'(\frac{df1:x,y,z}{dx} + z\frac{df1:x,y,z}{dy})] dz' + \frac{\partial \frac{df1:x,y,z}{dz}}{dx} \int e^{\int \alpha dz'} dz' - \frac{d^2 f1:x,y,z}{dz^2} \iint e^{\int \alpha dz'} dz'.dz',$$

$$0 = (\frac{dH}{dz'} + \alpha H - h) f1:x,y,z - (\frac{dI}{dz} + \alpha I - \int \frac{d\alpha}{dz} dz')(\frac{df1:x,y,z}{dx} + z\frac{df1:x,y,z}{dy}) - [2I + z'.(\frac{dI}{dz'} + \alpha I) + \int \frac{d\alpha}{dx} dz' + z\int \frac{d\alpha}{dy} dz'] \frac{df1:x,y,z}{dz} + \alpha \frac{\partial^2 f1:x,y,z}{dx^2} + 3\frac{\partial \frac{df1:x,y,z}{dz}}{dx}.$$

(16.) Si l'on suppose

$$\alpha = 0,\ \beta = \delta z' + \varepsilon,\ \gamma = \pi z'^3 + \varrho z'^2 + \sigma z' + \tau,$$

l'équation précédente donnera

$$\frac{d^2 f1:x,y,z}{dz^2} - \frac{d.\delta f1:x,y,z}{dz} + 2\pi f1:x,y,z = 0,$$

$$3(\frac{d^2 f1:x,y,z}{dx\,dz} + z\frac{d^2 f1:x,y,z}{dy\,dz}) - 2\frac{d.\varepsilon f1:x,y,z}{dz} - \frac{d.\delta f1:x,y,z}{dx} - z\frac{d.\delta f1:x,y,z}{dy} + 2\varrho f1:x,y,z = 0.$$

Soit $K1$ & $K2$ deux valeurs de $f1:x,y,z$ qui satisfassent à la première de celles-ci, en regardant x & y comme constans, elle aura pour intégrale complète

$$f1:x,y,z = K1\,\pi 1:x,y + K2\,\pi 2:x,y.$$

On

On mettra dans l'autre $K1\pi1:x,y$ pour $f1:x,y,z$, & de cette manière on en tirera

$$\frac{\frac{d\pi1:x,y}{dx}+z\frac{d\pi1:x,y}{dy}}{\pi1:x,y}=(\psi1)\ldots\ldots$$

$$\ldots\frac{3\left(\frac{d^2K1}{dxdz}+z\frac{d^2K1}{dydz}\right)-2\frac{d.\epsilon K1}{dz}-\frac{d.\delta K1}{dx}-z\frac{d.\delta K1}{dy}+2\rho K1}{\delta K1-3\frac{dK1}{dz}}$$

On trouvera ensuite

$$\frac{df2:x,y,z}{dz}=\sigma f1:x,y,z-\frac{d.\epsilon f1:x,y,z}{dx}-z\frac{d.\epsilon f1:x,y,z}{dy}$$
$$+\frac{d^2f1:x,y,z}{dx^2}+2z\frac{d^2f1:x,y,z}{dxdy}+z^2\frac{d^2f1:x,y,z}{dy^2};$$
$$\frac{df2:x,y,z}{dx}+z\frac{df2:x,y,z}{dy}=\tau f1:x,y,z.$$

Ayant tiré de la première

$$f2:x,y,z=\pi3:x,y+\int\left[\left(\sigma K1-\frac{\partial.\epsilon K1}{dx}+\frac{\partial^2.K1}{dx^2}\right)\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots(h')\pi1:x,y-\left(\epsilon K1-2\frac{\partial K1}{dx}\right)\ldots(i')\frac{\partial\pi1:x,y}{dx}+K1\frac{\partial^2\pi1:x,y}{dx^2}\right]dz,$$

où ∂ désigne une différentielle prise par rapport aux deux variables x & y; on mettra cette valeur dans la seconde, & on aura

$$\frac{\partial\pi3:x,y}{dx}=\tau K1\pi1:x,y-\int\left[\frac{\partial h'}{dx}\pi1:x,y+\left(\sigma K1-2\frac{\partial.\epsilon K1}{dx}+3\frac{\partial^2.\epsilon K1}{dx^2}\right)\ldots\right.$$
$$\left.\ldots(l')\frac{\partial\pi1:x,y}{dx}-\left(\epsilon K1-3\frac{\partial K1}{dx}\right)\ldots(K')\frac{\partial^2\pi1:x,y}{dx^2}+K1\frac{\partial^3\pi1:x,y}{dx^3}\right]dz$$
$$-\int\int\left(\frac{dh'}{dy}\pi1:x,y+h'\frac{d\pi1:x,y}{dy}-\frac{di'}{dy}\frac{\partial\pi1:x,y}{dx}-i'\frac{d\frac{\partial\pi1:x,y}{dx}}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{dK1}{dy}\frac{\partial^2\pi1:x,y}{dx^2}+K1\frac{d\frac{\partial^2\pi1:x,y}{dx}}{dy}\right)dz\,.\,dz.$$

Celle-ci étant différenciée deux fois par rapport à z, donnera d'abord

$$\frac{d\pi 3:x,y}{dy} = \left(\frac{d.\tau K1}{dz} - \frac{\partial.\sigma K1}{dx} + \frac{\partial^2.\varepsilon K1}{dx^2} - \frac{\partial^3 K1}{dx^3}\right)\ldots$$

$$\ldots(H')\pi 1:x,y - I'\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx} + K'\frac{\partial^2\pi 1:x,y}{dx^2} - K1\frac{\partial^3\pi 1:x,y}{dx^3}$$

$$- \int\left[\frac{dh'}{dy}\pi 1:x,y + h'\frac{d\pi 1:x,y}{dy} - \frac{di'}{dy}\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx}\right.$$

$$\left. - i'\frac{d\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx}}{dy} + \frac{dK1}{dy}\frac{\partial^2\pi 1:x,y}{dx^2} + K1\frac{d\frac{\partial^2\pi 1:x,y}{dx^2}}{dy}\right]dz,$$

puis l'équation

$$\left(\frac{dH'}{dz} - \frac{dh'}{dy}\right)\pi 1:x,y - \left(\frac{dI'}{dz} - \frac{di'}{dy}\right)\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx}$$

$$- (I' + h')\frac{d\pi 1:x,y}{dy} + \left(\frac{dK'}{dz} - \frac{dK1}{dy}\right)\frac{\partial^2\pi 1:x,y}{dx^2}$$

$$+ (2K' + i')\frac{d\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx}}{dy} - \frac{\partial K1}{dz}\frac{\partial^3\pi 1:x,y}{dx^3}$$

$$- 4K1\frac{d\frac{\partial^2\pi 1:x,y}{dx^2}}{dy} = 0,$$

qui renferme des conditions d'intégrabilité, auxquelles on ajoutera celle trouvée plus haut, relativement à $\psi 1$.

(17.) Lorsqu'on aura δ & π nuls, ϱ fonction des seules variables x, y, & $\varepsilon = az + b$, $\sigma = ez^2 + fz + g$, $\tau = pz^4 + qz^3 + rz^2 + sz + t$, tous ces coëfficiens de z étant des fonctions de x, y, on pourra prendre $K1 = 1$; & comme alors le dénominateur de $\psi 1$ sera nul, il faudra que $\varrho = a$, & il ne s'agira plus que de déterminer $\frac{\partial\pi 1:x,y}{dx}$ d'une autre manière: on fera usage pour cela de la dernière équation, qui donnera

$$\frac{d^3\pi 1:x,y}{dy^3} - \frac{d^2.a\pi 1:x,y}{dy^2} + \frac{d.e\pi 1:x,y}{dy} - 3p.\pi 1:x,y = 0,$$

$$8\frac{d^3\pi 1:x,y}{dx\,dy^2} - 3\frac{d^2.b\pi 1:x,y}{dy^2} - 5\frac{d^2.a\pi 1:x,y}{dx\,dy} + 3\frac{d.f\pi 1:x,y}{dy} + 2\frac{d.e\pi 1:x,y}{dx} - 6q\pi 1:x,y = 0,$$

$$4\frac{d^3\pi 1:x,y}{dx^2\,dy} - 3\frac{d^2.b\pi 1:x,y}{dx\,dy} - \frac{d^2.a\pi 1:x,y}{dx^2} + \frac{d.f\pi 1:x,y}{dx} + 2\frac{d.g\pi 1:x,y}{dy} - 2r\pi 1:x,y = 0.$$

Si nous déſignons par $H1$, $H2$, $H3$, trois valeurs de $\pi 1:x,y$ qui ſatisfaſſent à la première, en regardant x comme conſtant, elle aura pour intégrale complète,

$$\pi 1:x,y = x1\,H1 + x2\,H2 + x3\,H3,$$

$x1$, $x2$, $x3$ étant des fonctions de x; on mettra $x1\,H1$ pour $\pi 1:x,y$ dans les deux autres, qui deviendront par-là

$$\left(8\frac{d^3H1}{dx\,dy^2} - 3\frac{d^2.bH1}{dy^2} - 5\frac{d^2.aH1}{dx\,dy} + 3\frac{d.fH1}{dy} + 2\frac{d.eH1}{dx} - 6qH1\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots(a1)x1 + \left(8\frac{d^2H1}{dy^2} - 5\frac{d.aH1}{dy} + 2eH1\right)\ldots(b1)x'1 = 0,$$

$$\left(4\frac{d^3H1}{dx^2\,dy} - 3\frac{d^2.bH1}{dx\,dy} - \frac{d^2.aH1}{dx^2} + \frac{d.fH1}{dx} + 2\frac{d.gH1}{dy} - 2rH1\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots(c1)x1 + \left(4\frac{d^2H1}{dx\,dy} - 3\frac{d.b\,H1}{dy} + 2\frac{d.aH1}{dx} + fH1\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots(d1)x'1 + \left(4\frac{dH1}{dy} - aH1\right)\ldots(e1)x''1 = 0.$$

On trouvera enſuite

$$\frac{d\pi 2:x,y}{dy} = s\pi 1:x,y - \frac{d.g\pi 1:x,y}{dx} + \frac{d^2.b\pi 1:x,y}{dx^2} - \frac{d^3\pi 1:x,y}{dx^3};$$

$$\frac{d\pi 2:x,y}{dx} = t\pi 1:x,y;$$

d'où il ſera facile de tirer

$$\pi 2:x,y = X + \int(s\pi 1:x,y - \frac{d.g\pi 1:x,y}{dx} + \frac{d^2.b\pi 1:x,y}{dx^2} - \frac{d^3\pi 1:x,y}{dx^3})dy,$$

$$X' = t\pi 1:x,y - \int(\frac{d.s\pi 1:x,y}{dx} - \frac{d^2.g\pi 1:x,y}{dx^2} + \frac{d^3.b\pi 1:x,y}{dx^3} - \frac{d^4\pi 1:x,y}{dx^4})dy;$$

& comme le ſecond membre de celle-ci ne doit pas renfermer y, on aura

$$(\frac{d.tH1}{dy} - \frac{d.sH1}{dx} + \frac{d^2.gH1}{dx^2} - \frac{d^3.bH1}{dx^3} + \frac{d^4H1}{dx^4})x1$$
$$- (sH1 - 2\frac{d.gH1}{dx} + 3\frac{d^2.bH1}{dx^2} - 4\frac{d^3H1}{dx^3})x'1$$
$$+ (gH1 - 3\frac{d.bH1}{dx} + 6\frac{d^2H1}{dx^2})x''1$$
$$- (bH1 - 4\frac{dH1}{dx})x'''1 + H1x^{\text{IV}}1 = 0.$$

L'une des trois équations que nous venons de trouver, donnera $x1$, & les deux autres renfermeront les conditions d'intégrabilité; ces conditions auroient été fort différentes, ſi au lieu de prendre $K1 = 1$, on l'eût pris $= z$. Quoi qu'il en ſoit, ayant deux valeurs de $x1$, ſi on nomme $M1$, $N1$ & $M2$, $N2$, ce que deviendront M, N, par les ſubſtitutions ſucceſſives de ces deux valeurs, on aura pour l'intégrale première complète de l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, $M1z'' + N1 + F:(M2z'' + N2) = 0$.

(18.) Ayant propoſé l'équation d'un ordre quelconque $\frac{1}{dx}dZ + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma = 0$, α, β, γ étant des fonctions de $x, y, z, z' \ldots {}'Z$; ſi on lui ſuppoſe pour intégrale première complète $mZ + n + F:(MZ + N) = 0$; on aura

$$M = e^{\int\alpha d'Z}P,\ N = Q + \int e^{\int\alpha d'Z}[(\beta - \frac{\partial\int\alpha d'Z}{dx}).P - \frac{\partial P}{dx}]d'Z,$$

$$m = e^{\int\alpha d'Z}Pp,\ n = Qq + \int e^{\int\alpha d'Z}[(\beta - \frac{\partial\int\alpha d'Z}{dx}).Pp - \frac{\partial.Pp}{dx}]d'Z,$$

$$\frac{\partial N}{dx} = e^{\int\alpha d'Z}\gamma P,\ \frac{\partial n}{dx} = e^{\int\alpha d'Z}\gamma Pp,$$

où P, p, Q, q ſont des fonctions arbitraires de x, y, z, z'................."Z, & où ∂ déſigne une différentielle priſe par rapport à ces ſeules variables. Nous ne pouſſerons pas plus loin ce calcul qui n'a aucune difficulté, mais nous prions de remarquer que pour parvenir aux équations que nous avons nommées (Γ) & (Δ), nous avons fait l'hypothèſe la plus ſimple, qu'il y en a une infinité d'autres auſſi faciles à calculer, qui donneront autant de différentes conditions d'intégrabilité.

(19.) Nous remarquerons encore que pour ſatisfaire aux équations (Γ), (Δ) elles-mêmes, nous avons donné à B & K une forme très-limitée. Généraliſons cette ſuppoſition, & pour le ſecond ordre prenons $B = mz + n$, $K = Mz^{\pi} + Nz^{\pi-1} + Pz^{\pi-2} + Qz^{\pi-3} + \ldots + {}'Nz + {}'M$, π étant un nombre entier poſitif, & m, n, M, N ... $'M$ des fonctions de x, y; alors l'équation (Γ) devient

$$[\pi Mz^{\pi-1} + (\pi - 1).Nz^{\pi-2} + (\pi - 2).Pz^{\pi-3} + \ldots \\ \ldots\ldots + {}'N]\ [\tfrac{dm}{dy}z^2 + (\tfrac{dn}{dy} + \tfrac{dm}{dx}).z + \tfrac{dn}{dx}] \\ - m[\tfrac{dM}{dy}z^{\pi+1} + (\tfrac{dN}{dy} + \tfrac{dM}{dx}).z^{\pi} + (\tfrac{dP}{dy} + \tfrac{dN}{dx}).z^{\pi-1} + \ldots \\ \ldots + (\tfrac{d'M}{dy} + \tfrac{d'N}{dx}).z + \tfrac{d'M}{dx}] = 0,$$

& donne néceſſairement ce nombre $\pi + 2$ d'équations,

$$\pi M\frac{dm}{dy} - m\frac{dM}{dy} = 0,$$

$$\pi M.(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}) - m.(\frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dx}) + (\pi - 1).N\frac{dm}{dy} = 0;$$

$$\pi M\frac{dn}{dx} - m.(\frac{dP}{dy} + \frac{dN}{dx}) + (\pi -).N.(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}) + (\pi - 2).P\frac{dm}{dy} = 0;$$

$$(\pi - 1).N\frac{dn}{dx} - m.(\frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dx}) + (\pi - 2).P.(\frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dx}) + (\pi - 3).Q\frac{dm}{dy} = 0;$$

. . . .

$$'N\frac{dm}{dy} - m.\left(\frac{d'N}{dy} + \frac{d'P}{dx}\right) + 2'P.\left(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}\right) + 3'Q\frac{dn}{dx} = 0,$$

$$'N.\left(\frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dx}\right) - m.\left(\frac{d'M}{dy} + \frac{d'N}{dx}\right) + 2'P\frac{dn}{dx} = 0,$$

$$'N\frac{dn}{dx} - m\frac{d'M}{dx} = 0.$$

Il ſera facile de tirer de la première $m = M^{\frac{1}{\pi}}\varphi 1 : x$; en ſubſtituant cette valeur dans la ſeconde, elle devient

$$\pi\frac{dn}{dy} - \frac{1}{\pi}M^{\frac{1}{\pi}-2}\varphi 1 : x\left(\pi M\frac{dN}{dy} - (\pi - 1).N\frac{dM}{dy}\right) = -\pi M^{\frac{1}{\pi}}\varphi' 1 : x;$$

qui a pour intégrale complète

$$\pi n - NM^{\frac{1}{\pi}-1}\varphi 1 : x = (A) \ldots \varphi 2 : x - \pi\varphi' 1 : x\int M^{\frac{1}{\pi}}dy.$$

(20.) Occupons-nous maintenant de l'équation (Δ); dans laquelle le coëfficient de μ ou

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz} - \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy} = \left[\pi M\frac{dn}{dy} - m\frac{dN}{dy} + (\pi - 1).N\frac{dm}{dy}\right]\ldots$$

$$\ldots(\varrho)\, z^{\pi-1} + \left[(\pi - 1).N\frac{dn}{dy} - m\frac{dP}{dy} + (\pi - 2).P\frac{dm}{dy}\right]\ldots$$

$$\ldots(\sigma)\, z^{\pi-2} + \left[(\pi - 2).P\frac{dn}{dy} - m\frac{dQ}{dy} + (\pi - 3).Q\frac{dm}{dy}\right]\ldots$$

$$\ldots(\tau)\, z^{\pi-3} + \ldots\ldots + \left(3'Q\frac{dn}{dy} - m\frac{d'P}{dy} + 2'P\frac{dm}{dy}\right)\ldots$$

$$\ldots('\tau)\, z^2 + \left(2'P\frac{dn}{dy} - m\frac{d'N}{dy} + 'N\frac{dm}{dy}\right)\ldots('\sigma)\, z + \left('N\frac{dm}{dy} - m\frac{d'M}{dy}\right)\ldots('\varrho);$$

or ſi nous convenons de nous ſervir de $\dot{m}\,\dot{M}$ pour repréſenter $\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy}$, & ainſi des autres quantités ſemblables, nous pourrons la transformer en celle-ci;

$$\mu(\rho z^{\pi-1}+\sigma z^{\pi-2}+\tau z^{\pi-3}+\ldots+{}'\tau z^2+{}'\sigma z+{}'\rho)=\dot{m}\dot{M}z^{\pi+1}$$
$$+(\dot{m}\dot{N}+\dot{n}\dot{M})z^{\pi}+(\dot{m}\dot{P}+\dot{n}\dot{N})z^{\pi-1}+(\dot{m}\dot{Q}+\dot{n}\dot{P})z^{\pi-2}$$
$$+\ldots+(\dot{m}'\dot{N}+\dot{n}'\dot{P})z^2+(\dot{m}'\dot{M}+\dot{n}'\dot{N})z+\dot{n}'\dot{M}.$$

(21.) C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe.

$$\mu=\frac{\alpha z^{\pi+1}+\beta z^{\pi}+\gamma z^{\pi-1}+\delta z^{\pi-2}+\varepsilon z^{\pi-3}+\ldots+{}'\gamma z^2+{}'\beta z+{}'\alpha}{z^{\pi-1}+\varkappa z^{\pi-2}+\theta z^{\pi-3}+i z^{\pi-4}+\ldots+{}'iz^2+{}'\theta z+{}'\varkappa};$$

où α, β, &c. ſont des fonctions de x, y; en faiſant pour abréger

$\beta-\alpha\varkappa=\beta 1$,

$\gamma-\alpha\theta-\beta\varkappa+\alpha\varkappa^2=\gamma 1$,

$\delta-\alpha i-\beta\theta+2\alpha\varkappa\theta-\gamma\varkappa+\beta\varkappa^2-\alpha\varkappa^3=\delta 1$,

$\varepsilon-\alpha\chi-\beta i+2\alpha\varkappa i-\gamma\theta+\alpha\theta^2+2\beta\varkappa\theta-3\alpha\varkappa^2\theta-\delta\varkappa+\gamma\varkappa^2-\beta\varkappa^3+\alpha\varkappa^4=\varepsilon 1$,

. . . .

$'\gamma'\varkappa^2-{}'\beta'\varkappa'\theta-{}'\alpha'\varkappa' i+{}'\alpha'\theta^2={}'\varkappa^2{}'\gamma 1$,

$'\beta'\varkappa-{}'\alpha'\theta={}'\varkappa'\beta 1$,

on aura les $2\pi+1$ équations que voici:

$\dot{m}\dot{M}=\alpha\rho$,

$\dot{m}\dot{N}+\dot{n}\dot{M}=\beta 1\rho+\alpha\sigma$,

$\dot{m}\dot{P}+\dot{n}\dot{N}=\gamma 1\rho+\beta 1\sigma+\alpha\tau$,

$\dot{m}\dot{Q}+\dot{n}\dot{P}=\delta 1\rho+\gamma 1\sigma+\beta 1\tau+\alpha\upsilon$,

$\dot{m}\dot{R}+\dot{n}\dot{Q}=\varepsilon 1\rho+\delta 1\sigma+\gamma 1\tau+\beta 1\upsilon+\alpha\varphi$,

. . . .

$'\varkappa(\dot{m}'\dot{N}+\dot{n}'\dot{P})={}'\gamma 1'\rho+{}'\beta 1'\sigma+{}'\alpha'\tau$,

$'\varkappa(\dot{m}'\dot{M}+\dot{n}'\dot{N})={}'\beta 1'\rho+{}'\alpha'\sigma$,

$'\varkappa\dot{n}'\dot{M}={}'\alpha'\rho$.

(22.) Si on examine ces équations, on verra aiſément que les $\pi-1$ dernières peuvent être miſes ſous la forme d'équations du premier degré entre $\frac{\sigma}{\rho}$, $\frac{\tau}{\rho}\ldots\frac{'\rho}{\rho}$, & des

quantités connues, c'eſt-à-dire qu'il ne ſeroit queſtion que d'un genre d'élimination qui n'a aucune difficulté, ſi on vouloit déterminer par ce moyen $\frac{\sigma}{\rho}$, $\frac{\tau}{\rho}$, &c. que nous ferons pour ſimplifier $= \sigma 1, \tau 1$, &c. Par exemple, lorſque $\pi = 3$, ces dernières équations ne ſont autres que

$$\theta(\dot{m}\dot{Q} + \dot{n}\dot{P}) = \varepsilon\sigma + (\delta - \frac{\varepsilon n}{\theta})\tau, \theta\dot{n}\dot{Q} = \varepsilon\tau;$$

deſquelles il eſt facile de tirer

$$\sigma 1 = \frac{\varepsilon 1(\beta 1\theta^2 - \delta\theta + \varepsilon n) + \delta 1\theta(\varepsilon - \gamma 1\theta)}{(\varepsilon - \gamma 1\theta)^2 + \delta 1(\delta\theta - \varepsilon n - \beta 1\theta^2)},$$

$$\tau 1 = \frac{(\delta 1\theta)^2 + \varepsilon 1\theta(\varepsilon - \gamma 1\theta)}{(\varepsilon - \gamma 1\theta)^2 + \delta 1(\delta\theta - \varepsilon n - \beta 1\theta^2)},$$

(23.) A cauſe de $\rho = -\pi M^{\frac{1}{\pi}+1} \varphi' 1 : x$, les deux premières équations du même numéro pourront être changées en celles-ci, $\frac{dM}{dy} = \pi\alpha M$,

$$\frac{dN}{dy} + \alpha N = \frac{\dot{A}\dot{M}}{\pi\varphi' 1 : x} M^{\frac{-1}{\pi}} + \pi M.(\beta 1 + \alpha\sigma 1);$$

deſquelles il ſera facile de tirer M & N. Il ne ſera pas plus difficile de tirer les valeurs de $P, Q \ldots\ldots 'M$ de celles-ci;

$$(\pi - 1).N\frac{dn}{dy} - m\frac{dP}{dy} + (\pi - 2).P\frac{dm}{dy} = \sigma 1\rho;$$

$$(\pi - 2).P\frac{dn}{dy} - m\frac{dQ}{dy} + (\pi - 3).Q\frac{dm}{dy} = \tau 1\rho;$$

$$(\pi - 3).Q\frac{dn}{dy} - m\frac{dR}{dy} + (\pi - 4).R\frac{dm}{dy} = \upsilon 1\rho;$$

. . . .

$$3'Q\frac{dn}{dy} - m\frac{d'P}{dy} + 2'P\frac{dm}{dy} = '\tau 1\rho,$$

$$2'P\frac{dn}{dy} - m\frac{d'N}{dy} + 'N\frac{dm}{dy} = '\sigma 1\rho,$$

$$'N\frac{dn}{dy} - m\frac{d'M}{dy} = '\rho 1\rho. \qquad (24.)$$

(24.) Mais les équations du *n.°* 19, en en exceptant les deux premières, deviennent

$$\pi M \frac{dn}{dx} - m \frac{dN}{dx} + (\pi - 1) . N \frac{dm}{dx} + \sigma 1 \rho = 0,$$

$$(\pi - 1) . N \frac{dn}{dx} - m \frac{dP}{dx} + (\pi - 2) . P \frac{dm}{dx} + \tau 1 \rho = 0,$$

$$(\pi - 2) . P \frac{dn}{dx} - m \frac{dQ}{dx} + (\pi - 3) . Q \frac{dm}{dx} + \upsilon 1 \rho = 0,$$

$$(\pi - 3) . Q \frac{dn}{dx} - m \frac{dR}{dx} + (\pi - 4) . R \frac{dm}{dx} + \varphi 1 \rho = 0,$$

....

$$3\,'Q \frac{dn}{dx} - m \frac{d'P}{dx} + 2\,'P \frac{dm}{dx} + '\sigma 1 \rho = 0,$$

$$2\,'P \frac{dn}{dx} - m \frac{d'N}{dx} + \ 'N \frac{dm}{dx} + '\rho 1 \rho = 0,$$

$$'N \frac{dN}{dx} - m \frac{d'M}{dx} = 0.$$

Donc si l'on différencie

$$\pi M \frac{dn}{dy} - m \frac{dN}{dy} + (\pi - 1) . N \frac{dm}{dy} = \rho,$$

& toutes celles du numéro précédent par rapport à x, & qu'on les compare aux précédentes, différenciées par rapport à y, on aura

$$\pi (\dot{n} \dot{M} + \dot{m} \dot{N}) = \frac{d\rho}{dx} + \frac{d . \sigma 1 \rho}{dy},$$

$$(\pi - 1)\ (\dot{n} \dot{N} + \dot{m} \dot{P}) = \frac{d . \sigma 1 \rho}{dx} + \frac{d . \tau 1 \rho}{dy},$$

$$(\pi - 2)\ (\dot{n} \dot{P} + \dot{m} \dot{Q}) = \frac{d . \tau 1 \rho}{dx} + \frac{d . \upsilon 1 \rho}{dy},$$

$$(\pi - 3)\ (\dot{n} \dot{Q} + \dot{m} \dot{R}) = \frac{d . \upsilon 1 \rho}{dx} + \frac{d . \varphi 1 \rho}{dy};$$

....

$$3\,(\dot{n}'\dot{Q} + \dot{m}'\dot{P}) = \frac{d.'\tau 1 \rho}{dx} + \frac{d.\sigma 1 \rho}{dy},$$

$$2\,(\dot{n}'\dot{P} + \dot{m}'\dot{N}) = \frac{d.'\sigma 1 \rho}{dx} + \frac{d.'\rho 1 \rho}{dy},$$

$$\dot{n}'\dot{N} + \dot{m}'\dot{M} = \frac{d.\rho 1 \rho}{dx};$$

& faiſant pour abréger,

$\pi(\mathit{6}1 + \alpha\sigma 1) = \mathit{6}2$, $(\pi - 1)\,(\gamma 1 + \mathit{6}1\sigma 1 + \alpha\tau 1) = \gamma 2$, &c.

$$\frac{d\rho}{dx} + \frac{d.\sigma 1 \rho}{dy} = \mathit{6}2\rho, \qquad \frac{d.\sigma 1 \rho}{dx} + \frac{d.\tau 1 \rho}{dy} = \gamma 2\rho,$$

$$\frac{d.\tau 1 \rho}{dx} + \frac{d.\upsilon 1 \rho}{dy} = \delta 2\rho, \qquad \frac{d.\upsilon 1 \rho}{dx} + \frac{d.\varphi 1 \rho}{dy} = \epsilon 2\rho,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d.'\tau 1 \rho}{dx} + \frac{d.'\sigma 1 \rho}{dy} = \delta' 2\rho,$$

$$\frac{d.'\sigma 1 \rho}{dx} + \frac{d.'\rho 1 \rho}{dy} = {}'\gamma 2\rho, \qquad \frac{d.'\rho 1 \rho}{dx} = {}'\mathit{6}2\rho.$$

(25.) De $\frac{dM}{dy} = \pi\alpha M$, on tire

$M = e^{\pi\int\alpha dy} f 1 : x$ & $\frac{dM}{dx} = M\left(\pi\int\frac{d\alpha}{dx}\,dy + \frac{f' 1 : x}{f 1 : x}\right);$

donc

$$\rho = -\pi e^{(\pi+1)\int\alpha dy}\,\varphi' 1 : x\,(f 1 : x)^{\frac{\pi+1}{\pi}}.$$

$$\frac{d\rho}{dy} = (\pi + 1)\,\alpha\rho,$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho\left[(\pi + 1).\int\frac{d\alpha}{dx}\,dy + \frac{\varphi'' 1 : x}{\varphi' 1 : x} + \frac{\pi + 1}{\pi}\,\frac{f' 1 : x}{f 1 : x}\right].$$

Cela poſé, la première des équations précédentes pourra être changée en celle-ci,

$$\frac{\varphi'' 1 : x}{\varphi' 1 : x} + \frac{\pi + 1}{\pi}\,\frac{f' : x}{f 1 : x} = (X 1) \ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots\mathit{6}2 - \frac{d\sigma 1}{dy} - (\pi + 1)\left(\alpha\sigma 1 + \int\frac{d\alpha}{dx}\,dy\right),$$

qui donne pour première condition d'intégrabilité que $X 1$ ne doit renfermer de variable que x, & au moyen de laquelle

il sera facile de déterminer l'une de ces deux quantités $\varphi 1 : x$ & $f 1 : x$, lorsqu'on connoîtra l'autre. Donc

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho \left[\beta 2 - \frac{d\sigma 1}{dy} - (\pi + 1) \alpha \sigma 1 \right];$$

en substituant cette valeur dans les équations que suivent celle dont nous venons de nous occuper, nous trouverons $\pi - 1$ conditions que voici :

$$\frac{d\sigma 1}{dx} - \sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} + \frac{d\tau 1}{dy} - \gamma 2 + \beta 2 \sigma 1 + (\pi + 1) [\tau 1 - (\sigma 1)^2] \alpha = 0,$$

$$\frac{d\tau 1}{dx} - \tau 1 \frac{d\sigma 1}{dy} + \frac{d\upsilon 1}{dy} - \delta 2 + \beta 2 \tau 1 + (\pi + 1)(\upsilon 1 - \sigma 1 \tau 1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d\upsilon 1}{dx} - \upsilon 1 \frac{d\sigma 1}{dy} + \frac{d\varphi 1}{dy} - \varepsilon 2 + \beta 2 \upsilon 1 + (\pi + 1)(\varphi 1 - \sigma 1 \upsilon 1) \alpha = 0,$$

. . . .

$$\frac{d'\tau 1}{dx} - {}'\tau 1 \frac{d\sigma 1}{dy} + \frac{d'\sigma 1}{dy} - {}'\delta 2 + \beta 2 {}'\tau 1 + (\pi + 1)({}'\sigma 1 - \sigma 1 {}'\tau 1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d'\sigma 1}{dx} - {}'\sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} + \frac{d'\rho 1}{dy} - {}'\gamma 2 + \beta 2 {}'\sigma 1 + (\pi + 1)({}'\rho 1 - \sigma 1 {}'\sigma 1) \alpha = 0,$$

$$\frac{d'\rho 1}{dx} - {}'\rho 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - {}'\beta 2 + \beta 2 {}'\rho 1 + (\pi + 1) \alpha \sigma 1 {}'\rho 1 = 0.$$

(26.) A cause de

$$m = e^{\int \alpha dy} \varphi 1 : x (f 1 : x)^{\frac{1}{\pi}}, \quad \frac{dm}{dy} = \alpha m,$$

$$\frac{dm}{dx} = m \left(\int \frac{d\alpha}{dx} dy + \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x} \right),$$

$$\pi n = N e^{(1 - \pi) \int \alpha dy} \varphi 1 : x (f 1 : x)^{\frac{1 - \pi}{\pi}} + A,$$

$$\pi \frac{dn}{dy} = e^{(1 - \pi) \int \alpha dy} \varphi 1 : x (f 1 : x)^{\frac{1 - \pi}{\pi}} \left[\frac{dN}{dy} + (1 - \pi) . \alpha N \right] + \frac{dA}{dy},$$

$$\pi \frac{dn}{dx} = e^{(1 - \pi) \int \alpha dy} \varphi 1 : x (f 1 : x)^{\frac{1 - \pi}{\pi}} \left\{ \frac{dN}{dx} + N \left[(1 - \pi) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy + \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{1 - \pi}{\pi} \frac{f' 1 : x}{f 1 : x} \right] \right\} + \frac{dA}{dx}.$$

les équations du *n.° 24* seront susceptibles d'autres changemens que nous analyserons successivement. On verra d'abord que de la première, on peut tirer

$$\frac{dA}{dx} = \pi e^{\int \alpha dy} (f1:x)^{\frac{1}{\pi}} \varphi' 1:x \left(\sigma 1 - \frac{N}{f1:x} e^{-\pi \int \alpha dy}\right);$$

que si l'on met cette valeur dans l'équation du *n.° 23*, qui doit donner N, on la réduit à

$$\frac{dN}{dy} - (\pi - 1)\alpha N = \pi e^{\pi \int \alpha dy} f1:x \left(\mathcal{C}1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy - \frac{f'1:x}{\pi f1:x}\right),$$

d'où il sera facile de tirer

$$N = e^{(\pi - 1)\int \alpha dy} \Big[f2:x + \pi f1:x \int e^{\int \alpha dy} \left(\mathcal{C}1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy\right) dy$$
$$- f'1:x \int e^{\int \alpha dy} dy\Big];$$

après quoi on substituera pour N & A leurs valeurs dans la même équation, & on aura

$$\frac{\varphi' 2:x}{\pi \varphi' 1:x (f1:x)^{\frac{1}{\pi}}} + \frac{f2:x}{f1:x} = \sigma 1 e^{\int \alpha dy} - \int e^{\int \alpha dy} \left(\frac{d\sigma 1}{dy} + \alpha \sigma 1\right) dy,$$

dont le second membre est évidemment une fonction de x seul; ainsi lorsqu'on connoîtra $f1:x$, $\varphi 1:x$ & $f2:x$, celle-ci nous donnera $\varphi 2:x$.

(27.) Les autres équations du *n.° 23* deviendront intégrables, en les divisant successivement par $m^{\pi - 1}$, $m^{\pi - 2}$, $m^{\pi - 3}$, &c. & on en tirera

$$P = m^{\pi - 2} \left[f3:x + \int \frac{(\pi - 1).N \frac{dn}{dy} - \sigma 1 \rho}{m^{\pi - 1}} dy\right],$$

$$Q = m^{\pi - 3} \left[f4:x + \int \frac{(\pi - 2).P \frac{dn}{dy} - \tau 1 \rho}{m^{\pi - 2}} dy\right],$$

$$R = m^{\pi - 4}\left[f\,5 : x + \int \frac{(\pi - 3) \cdot Q \frac{dn}{dy} - \upsilon\, 1\, \rho}{m^{\pi - 3}} dy\right],$$

. . . .

$$'P = m^2\left[f\pi - 1 : x + \int \frac{3\,'Q \frac{dn}{dy} - '\tau\, 1\, \rho}{m^3} dy\right],$$

$$'N = m\left[f\,\pi : x + \int \frac{2\,'P \frac{dn}{dy} - \sigma\, 1\, \rho}{m^2} dy\right],$$

$$'M = f\pi + 1 : x + \int \frac{'N \frac{dn}{dy} - '\rho\, 1\, \rho}{m} dy.$$

Il faudra substituer ces valeurs dans les équations du *n.°* 24, ce qui donnera

$$f'3 : x = \frac{(\pi - 1) \cdot N \frac{dn}{dx} + \tau\, 1\, \rho}{m^{\pi - 1}} - \int \frac{d\left\{[(\pi - 1) \cdot N \frac{dn}{dy} - \sigma\, 1\, \rho] : m^{\pi - 1}\right\}}{dx} dy,$$

$$f'4 : x = \frac{(\pi - 2) \cdot P \frac{dn}{dx} + \upsilon\, 1\, \rho}{m^{\pi - 2}} - \int \frac{d\left\{[(\pi - 2) \cdot P \frac{dn}{dy} - \tau\, 1\, \rho] : m^{\pi - 2}\right\}}{dx} dy,$$

$$f'5 : x = \frac{(\pi - 3) \cdot Q \frac{dn}{dx} + \varphi\, 1\, \rho}{m^{\pi - 3}} - \int \frac{d\left\{[(\pi - 3) \cdot Q \frac{dn}{dy} - \upsilon\, 1\, \rho] : m^{\pi - 3}\right\}}{dx} dy,$$

. . . .

$$f'\pi - 1 : x = \frac{3\,'Q \frac{dn}{dx} + '\sigma\, 1\, \rho}{m^3} - \int \frac{d[(3\,'Q \frac{dn}{dy} - '\tau\, 1\, \rho) : m^3]}{dx} dy,$$

$$f'\pi : x = \frac{2\,'P \frac{dn}{dx} + '\rho\, 1\, \rho}{m^2} - \int \frac{d[(2\,'P \frac{dn}{dy} - '\sigma\, 1\, \rho) : m^2]}{dy} dy,$$

$$f'\pi + 1 : x = \frac{'N}{m} \frac{dn}{dx} - \int \frac{d[('N \frac{dn}{dy} - '\rho\, 1\, \rho) : m]}{dx} dy;$$

& comme les seconds membres de celles-ci ne doivent pas renfermer y, on en tirera ces $\pi - 1$ équations,

$$(\pi-1)\left(\dot{n}\dot{N}+\frac{\tau 1 \rho}{m}\frac{dm}{dy}+\frac{\sigma 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}\right)-(\pi-1)^2\frac{N}{m}\ddot{n m}-\frac{d.\tau 1 \rho}{dy}-\frac{d.\sigma 1 \rho}{dx}=0,$$

$$(\pi-2)\left(\dot{n}\dot{P}+\frac{\upsilon 1 \rho}{m}\frac{dm}{dy}+\frac{\tau 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}\right)-(\pi-2)^2\frac{P}{m}\ddot{n m}-\frac{d.\upsilon 1 \rho}{dy}-\frac{d.\tau 1 \rho}{dx}=0,$$

$$(\pi-3)\left(\dot{n}\dot{Q}+\frac{\varphi 1 \rho}{m}\frac{dm}{dy}+\frac{\upsilon 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}\right)-(\pi-3)^2\frac{Q}{m}\ddot{n m}-\frac{d.\varphi 1 \rho}{dy}-\frac{d.'\upsilon 1 \rho}{dx}=0,$$

. . . .

$$3\left(\dot{n}'\dot{Q}+\frac{'\sigma 1 \rho}{m}\frac{dm}{dy}+\frac{'\tau 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}\right)-9\frac{'Q}{m}\ddot{n m}-\frac{d.'\sigma 1 \rho}{dy}-\frac{d.'\tau 1 \rho}{dx}=0,$$

$$2\left(\dot{n}'\dot{P}+\frac{'\rho 1 \rho}{m}\frac{dm}{dy}+\frac{'\sigma 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}\right)-4\frac{'P}{m}\ddot{n m}-\frac{d.'\rho 1 \rho}{dy}-\frac{d.'\sigma 1 \rho}{dx}=0,$$

$$\dot{n}'\dot{N}+\frac{'\rho 1 \rho}{m}\frac{dm}{dx}-\frac{'N}{m}\ddot{n m}-\frac{d.'\rho 1 \rho}{dx}=0.$$

En substituant pour

$$(\pi-1).\dot{n}\dot{N}-\frac{d.\tau 1 \rho}{dy}-\frac{d.\sigma 1 \delta}{dx},\ (\pi-2).\dot{n}\dot{P}-\frac{d.\upsilon 1 \rho}{dy}-\frac{d.\tau 1 \rho}{dx},\ \&c.$$

leurs valeurs (n.° 24) $-(\pi-1)\dot{m}\dot{P}$, $-(\pi-2)\dot{m}\dot{Q}$, &c.

on les réduit à

$$\frac{dm}{dy}\left[(\pi-1).N\frac{dn}{dx}-m\frac{dP}{dx}+\tau 1 \rho\right]-\frac{dm}{dx}\left[(\pi-1).N\frac{dn}{dy}-m\frac{dP}{dy}-\sigma 1 \rho\right]=0,$$

$$\frac{dm}{dy}\left[(\pi-2).P\frac{dn}{dx}-m\frac{dQ}{dx}+\upsilon 1 \rho\right]-\frac{dm}{dx}\left[(\pi-2).P\frac{dn}{dy}-m\frac{dQ}{dy}-\tau 1 \rho\right]=0,$$

$$\frac{dm}{dy}\left[(\pi-3).Q\frac{dn}{dx}-m\frac{dR}{dx}+\varphi 1 \rho\right]-\frac{dm}{dx}\left[(\pi-3).Q\frac{dn}{dy}-m\frac{dR}{dy}-\upsilon 1 \rho\right]=0,$$

. . . .

$$\frac{dm}{dy}\left(3'Q\frac{dn}{dx}-m\frac{d'P}{dx}+'\sigma 1 \rho\right)-\frac{dm}{dx}\left(3'Q\frac{du}{dy}-m\frac{d'P}{dy}-'\tau 1 \rho\right)=0,$$

$$\frac{dm}{dy}\left(2'P\frac{dn}{dx}-m\frac{d'N}{dx}-'\rho 1 \rho\right)-\frac{dm}{dx}\left(2'P\frac{du}{dy}-m\frac{d'N}{dy}-'\sigma 1 \rho\right)=0,$$

$$\frac{dm}{dy}\left('N\frac{dn}{dx}-m\frac{d'M}{dx}\right)-\frac{dm}{dx}\left('N\frac{dn}{dy}-m\frac{d'M}{dy}-'\rho 1 \rho\right)=0;$$

auxquelles si on ajoute celles du *n.° 23*, après les avoir multipliées par $\frac{dm}{dx}$, on aura les équations du *n.° 24*, dont nous sommes partis.

(28.) Il reste encore l'équation $\dot{n}'\dot{M} = {}'\alpha\, 2\, \rho$ qui devient, en faisant pour simplifier $\frac{'\alpha 2}{\rho 1} = \alpha 3$, $\frac{dn}{dx} = m\alpha 3$, ou

$$\frac{dN}{dx} - (\pi - 1)\left(\int \frac{d\alpha}{dx}\, dy + \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f 1 : x}{\pi f 1 : x}\right) N = \pi e^{\pi \int \alpha dy} \left(\alpha 3 - \sigma 1\, \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x}\right) f 1 : x.$$

On mettra dans celle-ci pour N sa valeur, & on aura

$$\begin{aligned}\frac{f' 2 : x}{\pi f 1 : x} - \frac{\pi - 1}{\pi}\, \frac{f 2 : x}{f 1 : x}\left(\frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}\right) = \Big[&\frac{f'' 1 : x}{\pi f 1 : x} \\ &+ \frac{\pi - 1}{\pi}\, \frac{f' 1 : x}{f 1 : x}\left(\frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}\right)\Big] \int e^{\int \alpha dy}\, dy \\ &- \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x} \int e^{\int \alpha dy}\left(\beta 1 - 2\int \frac{d\alpha}{dx}\, dy\right) dy \\ &+ \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x}\left[(\pi - 1) . \int e^{\int \alpha dy}\left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx}\, dy\right) dy\right. \\ &\left. - \sigma 1\, e^{\int \alpha dy}\right] + \alpha 3\, e^{\int \alpha dy} - \int e^{\int \alpha dy}\Big[\frac{d\beta 1}{dx} \\ &- \int \frac{d^2\alpha}{dx^2}\, dy + \left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx}\right) dy . \int \frac{d\alpha}{dx}\, dy\Big] dy,\end{aligned}$$

dont le second membre étant différencié par rapport à y, doit être nul; on a donc

$$\begin{aligned}&\frac{f'' 1 : x}{\pi f 1 : x} + \frac{\pi - 1}{\pi}\, \frac{f' 1 : x}{f 1 : x}\left(\frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}\right) - \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}\left(\beta 1 - 2\int \frac{d\alpha}{dx}\, dy\right) \\ &\quad + \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x}\left[(\pi - 1)\left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx}\, dy\right) - \frac{d\sigma 1}{dy} - \alpha\sigma 1\right] = (X2) \ldots \\ &\quad \ldots \frac{d\beta 1}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2}\, dy + \left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx}\right) dy . \int \frac{d\alpha}{dx}\, dy - \frac{d\alpha 3}{dy} - \alpha\alpha 3.\end{aligned}$$

(29.) Avant de satisfaire à cette équation, nous remarquerons, qu'en mettant dans celles de l'avant-dernier numéro,

pour $\frac{dn}{dx}$ sa valeur $- m\alpha 3$, on en tirera

$$\gamma 1 = \alpha 3, \delta 1 = 0, \varepsilon 1 = 0 \ldots {}'\gamma 1 = 0, {}'\beta 1 = 0;$$

celles-ci indiquent que le numérateur de μ (*n.° 21*) doit être exactement divisible par le dénominateur, ce qui donne a pour quotient $\alpha z^2 + \beta 1 z + \gamma 1$. Alors, les valeurs de $\sigma 1$, $\tau 1$, &c. trouvées *n.° 22*, se présenteront sous la forme de $\frac{0}{0}$; mais on pourra toujours les déterminer au moyen des $\pi - 1$ équations du *n.° 25*.

(30.) Si pour satisfaire à l'équation du *n.° 28*, on suppose $\beta 1 - 2\int \frac{d\alpha}{dx} dy = x 1$, $x 1$ étant une fonction de x, on aura

$$(\pi - 1)(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) - \frac{d\sigma 1}{dy} - \alpha\sigma 1 = X 1 - x 1;$$

& l'équation dont il s'agissoit tout-à-l'heure, deviendra

$$\frac{f'' 1 : x}{\pi f 1 : x} + \frac{\pi - 1}{\pi} \frac{f' 1 : x}{f 1 : x} \left(\frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}\right) - x 1 \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x}$$
$$+ \frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x}(X 1 - x 1) = X 2,$$

où $X 2$ ne doit renfermer de variable que x. Ces deux conditions donnent pour équation intégrable celle dont nous nous sommes occupés *n.os 5 & 8;* alors on fera $\pi = 1$, $\sigma 1 = 0$, &c. d'où l'on tirera $X 1 = x 1$, & le reste comme dans les numéros cités. Mais si pour satisfaire à la même équation, on fait

$$\frac{\varphi' 1 : x}{\varphi 1 : x} + \frac{f' 1 : x}{\pi f 1 : x} = 0,$$

on la réduit à

$$f'' 1 : x - X 1 f' 1 : x = \pi X 2 f 1 : x;$$

& comme

& comme, à cauſe de

$$\frac{\varphi'' 1 : x}{\varphi' 1 : x} + \frac{\pi + 1}{\pi} \, \frac{f' 1 : x}{f 1 : x} = {}' X 1 ,$$

on a auſſi

$$f'' 1 : x = X 1 f' 1 : x ;$$

on trouve pour condition d'intégrabilité, que $X 2$ doit être nul. Cela poſé, l'équation

$$\frac{d\sigma 1}{dy} + \alpha \sigma 1 = \pi \beta 1 - (\pi + 1) \int \frac{d\alpha}{dx} dy - X 1 ,$$

donnera

$$\sigma 1 = e^{-\int \alpha dy} \left\{ \Delta 1 : x + \int e^{\int \alpha dy} \left[\pi \beta 1 - (\pi + 1) \int \frac{d\alpha}{dx} dy - X 1 \right] dy \right\} ;$$

après quoi on aura de ſuite

$$\tau 1 = e^{-2\int \alpha dy} \left\{ \Delta 2 : x + \int e^{2 \int \alpha dy} \left[(\pi - 1) . \gamma 1 + (\alpha \sigma 1 - \beta 1) . \sigma 1 + \sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \frac{d\sigma 1}{dx} \right] dy \right\} ,$$

$$\upsilon 1 = e^{-3\int \alpha dy} \left\{ \Delta 3 : x + \int e^{3 \int \alpha dy} \left[(\pi - 2) . \gamma 1 \sigma 1 + (\alpha \sigma 1 - 2 \beta 1) . \tau 1 + \tau 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \frac{d\tau 1}{dx} \right] dy \right\} ,$$

$$\rho 1 = e^{-4\int \alpha dy} \left\{ \Delta 4 : x + \int e^{4 \int \alpha dy} \left[(\pi - 3) . \gamma 1 \tau 1 + (\alpha \sigma 1 - 3 \beta 1) . \upsilon 1 + \upsilon 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \frac{d\upsilon 1}{dx} \right] dy \right\} ,$$

. . . .

$${}'\rho 1 = e^{-(\pi - 1)\int \alpha dy} \left\{ \Delta (\pi - 1) : x + \int e^{(\pi - 1) \int \alpha dy} \left[2 \gamma 1 {}'\tau 1 + (\alpha \sigma 1 - (\pi - 2) \beta 1) . {}'\sigma 1 + {}'\sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \frac{d {}'\sigma 1}{dx} \right] dy \right\} ;$$

& pour équation de condition

$$\frac{d {}'\rho 1}{dx} - {}'\rho 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \gamma 1 {}'\sigma 1 + [(\pi - 1) . \beta 1 - \alpha \sigma 1] {}'\rho 1 = 0 .$$

(31.) Soit $\pi = 2$, $\tau 1 = 0$, &c. on aura

$$\sigma 1 = e^{-\int \alpha dy} [\Delta 1 : x + \int e^{\int \alpha dy} (2 \beta 1 - 3 \int \frac{d\alpha}{dx} dy - X 1) dy];$$

& pour équations de condition,

$$\frac{d\sigma 1}{dx} - \sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \alpha (\sigma 1)^2 + \beta 1 \sigma 1 - \gamma 1 = 0,$$

$$\frac{d\beta 1}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} dy + (\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy - \frac{d\gamma 1}{dy} - \alpha \gamma 1 = 0.$$

Or, comme on peut tirer de la dernière

$$\gamma 1 e^{\int \alpha dy} = x 2 + \int e^{\int \alpha dy} [\frac{d\beta 1}{dx} - \int \frac{d^2 \alpha}{dx^2} dy + (\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy] dy,$$

& qu'on a auſſi

$$e^{\int \alpha dy} (\frac{d\sigma 1}{dx} + \sigma 1 \int \frac{d\alpha}{dx} dy) - \Delta' 1 : x + \int e^{\int \alpha dy} [\int \frac{d^2 \alpha}{dx^2} dy + X' 1 + (\int \frac{d\alpha}{dx} dy + X 1) \int \frac{d\alpha}{dx} dy] dy = 2 \int e^{\int \alpha dy} [\frac{d\beta 1}{dx} - \int \frac{d^2 \alpha}{dx^2} dy + (\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy] dy,$$

il eſt clair que

$$2 \gamma 1 = e^{-\int \alpha dy} \{ 2 x 2 - \Delta' 1 : x + \int e^{\int \alpha dy} [\int \frac{d^2 \alpha}{dx^2} dy + X' 1 + (\int \frac{d\alpha}{dx} dy + X 1) \int \frac{d\alpha}{dx} dy] dy \} + \frac{d\sigma 1}{dx} + \sigma 1 \int \frac{d\alpha}{dx} dy.$$

Mais $2 \beta 1 = \frac{d\sigma 1}{dy} + \alpha \sigma 1 + 3 \int \frac{d\alpha}{dx} dy + X 1$;

en ſubſtituant ces deux valeurs de $\beta 1$ & $\gamma 1$ dans la première équation de condition, elle deviendra

$$\frac{d\sigma 1}{dx} - \sigma 1 \frac{d\sigma 1}{dy} - \alpha (\sigma 1)^2 + \sigma 1 (2 \int \frac{d\alpha}{dx} dy + X 1) = (q) \ldots$$

$$\ldots e^{-\int \alpha dy} \{ 2 x 2 - \Delta' 1 : x + \int e^{\int \alpha dy} [X' 1 + \int \frac{d^2 \alpha}{dx} dy + (\int \frac{d\alpha}{dx} dy + X 1) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy] dy \}.$$

Pour intégrer celle-ci, nommons $\Gamma 1:x$, $\Gamma 2:x$, $\Gamma 3:x$, des fonctions de x, telles que

$$\frac{\Gamma'' 1:x}{\Gamma' 1:x} + 2\frac{f' 1:x}{f 1:x} = X1, \; \Gamma 2:x + \Gamma' 1:x \Gamma 3:x = 0,$$

$$\frac{\Gamma' 3:x}{f 1:x} = q e^{\int \alpha dy} - \int e^{\int \alpha dy}\left(\frac{dq}{dy} + \alpha q\right) dy = 2x2 - \Delta' 1:x;$$

on aura pour intégrale complète,

$$s - r\sigma 1 + \Theta : (S - R\sigma 1) = 0, \text{ où } r = R\Gamma 1:x,$$

$$s = S\Gamma 1:x + \Gamma 2:x - \Gamma' 1:x \int R dy, \; R = e^{\int \alpha dy} f 1:x,$$

$$S = \Gamma 3:x + f 1:x \int e^{\int \alpha dy}\left(X1 + \int \frac{d\alpha}{dx} dy\right) dy - f' 1:x \int e^{\int \alpha dy} dy.$$

Ainsi toutes les valeurs de $\beta 1$, qu'on pourra tirer de l'équation précédente, étant substituées dans

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \alpha z^2 + \beta 1 z + e^{-\int \alpha dy}\left\{x2 + \int e^{\int \alpha dy}\left[\frac{d\beta 1}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} dy + \left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy\right) . \int \frac{d\alpha}{dx} dy\right] dy\right\} = 0,$$

donneront autant d'équations, qui auront pour intégrale complète.

$$mz + n + F : (Mz^2 + Nz + P) = 0, \text{ où } m = M^{\frac{1}{2}} \varphi 1:x,$$

$$n = \frac{N}{2} M^{-\frac{1}{2}} \varphi 1:x + \frac{\varphi 2:x}{2} - \varphi' 1:x \int M^{\frac{1}{2}} dy, \; M = e^{2\int \alpha dy} f 1:x,$$

$$N = e^{\int \alpha dy}\left[f2:x + 2f1:x \int e^{\int \alpha dy}\left(\beta 1 - \int \frac{d\alpha}{dx} dy\right) dy - f' 1:x \int e^{\int \alpha dy} dy\right],$$

$$P = f3:x + \int\left(\frac{N}{m}\frac{dn}{dy} + 2\sigma 1 e^{2\int \alpha dy} f 1:x \frac{\varphi' 1:x}{\varphi 1:x}\right) dy,$$

$$\frac{\varphi' 2:x}{2\varphi' 1:x (f 1:x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f2:x}{f1:x} = \Delta 1:x, \; \frac{f' 2:x}{2 f 1:x} = x2, \text{ \&c.}$$

Mais, quoi qu'il en soit des nouveaux cas d'intégrabilité qu'on pourra tirer de cette supposition plus générale, quoiqu'encore très-limitée, les formules précédentes offrent une méthode d'approximation assez étendue, que nous détaillerons dans un Mémoire particulier.

MÉMOIRE
SUR
L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE,
Déterminée par les Obſervations faites à l'Obſervatoire royal de Paris, depuis 1739 juſqu'en 1778.

Par M. CASSINI le Fils.

Lû le 29 Août 1778.

L'OBLIQUITÉ de l'Écliptique eſt un des élémens de l'Aſtronomie ſur leſquels on a le plus écrit & publié un plus grand nombre d'Obſervations : il n'y a preſque point d'Obſervateur qui ne ſe ſoit occupé de cette recherche ; néanmoins nous ne ſommes pas encore entièrement d'accord ſur la grandeur abſolue de cet angle, ni ſur les variations qu'il peut éprouver.

Tant qu'il n'a été queſtion que de déterminer cette obliquité à la minute, rien n'étoit plus facile ; mais depuis que nos inſtrumens & notre manière d'obſerver ſe ſont perfectionnés, au point de nous permettre d'aſpirer à la préciſion des ſecondes, il n'en a plus été de même : en s'approchant de la vérité, on a vu naître les difficultés & augmenter l'incertitude ; c'eſt ce qui aura toujours lieu en Aſtronomie : plus nous approcherons des bornes, plus nous trouverons d'obſtacles pour les atteindre, plus nous nous apercevrons de leur diſtance ; & ſi quelque jour nous nous flattons d'y être arrivés, nous ne devrons ſans doute ce prétendu ſuccès qu'au manque de moyens d'apercevoir ce qui nous reſte encore à parcourir, & ce que les ſiècles à venir rendront un jour plus ſenſible.

Ce n'eſt ſans doute à dater que depuis une quarantaine d'années que l'on peut regarder comme ſuſceptibles d'une certaine exactitude les Obſervations faites pour déterminer l'obliquité abſolue de l'écliptique. En effet, ce n'eſt guère que vers cette époque, qu'on a apporté à la conſtruction des

inſtrumens & à leur diviſion un ſoin, une adreſſe & un ſcrupule capables de leur donner toute la préciſion requiſe: c'eſt donc de préférence aux Obſervations faites dans ces derniers temps qu'il faut s'en tenir pour déterminer l'élément dont il eſt queſtion.

Quant à la variation qui paroît avoir lieu dans la grandeur de cette obliquité, c'eſt une quantité ſi petite, que non-ſeulement il faut un grand nombre d'années pour qu'elle devienne ſenſible, mais encore pour être exactement déterminée, il faut que les Obſervations que l'on compare entre elles aient un même degré de préciſion; ce qui fait que pour cette détermination, nous ne pouvons pas tirer un grand avantage de la comparaiſon des Obſervations anciennes avec les nôtres, & qu'il faut s'en tenir encore à ces dernières: or nous ne diſſimulerons pas que quelque bien faites qu'on les ſuppoſe, elles ſont encore trop peu nombreuſes, & ne peuvent donner qu'un à peu-près dans la préſente recherche. Quoi qu'il en ſoit, j'ai penſé qu'il ſeroit toujours intéreſſant de connoître ce qui réſulte de ces quarante années d'Obſervations, faites avec le plus grand ſoin, dans un même lieu, par les mêmes inſtrumens, preſque toutes par le même Obſervateur, ou par d'autres qui avoient la même manière d'obſerver: cette identité dans tous les points doit certainement donner une grande préſomption de l'exactitude des réſultats.

Mon père a déjà rapporté dans pluſieurs Mémoires de l'Académie, & M. le Gentil dans le Volume de 1757, les hauteurs ſolſticiales du Soleil, obſervées à l'Obſervatoire royal en diverſes années, avec leurs réſultats. J'ai entrepris de raſſembler toutes ces Obſervations, de les recalculer, d'y ajouter toutes celles que j'ai trouvées dans les regiſtres originaux & qui n'ont pas été publiées, de les comparer toutes enſemble, & de former de leurs réſultats différens tableaux qui ne pourront manquer d'être intéreſſans pour les Savans, en les mettant à portée de prendre connoiſſance d'un ſeul coup-d'œil des travaux faits ſur cette matière, & de fixer leur opinion.

Pour rendre l'inſpection de ces Tables plus inſtructive, j'ai penſé qu'il ne ſuffiſoit pas de préſenter les réſultats iſolés, & de marquer, par exemple, qu'en telle année l'obliquité de l'écliptique a été trouvée de telle quantité. Les circonſtances n'étant pas toujours les mêmes, ni également favorables, la connoiſſance de ces circonſtances devient auſſi importante que les réſultats même : on trouvera donc à côté de chaque réſultat tout ce qui peut concourir à faire juger ſi le réſultat eſt exact ou douteux.

J'ai diviſé ce Mémoire en quatre articles.

§. I.

De l'obliquité de l'Écliptique, déduite de l'Obſervation des hauteurs méridiennes du Soleil vers le Solſtice d'été.

Les hauteurs méridiennes du Soleil, priſes au mois de Juin, pluſieurs jours avant & pluſieurs jours après celui du ſolſtice, ſont les plus favorables lorſqu'elles ſont faites avec l'attention requiſe & avec de grands inſtrumens, pour déterminer l'obliquité abſolue de l'écliptique. Le Soleil, ſous la latitude de Paris, ayant alors près de 65 degrés de hauteur, n'eſt point ſujet à l'irrégularité de la réfraction qui a lieu plus proche de l'horizon ; & cette réfraction, à la hauteur de 65 degrés, eſt bien déterminée.

Depuis l'année 1739 juſqu'en l'année 1748, on a employé à l'Obſervatoire pour l'Obſervation des hauteurs ſolſticiales, un ſecteur de 6 pieds de rayon, fait par Langlois à l'occaſion de la vérification de la méridienne : la bonté de cet inſtrument a été reconnue dans toutes les opérations nombreuſes auxquelles on l'a employé.

En 1743, on commença à faire uſage plus particulièrement d'un excellent quart-de-cercle de 6 pieds, armé de deux lunettes, fixées l'une à l'extrémité du limbe, & l'autre vers le 49.e : c'eſt de cet inſtrument, fait avec toute l'habileté & le ſoin dont étoit capable le ſieur Langlois, dont on s'eſt ſervi ſans diſcontinuité juſqu'à ce jour, employant tantôt

une lunette & tantôt l'autre, la face du limbe étant tournée tantôt vers l'Orient & tantôt vers l'Occident, ce qui procure les vérifications les plus complètes pour la correction des hauteurs. J'ai eu soin de marquer dans la Table suivante de quelle lunette on s'est servi dans chaque Observation, & l'angle de cette lunette tel qu'on l'a vérifié ou supposé, & de plus le sens dans lequel l'instrument étoit tourné, afin que si l'on exige une parfaite identité dans les Observations que l'on voudra comparer, on puisse ne choisir que celles qui ont été faites à la même lunette, avec le même micromètre, & l'instrument tourné dans le même sens.

Les élémens que j'ai employés dans le calcul de l'obliquité de l'écliptique, rapportés dans la Table suivante, sont ceux-ci.

Réfraction	—	0^d	$0'$	$27'',0$.
Parallaxe	+	0.	0.	3,4.
Demi-diamètre	—	0.	15.	47,2.
Hauteur de l'Équateur	41.		9.	48.

De sorte que la somme de ces élémens est de $41^d\ 25'\ 58,''8$; quantité constante qu'il faut retrancher de la hauteur solsticiale du bord supérieur du Soleil, pour avoir l'obliquité de l'écliptique apparente.

Les années marquées par une étoile, sont celles où le temps n'a pas été favorable, ou bien dans lesquelles les observations ont été peu d'accord entr'elles.

La Lettre *H* indique la Lunette qui est fixée à l'extrémité du limbe.

La Lettre *M* indique celle qui est fixée vers le 49.e degré.

TABLE I.

ANNÉES.	NOMBRE des OBSERVATIONS.	DIFFÉRENCE du plus petit au plus grand RÉSULTAT.	LUNETTE avec laquelle on a observé le LIMBE de l'Instrument, faisant face à l'ORIENT ou à l'OCCIDENT.	ANGLE de la LUNETTE vérifié ou supposé.	HAUTEUR solsticiale du bord supérieur du SOLEIL.	OBLIQUITÉ de L'ÉCLIPTIQUE — APPARENTE.	NUTATION	VRAIE.
		Second.		*Deg. Min. Sec.*	*Deg. Min. Sec.*	*Deg. Min. Sec*	*Second.*	*Deg. Min. Sec.*
1739[a]	5	2,9		26. 23. 2,2 *vér.*	66. 39. 27,8	23. 28. 20,0	+ 5,0	23. 28. 25,6
1740	9	5,8		26. 23. 9,0 *vér.*	64. 54. 25,9	23. 28. 26,6	+ 2,2	23. 28. 28,2
1741*	9	17,0		26. 23. 5,9 *vér.*	64. 54. 31,7	23. 28. 32,9	— 0,6	23. 28. 32,3
1742	7	6,3		26. 23. 9,2 *vér.*	64. 54. 24,8	23. 28. 26,0	— 3,6	23. 28. 22,4
1743*	4	4,8		26. 23. 18,6 *vér.*	64. 54. 35,9	23. 28. 37,1	— 6,2	23. 28. 30,9
1748*	12	18,2		26. 23. 6,6 *vér.*	64. 54. 28,4	23. 28. 29,6	— 5,7	23. 28. 23,9
1743	7	5,7	M. *occid.*	49. 25. 36,6 *vér.*	64. 54. 29,4	23. 28. 30,6	— 6,1	23. 28. 24,5
1744	3	6,5	M. *occid.*	49. 25. 37,6 *vér.*	64. 54. 34,7	23. 28. 29,8	— 7,9	23. 28. 21,9
	9	10,8	M. *orient.*		64. 54. 22,6	2 28. 29,8	— 7,9	23. 28. 21,9
1745*	6	7,1	H. *orient.*	90. 0. 59,4 *sup.*	64. 54. 14,8	23. 28. 16,0	— 8,9	23. 28. 7,1
1746	5	2,6	H. *orient.*	90. 1. 0, *vér.*	64. 54. 17,8	23. 28. 19,0	— 8,8	23. 28. 10,2
1747	7	4,6	H. *orient.*	90. 1. 2,5 *sup.*	64. 54. 22,0	23. 28. 23,2	— 7,7	23. 28. 15,5
1748	3	4,3	H. *orient.*	90. 1. 2,5 *vér.*	64. 54. 12,0	23. 28. 16,3	5,7	23. 28. 10,6
	3	4,4	M. *orient.*	49. 25. 45,8 *sup.*	64. 54. 14,5	23. 28. 16,3	— 5,7	23. 28. 10,6
	4	3,8	H. *occid.*	90. 1. 2,5 *vér.*	64. 54. 21,1	33. 28. 16,3	— 5,7	23. 28. 10,6
1749*	5	10,3	H. *orient.*	90. 0. 5,4 *sup.*	64. 54. 4,8	23. 28. 6,0	— 3,1	23. 28. 2,9
1750	6	3,5	H. *orient.*	99. 00. 54,6 *vér.*	64. 54. 10,5	23. 28. 12,4	— 0,1	23. 28. 12,3
	2	1,9	M. *orient.*	49. 25. 37,6 *vér.*	64. 54. 12,0	23. 28. 12,4	— 0,1	23. 28. 12,3
1751	9	6,7	M. *orient.*	49. 25. 40,4 *sup.*	64. 54. 8,0	23. 28. 9,2	+ 2,8	23. 28. 12,0
1752*	11	13,1	M. *orient.*	49. 25. 42,9 *vér.*	64. 53. 57,2	23. 27. 58,4	+ 5,4	23. 28. 3,8
1753	10	7,0	M. *orient.*	49. 25. 43,5 *vér.*	64. 53. 52,5	23. 27. 53,7	+ 7,5	23. 28. 1,2
1754	7	7,1	M. *orient.*	49. 25. 40,5 *sup.*	64. 53. 53,1	23. 27. 54,3	+ 8,7	23. 28. 3,0
1755	7	2,6	M. *orient.*	49. 25. 37,5 *vér.*	64. 53. 56,8	23. 27. 58,0	+ 8,9	23. 28. 6,9
1756	11	5,8	M. *orient.*	49. 25. 37,5 *sup.*	64. 53. 59,5	23. 28. 0,7	+ 8,1	23. 28. 8,8
1758*	7	8,6	H. *orient.*	90. 1. 0,0 *sup.*	64. 54. 9,6	23. 28. 10,8	+ 3,9	23. 28. 14,7
1763	2	0,1	H. *orient.*	90. 1. 0,0 *sup.*	64. 54. 25,0	23. 28. 26,2	— 8,4	23. 28. 17,8
1764*	8	12,0	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 54. 22,0	23. 28. 23,2	— 9,0	23. 28. 14,2
1765	4	1,3	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 54. 25,0	23. 28. 26,2	— 8,5	23. 28. 17,7
1766	3	3,2	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 54. 13,0	23. 28. 14,2	— 7,0	23. 28. 7,2
1767	5	6,5	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 54. 14,0	23. 28. 15,2	+ 4,8	23. 28. 10,4
1770*	3	4,0	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 53. 59,0	23. 28. 0,2	+ 3,9	23. 28. 4,1
1771*	3	5,0	H. *orient.*	90. 1. 1,0 *sup.*	64. 54. 3,2	23. 28. 4,4	+ 6,3	23. 28. 10,7
1772	4	4,1	H. *orient.*	90. 1. 2,0 *sup.*	64. 53. 46,7	23. 27. 47,9	+ 8,1	23. 27. 56,0
1773	3	2,5	H. *orient.*	90. 1. 2,0 *sup.*	64. 53. 46,9	23. 27. 48,1	+ 8,9	23. 27. 57,0
1774	7	7,4	H. *orient.*	90. 1. 2,0 *vér.*	64. 53. 46,5	23. 27. 47,7	+ 8,7	23. 27. 56,4
1775*	5	9,4	H. *orient.*	90. 1. 2,0 *sup.*	64. 53. 40,8	23. 27. 42,0	+ 7,6	23. 27. 49,6
1776	5	3,0	H. *orient.*	90. 1. 2,0 *sup.*	64. 53. 51,1	23. 27. 52,3	+ 5,6	23. 27. 57,9
1777	8	4,6	H. *orient.*	90[b] 1. 20,0 *vér.*	64. 53. 49,0	23. 27. 50,2	+ 2,9	23. 27. 53,1
1778	8	4,2	M. *orient.*	49. 25. 46,5 *vér.*	64. 53. 54,0	23. 27. 55,2	+ 0,0	23. 27. 55,2

[a] A Bourges.

[b] L'angle des Lunettes a été altéré cette année-ci par le transport de l'instrument qu'il a fallu déplacer à l'occasion de la reconstruction des Cabinets.

Auparavant

Auparavant de comparer entr'eux les résultats de la Table précédente, il faut nécessairement faire un choix, n'admettre que ceux qui peuvent avoir le degré d'exactitude requise pour une recherche si délicate, & rejeter tous les autres; c'est ce qu'il est très-facile de faire, d'après l'inspection même de la Table. En effet, j'ai eu soin de rapporter dans une colonne particulière le nombre des Observations qui ont concouru à donner chaque résultat moyen, & il est très-certain que plus le nombre des Observations a été grand, plus le résultat doit être exact : toute année où il y a eu moins de quatre Observations, ne me semble pas devoir concourir à la détermination précise de l'élément cherché; car le grand nombre d'Observations que ce travail m'a mis dans le cas de comparer, m'a fait reconnoître qu'il est très-possible que trois Observations, même d'accord ensemble, donnent un résultat éloigné du véritable de 4 & 5 secondes.

De plus, le nombre des Observations ne suffit pas à connoître pour faire juger de l'exactitude du résultat; tout dépend de leur accord : c'est aussi ce qui m'a engagé à marquer à côté du nombre des Observations la différence entre les deux plus éloignées; ce qui fait connoître tout de suite si les Observations ont été d'accord entr'elles. Il m'a paru que l'on pouvoit adopter ici cette règle; que pour constituer un bon résultat, il faut que les deux extrêmes, ou la quantité de secondes dont le plus petit diffère du plus grand, soit moindre que le nombre des Observations. D'après ces principes, la Table générale se trouve réduite à celle-ci, qui ne renferme que les résultats les plus exempts d'incertitude, c'est-à-dire qui nous paroissent déduits des Observations faites dans les circonstances les plus favorables & les plus propres à mériter la confiance.

TABLE II.

ANNÉES.	OBLIQUITÉ vraie DE L'ÉCLIPTIQUE.	
	Deg. Min. Second.	Deg. Min. Sec.
1739.	23. 28. 25,6	23. 28. 26.
1740.	23. 28. 28,0	
1742.	23. 28. 22,4	
1743.	23. 28. 24,5	
1744.	23. 28. 21,9	
1750.	23. 28. 12,3	
1751.	23. 28. 12,0	
1755.	23. 28. 6,9	23. 28. 8.
1756.	23. 28. 8,8	
1772.	23. 27. 56,0	
1773.	23. 27. 57,0	
1774.	23. 27. 56,4	
1776.	23. 27. 57,9	
1777.	23. 27. 53,1	23. 27. 54.
1778.	23. 27. 55,2	

§. II.

De l'obliquité de l'Écliptique, déduite des Obſervations des hauteurs méridiennes du Soleil vers le Solſtice d'hiver.

On ne doit point s'attendre à trouver la même préciſion dans le réſultat des Obſervations faites au ſolſtice d'été & au

ſolſtice d'hiver. La hauteur méridienne du Soleil vers le 21 Décembre, n'eſt, ſous la latitude de Paris, que de 18 degrés; & à cette hauteur & dans cette ſaiſon, la réfraction éprouve ſouvent de grandes variations d'un moment à l'autre : la quantité de cette réfraction ne peut donc être bien déterminée, & l'incertitude de cet élément peut influer ſenſiblement ſur l'obliquité de l'écliptique qu'on déduit des hauteurs ſolſticiales d'hiver; d'ailleurs le mauvais temps qui règne ordinairement vers la fin de Décembre, ne permet d'avoir qu'un petit nombre d'Obſervations; j'ai trouvé néanmoins un plus grand accord dans les réſultats que je n'aurois oſé l'eſpérer.

Toutes les Obſervations rapportées dans la Table ſuivante ont été faites au même quart-de-cercle mobile de 6 pieds & avec la même lunette, celle qui eſt fixée à l'extrémité du limbe. A l'obliquité de l'écliptique, déduite des hauteurs ſolſticiales obſervées en hiver, j'ai joint celle qui réſulte de la comparaiſon des hauteurs obſervées dans les deux ſolſtices d'hiver & d'été.

J'ai ſuppoſé dans le calcul,

La réfraction de	—	0^d	2′	53″,5.
La parallaxe	+	0.	0.	8,1.
Le demi-diamètre	+	0.	16.	19,3.

Ainſi l'on aura $0^d\ 19'\ 4'',7$ pour quantité conſtante à retrancher de toutes les hauteurs ſolſticiales du bord ſupérieur du Soleil : le reſte étant retranché de la hauteur de l'Équateur, donnera l'obliquité apparente.

TABLE III. Au folftice d'Hiver.

ANNÉES.	NOMBRE des OBSERVATIONS.	DIFFÉRENCE du plus petit au plus grand RÉSULTAT.	ANGLE de la LUNETTE vérifié ou fuppofé.	HAUTEUR folfticiale du bord fupérieur du SOLEIL.	OBLIQUITÉ de L'ÉCLIPTIQUE APPARENTE.	NUTATION.	VRAIE.	OBLIQUITÉ vraie, déduite de la comparaifon des folftices d'HIVER & d'ÉTÉ.
		Second.	*Deg. Min. Sec.*	*Deg. Min. Sec.*	*Deg. Min. Sec.*	*Sec.*	*Deg. Min. Sec.*	*Deg. Min. Sec.*
1743	5	1,8	90. 0. 58,5 *vér.*	18. 0. 18,9	23. 28. 33,5	— 7,1	23. 28. 26,7	23. 28. 25,6
1744	6	8,6	90. 1. 0, *fup.*	18. 0. 17,7	23. 28. 35,0	— 8,5	23. 28. 26,5	23. 28. 24,7
1745*	3	6,1	90. 1. 0, *fup.*	18. 0. 17,7	23. 28. 35,0	— 8,9	23. 28. 26,1	23. 28. 16,6
1746	4	4,6	90. 1. 0, *vér.*	18. 0. 17,8	23. 28. 35,0	— 8,3	23. 28. 26,6	23. 28. 18,4
1748	5	7,4	90. 1. 8, *vér.*	18. 0. 17,8	23. 28. 34,9	— 4,5	23. 28. 30,4	23. 28. 20,5
1749	5	5,9	90. 1. 8, *fup.*	18. 0. 21,0	23. 28. 31,7	— 1,6	23. 28. 30,1	23. 28. 16,5
1750	4	2,4	90. 0. 52, *vér.*	18. 0. 34,3	23. 28. 18,4	+ 1,3	23. 28. 19,7	23. 28. 16,5
1752	4	4,8	90. 0. 53, *vér.*	18. 0. 35,9	23. 28. 16,8	+ 6,6	23. 28. 23,4	23. 28. 13,6
1753	7	3,1	90. 0. 53, *fup.*	18. 0. 42,7	23. 28. 10,0	+ 8,2	23. 28. 18,2	23. 28. 9,6
1754*	7	10,1	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 42,0	23. 28. 10,7	+ 8,9	23. 28. 19,6	23. 28. 11,3
1763*	5	11,3	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 38,6	23. 28. 14,1	— 8,8	23. 28. 5,3	23. 28. 11,5
1764*	3	5,8	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 37,9	23. 28. 14,8	— 8,7	23. 28. 6,1	23. 28. 10,1
1765	1	0,0	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 42,0	23. 28. 10,7	— 7,9	23. 28. 2,8	23. 28. 10,2
1766	5	5,5	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 39,5	23. 28. 13,2	— 6,0	23. 28. 7,0	23. 28. 7,1
1767*	5	10,8	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 46,6	23. 28. 6,1	— 3,4	23. 28. 2,7	23. 28. 6,5
1768	1	0,0	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 49,4	23. 28. 3,3	— 0,5	23. 28. 2,8	
1770	1	0,0	90. 1. 1, *fup.*	18. 0. 49,8	23. 28. 2,9	+ 5,2	23. 28. 8,1	23. 28. 6,2
1772*	4	7,9	90. 1. 2, *fup.*	18. 0. 50,7	23. 28. 2,0	+ 8,6	23. 28. 10,6	23. 28. 0,3
1773	3	4,4	90. 1. 2, *fup.*	18. 0. 46,4	23. 28. 6,3	+ 8,9	23. 28. 15,2	23. 28. 6,1
1774*	6	11,9	90. 1. 2, *vér.*	18. 0. 48,0	23. 28. 4,7	— 8,3	23. 28. 11,0	23. 28. 3,5
1775	4	6,5	90. 1. 2, *fup.*	18. 1. 7,0	23. 27. 45,7	+ 8,6	23. 27. 52,3	

Le choix entre les réfultats que renferme la Table précédente eft d'autant plus difficile à faire, qu'il y a prefque toujours eu un très-petit nombre d'Obfervations, & que la différence des réfultats extrêmes a prefque toujours égalé & même furpaffé ce nombre des Obfervations ; mais ce qui doit le plus décider en faveur de l'exactitude de l'obliquité de

l'écliptique ci-dessus rapportée, c'est lorsqu'elle se trouve conforme ou à peu-près la même que celle qui a été conclue des Observations faites au solstice d'été: or on rencontre plus d'une fois cette conformité, comme le prouve l'inspection de la petite Table suivante.

TABLE IV.

ANNÉES.	OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE VRAIE. Par le Solstice d'Été.	Par le Solstice d'Hiver.
	Deg. Min. Sec.	*Deg. Min. Sec.*
1743.	23. 28. 24,5	23. 28. 26,7
1744.	23. 28. 21,9	23. 28. 26,5
1766.	23. 28. 7,2	23. 28. 7,0
1770.	23. 28. 4,1	23. 28. 8,1
1771.	23. 28. 10,7	
1772.	....	23. 28. 10,6
1775.	23. 28. 49,6	23. 28. 52,3

§. III.

Des variations de l'obliquité de l'Écliptique, déterminée à différentes époques.

Tous les résultats précédens concourent à faire reconnoître une diminution réelle & sensible dans l'obliquité de l'écliptique depuis 1739 jusqu'à ce jour: en vain objecteroit-on l'erreur des Observations, elle ne peut être aussi considérable; on s'est toujours servi du même instrument: d'ailleurs, seroit-il possible que les erreurs fussent toujours dans le même sens &

donnaſſent toujours une obliquité décroiſſante auſſi uniformément que le préſente la Table II & la dernière colonne de la Table III?

Je me crois fondé, d'après le grand nombre des Obſervations, leur accord & toutes les circonſtances faites pour inſpirer la confiance, de regarder comme déterminée auſſi exactement qu'on puiſſe le faire l'obliquité de l'écliptique vers 1739, de 23ᵈ 28′ 26″, & vers ces dernières années-ci, de 23ᵈ 27′ 54″ : cette obliquité auroit donc diminué, dans un intervalle de trente-neuf ans, d'environ une demi-minute ou 32 ſecondes.

Dans les années 1755 & 1756, les Obſervations furent très-nombreuſes, eurent le plus grand accord, & dûrent par conſéquent donner un réſultat très-exact. Si donc je compare ce réſultat avec ceux de 1739 & 1778, je trouve que

de 1739 à 1755, c'eſt-à-dire en 16 ans, la diminution a été de 18″,

& de 1755 à 1778, c'eſt-à-dire en 23 ans, elle n'a été que de 14″,

ce qui ſembloit indiquer que cette diminution de l'obliquité n'a pas une marche égale, comme mon père l'avoit déjà remarqué.

Il ſeroit inutile de comparer des Obſervations moins éloignées, puiſque plus les intervalles ſeront petits, moins la variation ſera ſenſible, & plus alors elle ſera dans le cas d'être affectée des erreurs de l'Obſervation. J'ai pris les trois époques de 1739, 1755 & 1778, parce qu'il me ſemble qu'il n'eſt pas poſſible de donner une plus grande exactitude & un plus grand accord qu'il y en a eu dans les Obſervations faites en ces trois années.

M. le Chevalier de Louville, dans le Volume de nos Mémoires, *année 1721, page 167,* rapporte trois Obſervations de hauteurs méridiennes du Soleil, priſes le 20, le 22 & le 23 Juin de la même année : ces trois Obſervations donnent, par un milieu, l'obliquité de l'écliptique apparente de 23ᵈ 28′ 12″,6, & la vraie 23ᵈ 28′ 9″,3. (On ſe doute bien que j'ai recalculé ces Obſervations avec les mêmes élémens que ceux dont je me ſuis ſervi ci-deſſus.) Or ſi l'on

compare cette obliquité de l'écliptique, trouvée par les Obſervations de M. le Chevalier de Louville, avec celle qui réſulte des Obſervations faites à l'Obſervatoire royal, on trouvera que

de 1721 à 1739, c'eſt-à-dire au bout de 18 ans, l'obliquité s'eſt trouvé augmentée de 16 ſecondes,

de 1721 à 1755, c'eſt-à-dire au bout de 34 ans, l'obliquité n'auroit eu aucune variation, ou du moins retrouvé la même;

de 1721 à 1778, c'eſt-à-dire au bout de 57 ans, l'obliquité a diminué de 15 ſecondes.

L'inégalité de pareils réſultats qui ne peuvent être raiſonnablement admis, ne me ſert ici qu'à prouver combien il eſt eſſentiel dans la préſente recherche de ne comparer que les Obſervations ſuſceptibles d'un même degré d'exactitude: M. le Chevalier de Louville obſervoit avec un quart-de-cercle probablement de 2 ou 3 pieds; ſa lunette à la vérité étoit armée d'un micromètre, mais ce quart-de-cercle n'étoit ſûrement pas auſſi bien diviſé que le ſont aujourd'hui les nôtres; ſon micromète n'étoit ſans doute pas auſſi bien exécuté: d'ailleurs ſur les trois ſeules Obſervations qu'il rapporte, il y a 8 ſecondes de différence entre les réſultats extrêmes. Il n'y a donc aucune exactitude à attendre de la comparaiſon de pareilles Obſervations avec les nôtres, faites pendant un intervalle de trente-neuf ans, pour la plupart en très-grand nombre & avec beaucoup d'accord entr'elles, toujours avec le même inſtrument de ſix pieds de rayon, le mieux exécuté qui ſoit ſorti des mains du célèbre Langlois. Nous nous épargnerons donc de faire un plus grand nombre de comparaiſons qui ne pourroient nous mener à des réſultats ſuffiſamment exacts; nous ne donnerons même à ceux que nous avons tirés de nos propres Obſervations que le degré de confiance dont ils ſont ſuſceptibles, en attendant du temps leur confirmation ou leur rectification.

§. IV.

Des variations de l'obliquité de l'Écliptique, déterminées par la comparaison du Soleil dans le Solstice, à des Étoiles voisines du Tropique.

Une des meilleures méthodes sans doute pour déterminer les variations de l'obliquité de l'écliptique, est de comparer la distance du Soleil dans le Tropique à quelque point fixe pris dans le ciel, & ce point est une Étoile dont on prend exactement la hauteur, ainsi que celle du Soleil.

Ce moyen a cet avantage, que nous pouvons comparer avec un peu plus de confiance nos Observations actuelles avec les Observations plus anciennes, parce que la différence de la perfection des instrumens influe moins sur cette détermination que sur les autres.

Dans cette vue, on avoit toujours eu soin à l'Observatoire de comparer le Soleil dans le solstice d'été à la belle étoile *Arcturus*, qui ne se trouve éloignée du Tropique que d'environ 3 degrés $\frac{1}{3}$; mais lorsqu'on se fut aperçu qu'*Arcturus* avoit un mouvement particulier, & ne pouvoit plus par conséquent être regardé comme un point fixe dans le ciel, il fallut chercher une autre étoile, & mon père choisit celle de β d'Hercule, qui est de la troisième grandeur, qui ne paroît avoir aucun mouvement particulier, & qui se trouve même plus proche du Tropique qu'*Arcturus*. Il n'y a que quelques années que l'on s'est adonné à observer cette étoile; je m'y suis particulièrement appliqué au dernier solstice; & par un milieu entre sept Observations parfaitement d'accord, j'ai trouvé

La hauteur apparente de β d'Hercule.........	63d 9′ 29″,5.
La hauteur du bord supérieur du Soleil.......	64. 53. 54,7.
Donc la distance apparente du bord supérieur du Soleil dans le solstice, à l'étoile en 1778..	1. 44. 25,2.

Or

Or j'ai trouvé dans les Regiſtres originaux de l'Obſervatoire, une pareille comparaiſon du Soleil & de β d'Hercule, faite au temps du ſolſtice en 1689.

Par un milieu entre ſix obſervations très-d'accord entr'elles, hauteur ſolſticiale du bord ſupérieur du Soleil	64^d 56′ 13″,7.
Hauteur apparente de β d'Hercule	63. 23. 30.
Donc diſtance du bord ſupérieur du Soleil à l'Étoile en 1689	1. 32. 43,7.
Nous l'avons trouvée en 1778	1. 44. 25,2.
La différence eſt de	0. 11. 41,5.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation dans les deux années, ſe réduit à	0. 11. 43,9.
Mais par ſon mouvement de préceſſion, que pour plus d'exactitude j'ai calculé de vingt ans en vingt ans, la déclinaiſon ou la hauteur de β d'Hercule a dû diminuer en quatre-vingt-neuf ans, de	0. 12. 40,4.
Reſte donc pour la quantité dont le bord ſupérieur du Soleil s'eſt rapproché de l'Étoile en quatre-vingt-neuf ans	0. 0. 56,5.

En 1681, M. Picard *(voy. Hiſt. Céleſte de M. le Monnier)* obſerva le 19 & le 21 Juin, la hauteur méridienne du bord ſupérieur du Soleil; d'où l'on conclud, en donnant la préférence à l'obſervation du 19, qui eſt marquée *bonne,*

La hauteur ſolſticiale	64^d 55′ 12″.
La hauteur de β d'Hercule, obſervée le 14 Juillet, fut trouvée de	63. 24. 0.
Donc diſtance du bord ſupérieur du Soleil à l'Étoile en 1681	1. 31. 12.
Nous l'avons trouvée en 1778	1. 44. 25,2.
La différence eſt	0. 13. 13,2.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation dans les deux époques, ſe réduit à	0. 13, 15,5.

Mais par ſon mouvement de préceſſion, l'Étoile a dû ſe rapprocher de l'Équateur en quatre-vingt-dix-ſept ans........................	0^{d} 13′ 50″,5.
Reſte donc pour la quantité dont le bord du Soleil s'eſt rapproché de l'Étoile en quatre-vingt-dix-ſept ans........................	0. 0. 35,0.

Enfin on trouve une comparaiſon encore plus ancienne du Soleil & de β d'Hercule, faite par M. Picard en 1669: cet Aſtronome obſerva les 19, 20 & 21 Juin, les hauteurs méridiennes du Soleil, qui donnent par un milieu,

La hauteur ſolſticiale du bord ſupérieur du Soleil..	64^{d} 52′ 57″6.
Hauteur méridienne de β d'Hercule...........	63. 23. 0.
Diſtance du bord du Soleil à l'Étoile en 1669.	1. 29. 57,6.
Nous l'avons trouvée en 1778.............	1. 44. 25,2.
La différence eſt de..................	0. 14. 27,6.

Il n'eſt pas néceſſaire de corriger la différence des effets de la nutation, qui ont été les mêmes quant à leur ſomme dans les deux époques.

Or par ſon mouvement de préceſſion, l'Étoile a dû ſe rapprocher de l'Équateur, en cent neuf ans, de..	15′ 34″
Reſte donc pour la quantité dont le Soleil s'eſt rapproché de l'Étoile en cent neuf ans..........	1. 6,4,

L'obſervation de 1689, indiqueroit donc une diminution de l'obliquité de l'Écliptique en cent ans, de..	63″.
celle de 1681 *..........................	36.
celle de 1669..........................	61.

J'aurois deſiré pouvoir trouver des Obſervations plus nombreuſes, & même plus anciennes, pour en faire la comparaiſon

* J'ai tout lieu de regarder comme douteux le réſultat de cette année; outre qu'il s'éloigne conſidérablement des deux autres, il eſt à remarquer 1.° qu'il n'y a eu qu'une ſeule Obſervation du Soleil qui ait été jugée bonne par l'Obſervateur; 2.° la hauteur de β d'Hercule n'a été priſe que vingt jours après le ſolſtice, & à ce qu'il paroît ſans intention directe de la comparer au Soleil.

avec les nôtres de ces dernières années, mais je n'en ai point trouvé.

Il est à remarquer que la détermination que j'ai fait cette année de l'obliquité de l'Écliptique, comparée à celle de 1755, donne la diminution de l'obliquité en vingt-trois ans, de 14",

Et par conséquent par siècle, de.................... 60".

Il paroît donc que si la supposition que nous avons faite, que l'étoile β d'Hercule n'a aucun mouvement particulier, est véritable, le Soleil s'est rapproché de cette étoile, ou l'obliquité de l'Écliptique a diminué d'environ une minute dans un siècle. Pour confirmer ou rectifier ce résultat, j'ai entrepris de faire usage des Observations d'*Arcturus*, & de chercher ce que nous donneroit la comparaison de cette Étoile au Soleil, en supposant qu'*Arcturus* eût un mouvement particulier, mais connu & déterminé.

Par la comparaison des Observations de Flamsteed & de M. l'Abbé de la Caille, *Arcturus*, de 1690 à 1750, a eu outre son mouvement de précession en déclinaison de 17' 7",2, un mouvement particulier de 2' 13",8, à raison de 22",3 pour dix ans. J'ai rassemblé toutes les Observations de cette Étoile, faites depuis trente-cinq ans à l'Observatoire avec le même instrument ou quart-de-cercle mobile de 6 pieds, à deux lunettes, & j'ai calculé toutes ces Observations, au nombre de deux cents cinquante, que j'ai toutes réduites au 20 Juin de chaque année : il seroit trop long de rapporter ici une suite d'Observations aussi considérable ; on la trouvera dans un autre Ouvrage : il me suffira de dire que j'ai trouvé

en 1743, la distance d'*Arcturus* au zénith de l'Observatoire le 20 Juin................	28^d 17' 50".
(vraie mais non corrigée de la réfraction)	
Par mes Observations en 1778..............	28. 29. 1,3.
Différence........................	0. 11, 11,3.
Les loix de la précession ne la donnent que de..	0. 10. 2,1.
Le mouvement propre d'*Arcturus* a donc été en trente-cinq ans........................	0. 1. 9,2.

C'eſt à raiſon de 19″,8 pour dix ans. L'intervalle de nos Obſervations à la vérité n'eſt pas auſſi conſidérable que celui des Obſervations de Flamſteed & de la Caille; mais les nôtres ont ſur celles-ci l'avantage d'avoir été faites dans le même lieu, avec le même inſtrument, la même lunette & le même micromètre: au reſte, je ſuppoſerai, par un milieu entre les Obſervations de Flamſteed, de la Caille & les nôtres, le mouvement particulier d'*Arcturus* en déclinaiſon de 21 ſecondes pour dix ans. Cela poſé, j'ai penſé qu'on verroit ici avec plaiſir une Table de toutes les diſtances obſervées d'*Arcturus* au Soleil dans le ſolſtice depuis 1743 juſqu'en 1778; j'y ai joint en même temps les ſemblables réſultats de la comparaiſon de β de la Baleine au Soleil dans le ſolſtice d'hiver depuis 1748 juſqu'en 1776.

ANNÉES	DISTANCE d'*ARCTURUS* au bord ſupér. du SOLEIL.	DISTANCE de β de la Baleine au bord ſupér. du SOLEIL.	ANNÉES	DISTANCE d'*ARCTURUS* au bord ſuper. du SOLEIL.	DISTANCE de β de la Baleine au bord ſupér. du SOLEIL.
1743.	3ᵈ 12′ 12″,3		1758.	3ᵈ 16′ 38″,1	
1744.	3. 12. 39,5		1764.	3. 18. 50,0	
1745.	3. 13. 1,2		1765.	3. 19. 19,3	
1746.	3. 13. 15,1		1766.	3. 19. 30,4	3ᵈ 55′ 32″,6
1747.	3. 13. 41,0		1767.	3. 19. 51,3	3. 55. 25,9
1748.	3. 13. 53,0	3ᵈ 49′ 29″,9	1770.	3. 20. 27,6	
1749.	3. 14. 10,8	3. 48. 54,3	1771.	3. 20. 46,6	
1750.	3. 14. 26,3	3. 48. 9,9	1772.	3. 20. 56,2	3. 56. 51,7
1751.	3. 14. 31,4		1773.	3. 20. 57,9	
1752.	3. 14. 47,9	3. 50. 30,8	1774.	3. 21. 37,4	3. 57. 28,0
1753.	3. 14. 52,0		1775.	3. 21. 39,9	
1754.	3. 15. 17,9		1776.	3. 22. 7,9	
1755.	3. 15. 33,0		1778.	3. 22. 45,8	
1756.	3. 15. 49,5				

D'après les résultats que renferme cette Table, si l'on compare les distances d'*Arcturus* au Soleil, déterminées dans les deux années les plus éloignées, on trouve

En 1778		3^d 22′ 45″,8.
En 1743		3. 12. 12,3.
Différence		0. 10. 33,5.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation sur les hauteurs apparentes du Soleil & de l'Étoile dans les deux époques, se réduit à		0. 10. 44,6.
Le mouvement de précession d'*Arcturus* dans l'intervalle des deux années	10′ 2″,1	0. 11. 15,6.
Le mouvement particulier, à raison de 21 secondes pour dix ans	1. 13,5	
Reste donc pour la quantité dont le Soleil s'est rapproché d'*Arcturus* en trente-cinq ans, ou diminution de l'obliquité		0. 0. 31,0.
Par les hauteurs solsticiales, rapportées ci-dessus *Table I.re* on trouve cette diminution dans le même intervalle, de		0. 0. 29,3.

Pareillement en 1755, la distance d'*Arcturus* au bord solsticial du Soleil		3. 15. 33.
Je l'ai trouvée en 1778		3. 22. 45,8.
Différence		0. 7. 12,8.
Qui, ayant égard à la différence des effets de la nutation, se réduit à		0. 7. 9,5.
Le mouvement de précession d'*Arcturus* en vingt-trois années	6′ 36″,0	0. 7. 21.
Le mouvement particulier	0. 48,3	
Reste donc pour la quantité dont le Soleil s'est rapproché d'*Arcturus*		0. 0. 14,8.
Or j'ai trouvé ci-dessus, par les hauteurs solsticiales absolues, la diminution de l'obliquité de l'Écliptique dans l'intervalle des deux mêmes années, de		0. 0. 14.

Cet accord singulier dans le résultat de nos Observations, soit qu'on n'emploie que les hauteurs solsticiales absolues,

ſoit que l'on ne ſe ſerve que de la comparaiſon du Soleil à une Étoile, mérite d'être remarqué & doit inſpirer la plus grande confiance dans les réſultats renfermés dans la *Table II.*

Ayant réuſſi à faire uſage des comparaiſons d'*Arcturus* au Soleil, faites depuis trente-cinq ans à l'Obſervatoire, j'ai voulu employer des Obſervations du ſiècle paſſé, mais j'ai trouvé des réſultats ſi contradictoires, que j'ai été obligé de rejeter les Obſervations comme faites avec trop peu de préciſion pour une pareille recherche: d'ailleurs il faut convenir que plus l'intervalle entre les Obſervations ſera conſidérable, plus l'erreur commiſe ſur la détermination du mouvement d'*Arcturus*, déduite d'un plus petit nombre d'années, ſera multipliée.

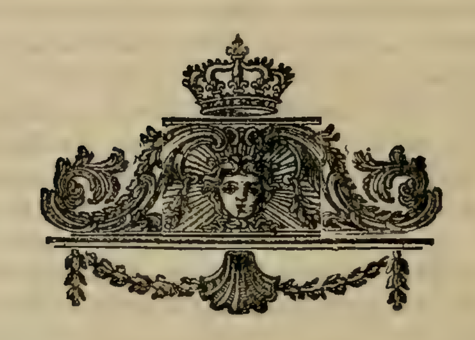
Quant à la comparaiſon de β de la Baleine avec le Soleil au ſolſtice d'hiver, on ſe doute bien que les réſultats doivent être très-ſuſceptibles d'erreurs, d'autant que les Obſervations de l'Étoile ont été très-peu nombreuſes & rarement d'accord, ſurtout dans ces dernières années, où les mois de Décembre ont toujours été défavorables aux Obſervations. J'attendrai donc que d'ici à quelques années les ſaiſons plus favorables me permettent de faire des Obſervations plus exactes, & ſur leſquelles je puiſſe établir un réſultat digne de confiance.

L'Aſtronomie n'attend ſon entière perfection que du temps: tout ce que nous avons rapporté dans ce Mémoire ne fait que prouver davantage combien dans les recherches délicates de cette Science, il eſt néceſſaire d'accumuler les Obſervations exactes, nombreuſes & éloignées les unes des autres d'un nombre d'années fort conſidérable. Quarante années d'Obſervations, faites pour la plupart avec toutes les circonſtances que l'on peut deſirer, ne ſont pas encore ſuffiſantes pour décider la queſtion; mais les réſultats qu'elles m'ont offert, & que j'ai expoſés ici, en variant les comparaiſons de toutes les manières, me ſemblent devoir être les plus rapprochés du vrai que l'on puiſſe obtenir pour le moment actuel; car je crois avoir ſuffiſamment démontré que nous ne pouvons rien conclure de bien certain dans la recherche préſente de la comparaiſon des Obſervations anciennes avec les nôtres.

D'ailleurs je n'ai point craint dans ce travail de multiplier les calculs, en employant le plus grand nombre d'Obſervations que j'ai pu trouver ; cela m'a donné des réſultats bien plus exacts, & m'a fait diſtinguer les Obſervations bonnes d'avec les douteuſes. Pour pouvoir bien établir l'état de l'inſtrument qui a ſervi à ces Obſervations, j'ai été obligé de faire un relevé général de toutes les Obſervations faites à ce quart-de-cercle depuis trente-cinq ans, je les ai toutes réduites & calculées; ce qui m'a procuré une collection des Obſervations les plus exactes qui aient été faites à l'Obſervatoire, parce qu'il faut convenir que l'inſtrument dont il eſt ici queſtion eſt le meilleur que nous ayons jamais poſſédé. Quoique ce travail conſidérable n'ait été entrepris que pour faire partie de l'Hiſtoire céleſte à laquelle je travaille, comme cet Ouvrage ne pourra être publié d'ici à pluſieurs années, je me propoſe de communiquer de temps en temps à l'Académie un Précis ſuccinct des réſultats les plus intéreſſans, afin que les Savans puiſſent jouir plutôt de mon travail, & pour prouver à l'Académie que le projet dont je lui ai fait part en 1774 n'eſt point une vaine annonce, & que je m'occupe ſérieuſement à remplir mes engagemens vis-à-vis d'elle à cet égard.

Voici le réſumé des réſultats rapportés ci-deſſus, & qui ſemblent concourir tous à prouver que la diminution de l'obliquité de l'Écliptique eſt au moins d'une minute par ſiècle, avec des augmentations inégales : mais il faut ſe rappeler ce que j'ai dit au commencement de ce Mémoire, ſur la néceſſité d'attendre un plus grand nombre d'Obſervations, pour ſe flatter de pouvoir décider une queſtion auſſi délicate & ſur laquelle je n'ai eu d'autre deſſein que de faire connoître à quel point nous en ſommes à cette époque, & ce que les Obſervations antérieures peuvent nous donner.

ANNÉES.	INTERVALLE.	Par les OBSERVATIONS du	DIMINUTION DE L'OBLIQUITÉ	
			OBSERVÉE.	PAR SIÈCLE.
depuis 1739 — jusqu'à 1778	En 39 ans.	solstice d'été..	32″	82″
1755 — 1778	En 23...	solstice d'été,.	14	60
		Arcturus......	14	60
1689 — 1778	En 89...	β d'Hercule..	56,5	63
1669 — 1778	En 109...	β d'Hercule..	66,4	61
1743 — 1778	En 35...	solstice d'été..	29,3	83
		Arcturus......	31	88
1743 — 1778	En 31...	solstice d'hiver & d'été.	22	71



MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur un moyen nouveau de faire avec exactitude, le départ d'un grand nombre d'Essais d'Or à différens titres, & d'appliquer dans le même temps cette opération à tous ces Essais réunis dans un seul matras.

Par M. TILLET.

QUELQU'APPLICATION qu'on donnât à l'étude d'un Art, il seroit difficile de le conduire, par la théorie seule, à toute la perfection dont il est susceptible. Les principes généraux tirés des Sciences exactes, & les connoissances puisées dans la saine Physique, étoient nécessaires sans doute pour guider d'abord les Artistes dans la route qu'ils se proposoient de suivre, pour leur épargner des recherches pénibles, les garantir de celles qui seroient infructueuses, & leur mettre, pour ainsi dire, dans la main tout ce qui devoit concourir à l'exécution prompte de leurs travaux. Mais il y a des lumières en ce genre, qui semblent ne sortir que de l'Art même exercé avec une attention suivie, & dans lequel on est plus occupé de l'exactitude, qui en fait le mérite essentiel, que des soins qu'il exige pour que cette exactitude ait lieu. 21 Novemb. 1778.

Les procédés ordinaires qu'on y emploie, d'après une théorie éclairée & une longue pratique, suffisent bien en général pour donner au travail un certain degré de perfection; mais dès qu'on veut n'y laisser rien à desirer, il est rare qu'on y réussisse, en se bornant aux procédés ordinaires; il faut que le point même de précision auquel on s'efforce d'atteindre, fournisse l'idée de nouveaux moyens capables de conduire à ce degré de précision; & c'est par l'emploi de ces moyens, nés pour ainsi dire, d'un travail réfléchi, assortis aux opérations qui en dépendent, réduits à leur plus grande simplicité

& reconnus certains par des épreuves multipliées, qu'on saisit enfin le but qu'on s'étoit proposé, & que par une méthode sûre on y revient sans cesse avec un succès égal.

S'il y a un Art, qui par les difficultés qu'il présente, quoique très-simple en apparence, & par l'importance de son objet, mérite l'attention des Physiciens, & des recherches de leur part capables de le perfectionner, c'est sans doute celui des Essais d'or & d'argent. Les différentes opérations en effet qui constituent cet Art intéressant, ne sont jamais appliquées qu'à de très-petites portions de l'un ou de l'autre de ces métaux; elles sont encore subdivisées, à la faveur d'un poids fictif, & pour la base d'un calcul particulier, en une quantité considérable de parties qui échappent aux yeux, & qui, autant par leur extrême ténuité, que par les épreuves violentes qu'on leur fait subir, donnent lieu souvent à des erreurs, dont un Essayeur exact n'est pas toujours sûr de se garantir.

C'est cependant d'après des opérations si délicates, & livrées quelquefois à des Artistes peu intelligens, que toutes les Nations s'accordent à reconnoître la valeur intrinsèque des matières d'or & d'argent; que la quantité immense de ces deux métaux qui est répandue dans le commerce, y a un prix déterminé; & que les monnoies des Souverains, fixées par des loix à un titre plus ou moins haut, doivent représenter dans la main de leurs peuples toute la valeur réelle que ces Princes y ont annoncée.

Les difficultés attachées aux Essais d'or & d'argent, & les variations qui en sont les suites assez ordinaires, ont toujours engagé les Souverains à modifier les loix qu'ils ont données, tant pour la fabrication de leurs monnoies, que pour les ouvrages d'orfévrerie, & à ne pas exiger à la rigueur, que le titre des matières d'or & d'argent, relatif à ces deux sortes de travaux, y fût maintenu dans toute l'étendue que leurs loix présentoient: ils ont permis aux Directeurs des Monnoies de tenir les espèces un peu au-dessous du titre auquel elles étoient réputées; & ce léger affoiblissement avoit un terme

limité. La même permiſſion s'eſt étendue de tout temps au titre des ouvrages en tout genre, qui ſortoient des mains des Orfévres; & cet affoibliſſement fixe ſur le titre, a été déſigné ſous le nom de *remède de loi*, pour le diſtinguer, quant aux monnoies ſeulement, de celui qui regardoit le poids preſcrit pour chaque eſpèce d'or & d'argent, & qu'on nommoit par cette raiſon, *remède de poids*.

Mais ce qui avoit été établi par de juſtes motifs, & dans la vue de laiſſer aux Eſſayeurs aſſez d'étendue ſur le titre, entre le point fixé par la loi & le dernier terme de l'affoibliſſement, pour qu'ils ne ſortiſſent pas de ces limites, malgré les variations qui auroient pu ſe trouver dans leurs eſſais; ces précautions ſages des Légiſlateurs ſont devenues aujourd'hui preſque inutiles; la plus grande partie du *remède de loi*, ſur les eſpèces d'or & d'argent, & la totalité ſur certaines d'entre elles, a été abſorbée inſenſiblement par des cauſes qu'il ſeroit ſuperflu de développer ici. D'un autre côté, il reſte ſi peu de traces de ce remède de loi ſur tous les ouvrages d'orfévrerie, qu'il ſemble aujourd'hui que le dernier terme de l'affoibliſſement de leur titre, autoriſé par la loi, ſoit le titre plein fixé pour ces ouvrages, & établi de tout temps pour y être maintenu en entier.

Dès-lors il aiſé de ſentir que l'opération des Eſſayeurs ne porte plus que ſur un point très-délicat; qu'ils peuvent, par le plus léger écart, aſſigner à des matières déjà miſes en œuvre, ou même entièrement finies, un titre inférieur au remède de loi, & rendre par-là inutiles tous les frais d'un travail de ce genre, qui ne doit ſubſiſter qu'avec les marques authentiques du titre exact des matières d'or ou d'argent auxquelles il a été appliqué.

Si la marche de l'art des Eſſais eût été auſſi rapide, pour l'exactitude des opérations, que celle de l'emploi abuſif du remède de loi dans le titre des matières, il ne ſeroit pas réſulté de cet abus de la loi, des inconvéniens auſſi ſenſibles que ceux dont je ſuis témoin tous les jours; & tandis que l'eſprit d'intérêt auroit été attentif à profiter de tout ce remède, il y auroit eu

peu de risque à le faire par l'intelligence des Essayeurs; mais cette ressource ménagée utilement pour une opération d'où il peut naître des erreurs importantes, ne subsiste presque plus aujourd'hui, comme je l'ai fait observer, pendant que l'art des Essais n'a fait que des progrès très-lents, que les causes d'erreurs ne sont pas totalement écartées, & que les essais d'or sur-tout, fondés sur des principes assez certains, tiennent encore à des manipulations, qui, quoique bonnes en elles-mêmes, ne conduisent pas à la précision d'une manière constante, sans que les Essayeurs puissent toujours s'apercevoir des causes d'incertitude attachées à leurs procédés.

Ces réflexions, & le desir de leur être utile, m'ont engagé à faire de nouvelles recherches sur ce sujet, aussi piquant par lui-même, qu'il est intéressant pour le commerce. Mon dessein n'est point ici de parler des essais d'argent, dont il a été question dans plusieurs Mémoires que j'ai soumis aux lumières de l'Académie, & qui sont partie de son Recueil: je ne m'attacherai qu'à ce qui concerne les essais d'or, & principalement à l'opération de leur départ, qui est l'article essentiel, & d'où il naît plus souvent des incertitudes, que de l'opération de la coupelle, parce que celle-ci n'est destinée proprement qu'au mélange des matières, & à la combinaison intime qu'elles exigent pour être départies.

Quoique la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or, soit connue de tous les Chimistes, je crois cependant devoir la rappeler ici en peu de mots, afin qu'on juge mieux, & des inconvéniens dont elle n'est pas toujours à l'abri, & des avantages que m'a paru avoir celle que je propose.

Lorsqu'on a tiré de la matière d'or, dont on veut faire l'essai, une petite portion parfaitement égale en pesanteur au poids principal de la semelle d'or, on y joint une quantité d'argent fin, réglée sur le titre auquel on présume qu'est la matière d'or, & qui décroît graduellement, à mesure que ce titre est plus bas : cet argent doit être absolument dépouillé d'or; ou s'il en contient quelques parties, elles doivent être bien connues: cet or & cet argent, enveloppés dans du

papier, sont portés à la coupelle, où il se fait par l'intermède d'une quantité de plomb proportionnée aussi au titre de la matière d'or, un premier affinage de cette matière, & surtout le mélange complet de l'or & de l'argent qu'on a pour but d'opérer. On pourroit se dispenser de cet affinage préliminaire, en fondant ces deux métaux dans un petit creuset ou dans une coupelle, sans addition de plomb, à la faveur d'un fourneau d'essais qui, construit sur les principes de celui dont je me sers, donneroit à volonté une très-grande chaleur *(a)*. On obtiendroit encore cette fusion, au feu de lampe des Emailleurs, dirigé sur le bassin d'une coupelle neuve, ou sur un charbon plat, à la surface duquel on auroit creusé un petit bassin *(b)*. Le dissolvant, en effet, qui doit enlever à l'or tout l'argent qu'on y a joint, a la même action sur le cuivre, & doit laisser ce premier métal dans toute sa pureté, soit qu'on l'ait d'abord dépouillé du cuivre, soit que tout son alliage lui soit resté. Cependant le mélange de l'or & de l'argent par la voie de la coupelle dans le fourneau d'essais, a des avantages qui doivent le faire préférer à celui qu'on obtiendroit au feu de lampe des Émailleurs : mais il n'entre pas dans mon dessein de donner ici les raisons de cette préférence; il suffit que j'y expose à cet égard les deux procédés que l'usage a introduits.

Après que l'or & l'argent réunis dans la coupelle, ont subi l'action du plomb, & que celui-ci, réduit en litharge, s'est imbibé dans la coupelle, il reste dans le milieu du bassin un bouton composé des deux métaux précieux, & portés, à peu de chose près, dans le mélange exact qui s'en est fait, à leur pureté respective. Ce bouton devant être attaqué de toutes parts, criblé, pour ainsi dire, par l'esprit de nitre, & ne pouvant l'être qu'autant qu'il présente une très-grande surface, est aplati sous le marteau, recuit à plu-

(a) La description de ce fourneau, & les planches gravées qui en présentent tous les détails, se trouvent dans un Mémoire qui fait partie du Recueil de l'Académie des Sciences, pour l'*année 1776*.

(b) C'est le procédé qui est en usage au Bureau des Orfévres de Paris.

ſieurs repriſes, & réduit enfin en une lame mince d'une égale épaiſſeur; on obtient parfaitement & avec facilité, cet avantage par le moyen d'un laminoir: cette lame, à laquelle on donne la plus grande ſoupleſſe par un dernier recuit, eſt roulée enſuite ſur elle-même autour d'un petit cylindre d'une ou deux lignes de diamètre, & prend en cet état le nom de *cornet*, dont il faut faire le départ.

Lorſqu'on a mis ce cornet dans un petit matras, on y verſe d'abord de l'eau-forte un peu affoiblie, afin qu'elle n'attaque le cornet que modérément, & le laiſſe ſubſiſter en entier: on place le matras ſur des charbons rouges, mais un peu éteints; & quand on remarque que l'eau-forte, après avoir bouilli pendant quelque temps, eſt devenue claire, ne jette plus que de groſſes bulles, & paroît ne plus agir ſur le cornet, on ôte le matras de deſſus le feu, on décante l'eau-forte qui a produit ſon effet, on y en verſe de nouvelle, mais qui a toute ſa force; on remet le matras ſur le feu, & on porte à cette ſeconde opération les mêmes attentions qu'on a données à la première: l'effet de cette eau-forte pure paroiſſant fini, on la décante auſſitôt; on laiſſe un peu refroidir le matras, on y verſe enſuite à pluſieurs repriſes de l'eau de rivière, pour laver parfaitement le cornet d'or, & lorſque cette eau y a toute ſa tranſparence, on préſente un petit creuſet à l'embouchure du matras, & on renverſe le matras même ſur le fond de ce petit creuſet, en l'y ſoutenant légèrement & en ligne perpendiculaire; une partie de l'eau contenue dans le matras ſe répand dans le creuſet; le cornet d'or y deſcend doucement avec elle, & s'y repoſe ſans avoir éprouvé de choc, qui quelque foible qu'il fût, ſeroit capable de le briſer, parce qu'il a perdu toute ſa conſiſtance, en perdant l'argent qui faiſoit corps avec lui; le cornet une fois ſorti du matras ſans accident, il faut dégager avec dextérité le bout du col de ce même matras de l'intérieur du creuſet, en évitant avec ſoin que la grande quantité d'eau qu'il contient encore ne tombe avec force ſur le cornet, qui pourroit être briſé par cette chute, & perdre quelques-unes

de ses parties par l'eau surabondante qui se seroit précipitée dans le creuset. Le cornet d'or se trouvant bien conservé dans la petite quantité d'eau qui est restée au fond du creuset, il ne s'agit plus que de la faire écouler lentement, en inclinant un peu le creuset, & en facilitant avec le doigt l'écoulement de l'eau, avec la précaution sur-tout de ne pas toucher au cornet qui s'applique de lui-même, par son état de mollesse, aux parois intérieures du creuset, & qui n'exige plus qu'un recuit pour que l'opération soit terminée : on le lui donne bientôt en mettant le creuset qui le contient, & qu'on a recouvert entre des charbons ardens, où il ne tarde pas à rougir. Le creuset retiré du feu & découvert, présente le cornet d'or dans toute sa beauté, rétréci dans tous les sens de près d'un tiers, & quoiqu'un peu sonore, n'ayant qu'une consistance médiocre : s'il s'est détaché quelques parties de ce cornet qu'on n'ait pas aperçues avant qu'il fût recuit, elles deviennent sensibles dans le creuset par leur couleur, & réunies avec soin au cornet d'or, elles concourent à l'établissement de son poids.

Les détails dans lesquels on verra qu'il étoit nécessaire que j'entrasse sur la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or, & principalement sur la partie de cette opération qui concerne le départ du cornet ; ces détails commencent à donner une idée des précautions qu'exige ce point particulier des essais d'or, des difficultés qu'il offre pour la précision, & des risques que les Essayeurs y courent de tomber dans quelque erreur. Il convenoit d'autant mieux de présenter ici les détails relatifs au départ du cornet, qu'en adoptant la méthode nouvelle que je vais proposer, il y aura beaucoup moins de précautions à prendre, moins de difficultés à vaincre, & qu'on obtiendra dans ce travail toute la certitude qu'il est possible d'y espérer : on aura lieu encore de remarquer dans ce procédé nouveau, des avantages qui s'y trouvent comme attachés naturellement, & dont les Essayeurs, très-occupés, sentiront tout le prix.

L'Académie peut se rappeler que dans les dernières expé-

riences dont je lui ai rendu compte ſur un ſujet lié par bien des endroits, à celui que je traite dans ce moment, je me ſuis fait un devoir de n'établir aucun réſultat que d'après des matières d'or & d'argent portées à leur dernier point de pureté, mélangées dans des proportions connues, & devant reparoître après les épreuves auxquelles je les avois ſoumiſes dans la quantité juſte des unes & des autres que j'avois d'abord employée. Avec cette méthode déciſive, j'ai pu compter ſur les conſéquences que j'ai tirées ; & c'eſt à la lumière conſtante, fournie par le même principe, que j'ai fait des recherches ſur la manière la plus certaine de procéder aux eſſais d'or, en m'appliquant auſſi à ſimplifier cette opération.

Je m'occupois depuis long-temps du moyen qu'il y auroit, dans le départ, de joindre à des cornets d'or appartenans à des matières dont on ignoreroit le titre, d'autres cornets qui continſſent une quantité d'or fin bien déterminée, & qui fuſſent aſſociés aux premiers pour toutes les épreuves qu'ils auroient à ſubir. J'avois réfléchi inutilement à la forme qu'il auroit été néceſſaire de donner au matras, pour que l'action d'une même quantité d'eſprit de nitre ſe portât dans le même inſtant, avec une égale force & pendant la même durée de temps, ſur les cornets dont la partie en or ſeroit connue d'un Eſſayeur, & ſur ceux où il ne la connoîtroit pas. Si les cornets, après que l'eſprit de nitre a produit ſur eux tout ſon effet, n'étoient pas réduits à un état de molleſſe & d'affaiſſement, qui quelquefois les tient fortement appliqués au fond du matras, & les expoſe à être briſés par le ſeul bouillonnement de l'eſprit de nitre, on auroit pu, avant que d'en faire le départ, y imprimer quelque marque propre à les déſigner, & qui, quoiqu'un peu altérée au ſortir du recuit, auroit ſuffi cependant pour qu'on les eût diſtingués : mais deux cornets dans le même matras, après l'effet réitéré de l'eſprit de nitre, ſe colleroient infailliblement l'un à l'autre, & ne pourroient plus être déſunis, ſur-tout après le recuit qu'on ſeroit contraint de leur donner dans l'état même d'adhéſion où ils ſe ſeroient trouvés au ſortir du matras : d'ailleurs ſi quelques parcelles de

l'un

l'un ou de l'autre de ces cornets, ou même de tous les deux, s'en étoient séparées, il en résulteroit une incertitude, pour juger duquel des deux cornets elles dépendroient ; à moins qu'en pesant la totalité, & défalquant la quantité d'or connue d'un des cornets, on ne jugeât de celle que doit contenir le cornet qui étoit d'abord inconnu; & encore, avec cette dernière ressource, resteroit-il de l'incertitude, puisqu'on ne sauroit pas si le départ auroit été complet: une connoissance bien positive sur ce point essentiel, & dont j'étois spécialement occupé, ne pouvant être procurée que par un cornet d'or isolé, qui, après le départ, représente la quantité précise d'or fin qu'on y a fait entrer.

Je n'avois donc encore rien imaginé dont j'attendisse du succès, soit pour la construction particulière du vase où les cornets auroient pu être départis en commun, mais isolés les uns des autres, & sortir aussi du vase séparément, soit pour empêcher l'adhérence de ces mêmes cornets, en employant les matras ordinaires, lorsqu'il se présenta à mon esprit un moyen simple qui naissoit de la chose même, & que j'avois sans cesse sous la main.

L'acide nitreux pur ne dissout point l'or; ce métal précieux garantit même, jusqu'à un certain point, de l'action de cet acide les autres métaux avec lesquels il est allié, & que l'esprit de nitre attaque le plus violemment. L'or, dès ce moment peut devenir comme l'enveloppe naturelle des corps qu'on a dessein de soustraire à l'action de cet acide, ou qu'on veut tenir isolés les uns des autres en les y laissant exposés. Je sentis en conséquence que je pourrois réussir dans mon projet, en renfermant chaque cornet d'essai dans une espèce de petit étui d'or, où il y eût quelques ouvertures par lesquelles l'esprit de nitre eût un accès facile, & qui cependant ne sussent pas assez grandes pour que les cornets pussent sortir.

Avant que de donner à ces étuis toute la perfection dont ils sont devenus susceptibles, je me hâtai de les former de la manière la plus simple, & propre à me faire juger sur le champ de l'avantage que j'en pourrois retirer. Je réduisis un

morceau d'or fin en une lame très-mince, & à laquelle j'évitai de donner un recuit, afin qu'elle conservât un peu de ressort; j'en tirai une petite plaque à peu-près quarrée, & large de neuf à dix lignes; je ménageai à chacun de deux des côtés opposés de cette plaque, & dans le milieu de ces côtés une petite lame de la largeur d'une ligne & de trois de longueur; je roulai le corps de la plaque sur un cylindre de trois lignes ou à peu-près de diamètre; je relevai une des lames, qui n'étoit qu'un prolongement de la plaque, sur l'ouverture du petit tuyau qui en résulta, & à laquelle cette lame répondoit; je mis dans ce tuyau un cornet d'essai, dont le titre m'étoit connu; & ayant relevé ensuite la seconde lame sur l'ouverture par laquelle je l'avois introduit, j'eus un étui assez bien fermé pour que le cornet n'en sortît pas, & assez ouvert pour que l'esprit de nitre pût attaquer de toutes parts ce cornet; je le mis ainsi enveloppé dans un matras, & je procédai au départ ordinaire, en le faisant subir en même temps à un autre cornet d'essai mis à nu dans un second matras, & d'un titre égal à celui que l'étui renfermoit. Lorsque l'esprit de nitre eut produit tout son effet, & que je l'eus décanté des deux matras, j'y versai, à plusieurs reprises, de l'eau de rivière, & je lavai avec soin les cornets, en laissant dans son matras celui que l'étui contenoit, comme il étoit nécessaire d'y laisser celui dont le départ avoit été fait à nu : lorsqu'ils eurent été lavés suffisamment, je fis descendre l'étui dans ma main; je baissai une de ses petites lames; je le plongeai ensuite, en l'inclinant un peu, dans un petit creuset rempli d'eau; le cornet sortit de l'étui; & n'ayant pu éprouver par-là le moindre choc, il se reposa bien entier dans le fond du creuset. Je donnai à l'autre cornet d'essai toute l'attention ordinaire pour le faire tomber, sans accident, dans un creuset; & l'un & l'autre, qui me parurent de la même beauté après le recuit, ayant été portés à la balance, se trouvèrent d'un poids égal.

Le succès de cette expérience ne me laissa aucun doute sur l'avantage que je pouvois tirer de l'emploi de pareils étuis pour acquérir la certitude d'un départ complet, & juger

ſûrement du titre d'une matière d'or qu'on ne connoîtroit pas, en aſſociant les eſſais qu'on en feroit avec celui d'une matière qu'on auroit compoſée ſoi-même, ou dont le titre ſeroit devenu conſtant par des épreuves multipliées. Deſirant de répéter cette expérience, en employant pluſieurs étuis dans un matras ſeul, je commençai par les rendre un peu plus ſolides que n'étoit celui dont je viens de parler : au lieu de deux lames dépendantes de l'étui même dont il falloit qu'une fût tantôt baiſſée, pour que le cornet fût introduit, tantôt relevée pour qu'il fût maintenu dans l'étui, & enſuite baiſſée une ſeconde fois, afin que le cornet en ſortît, je ne fis dépendre du corps de l'étui qu'une ſeule lame qui reſtoit toujours relevée ſur l'ouverture à laquelle elle répondoit, & j'adaptai ſur l'ouverture oppoſée une virole d'or qui portoit elle-même une lame toujours relevée, qui embraſſoit étroitement le bout de l'étui, qu'on pouvoit cependant ôter ou remettre à volonté, & qui par conſéquent, lorſqu'elle étoit en place, ne laiſſoit point d'iſſue au cornet.

Ce fut en faiſant uſage de ces étuis, dont je ne courois plus le riſque de rompre une des lames, par les plis & replis qu'elle auroit éprouvés ſouvent, ſi je ne les euſſe pas évités par le ſecours d'une virole ; ce fut, dis-je, en les employant pour pluſieurs cornets, mis tout-à-la-fois dans un même matras, & expoſés enſemble à l'action du même eſprit de nitre, que je répétai l'expérience dont j'ai rendu compte plus haut, pour reconnoître les différens titres des matières d'or que j'avois moi-même alliées, & qui, par cette précaution déciſive pour les réſultats, devoient m'avertir infailliblement de l'exactitude ou de l'imperfection du départ. Mais ces nouvelles expériences confirmèrent la première ; & chacun des cornets, au ſortir de ſon étui, contenoit préciſément la quantité d'or fin que j'y avois employée. A meſure que l'on tire de l'utilité d'un moyen, on ſent mieux juſqu'où elle doit s'étendre, parce que l'objet auquel on l'applique eſt conſidéré alors avec plus d'attention, ſous des faces différentes, & avertit de toute la perfection dont il eſt ſuſceptible.

Quoique j'eusse réussi, dans mes premières expériences, en employant les étuis d'or tels que je les ai décrits, je sentis cependant qu'il y avoit des changemens avantageux à y faire pour les cas, rares il est vrai, où il se détacheroit quelques parcelles des cornets contenus dans ces étuis, & où l'exactitude demanderoit qu'elles n'en sortissent pas, afin que réunies au cornet après le recuit, elles concourussent à l'établissement juste de son poids. Si en effet ces parcelles s'étoient une fois échappées de l'étui, à la faveur de l'ouverture trop facile de ses deux extrémités, & s'étoient répandues, soit sur les autres étuis, soit dans le fond du matras, on ne sauroit point auquel des cornets elles appartiendroient, à moins qu'on ne fût instruit auparavant de la quantité d'or fin que chacun d'eux devoit contenir, & qu'on n'eût déterminé leur poids respectif; mais en supposant qu'on opérât sur des matières inconnues, l'attribution juste de ces parcelles à l'un ou l'autre de ces cornets, deviendroit presque impossible, & jetteroit une incertitude bien fondée sur le véritable titre des matières auxquelles plusieurs cornets départis dans un même matras seroient relatifs.

Je donnai donc à ces étuis une forme nouvelle, qui en même temps qu'elle laissoit un accès suffisant à l'esprit de nitre pour y attaquer les cornets, mettoit une petite barrière à l'extrémité de ces étuis, que des parcelles détachées de ces cornets ne pouvoient pas franchir. Je ne réservai plus de lame à un des côtés de la plaque qui devoit former le corps de l'étui : roulé sur le cylindre, il n'étoit plus qu'un tuyau simple, dont les deux extrémités étoient entièrement ouvertes, & où il y avoit un peu de jour dans toute la longueur du tuyau, entre les bords des deux côtés de la plaque qui se joignoient, à cause du ressort que je lui avois conservé ; mais ce jour disparoissoit pour peu qu'on pressât ce tuyau avec les doigts, & il ne subsistoit qu'en partie lorsque ce même tuyau étoit maintenu par les deux viroles amovibles dont il me reste à parler : au lieu d'y réserver une lame comme dans celles des étuis précédens, & de profiter simplement de leur

reſſort pour leur faire embraſſer étroitement l'extrémité des étuis, je fis ſouder ces viroles d'or fin avec de l'or à 20 karats; je les couvris d'un côté par une petite plaque d'or qu'on y ſouda également, & dans le milieu de laquelle on perça un trou de trois quarts de ligne ou environ de diamètre; en comprimant un peu le corps de l'étui, j'en faiſois entrer ſans peine les extrémités dans les viroles; & celles-ci les reſſerroient étroitement à la faveur du reſſort dont le corps de l'étui jouiſſoit: on voit alors que par cette dernière forme que je donnai à ces étuis, il n'y avoit d'entrée pour l'eſprit de nitre, que celle du petit trou pratiqué à chacune des viroles, & celle que lui laiſſoit encore le très-petit jour dont je viens de parler, lequel ſubſiſtoit ſur la longueur de l'étui & dans toute la partie que les viroles ne recouvroient pas: on remarque en outre, qu'au moyen de la petite plaque ſoudée à chacune des viroles, & appliquée à chaque ouverture principale de l'étui, il s'y trouvoit intérieurement une bordure de plus d'une ligne de hauteur, propre à empêcher que de petites portions d'un cornet qui s'en ſeroient détachées, ne ſortiſſent de l'étui, & à y conſerver par conſéquent toute la partie d'or pur, dépendante de la matière de l'Eſſai.

Il ſembleroit d'abord que le peu d'ouverture que j'ai laiſſée à ces derniers étuis, ne ſeroit pas ſuffiſante pour que l'eſprit de nitre y attaquât les cornets de toutes parts, & y produisît auſſi-bien ſon effet que ſur les cornets qu'on départit à nu: mais l'expérience m'a prouvé que ce peu d'ouverture ne mettoit aucun obſtacle à toute l'action de l'eſprit de nitre, puiſque je le voyois, pendant ſon ébullition, traverſer les étuis librement, former des jets continuels par les petits trous pratiqués à leurs extrémités, & que, dans les épreuves pour leſquelles j'ai employé pluſieurs de ces étuis dans un ſeul matras, j'ai obtenu les réſultats que j'attendois. Si en faiſant uſage de ces étuis, on attend que les cornets qu'on en a tirés ſoient recuits pour juger, en les mettant dans la balance, de l'exactitude de l'opération, on courra riſque quelquefois de trouver les cornets un peu plus peſans qu'ils ne devroient

être, ſoit parce que l'eau-forte dont on s'eſt ſervi n'avoit pas aſſez d'activité, ſoit parce qu'on ne l'a pas laiſſé bouillir aſſez long-temps; cet inconvénient ne tient en rien à l'uſage des étuis, & a lieu tous les jours dans la méthode ordinaire; mais un avantage que ne peut pas avoir cette méthode, & qui eſt attaché à l'emploi des étuis, c'eſt qu'on n'a pas beſoin de tirer du matras tous les étuis qu'il contient, pour connoître ſi le départ eſt complet; il ſuffit d'en ôter un ſeul, en laiſſant tous les autres dans l'eſprit de nitre, juſqu'à ce que le cornet de celui-là, après avoir été lavé & recuit, ait averti du point auquel a été porté le départ; & voici la manière ſimple, dont je profite de cet avantage qui conduit l'opération à un point d'exactitude, dont la méthode ordinaire n'eſt pas ſuſceptible. Un de mes étuis a un petit anneau d'or auquel tient auſſi un fil d'or, au moyen duquel je plonge l'étui dans l'eſprit de nitre contenu dans le matras, au milieu des autres étuis deſtinés pour le départ; ce fil d'or, qui excède d'un pouce ou deux le col du matras, me rend toujours le maître d'en faire ſortir l'étui auquel il aboutit; ce guide ſûr de mon opération, contient toujours un cornet, dont la partie en or fin m'eſt connue: ſorti une fois du matras, il m'inſtruit fidèlement de l'état où ſont tous les autres cornets qu'il vient de quitter, & me ſert de règle certaine, ſoit pour regarder le départ comme fini, ſoit pour le rendre complet, s'il n'eſt pas abſolument terminé. Il ſeroit prudent même, d'après ce que je viens d'expoſer, dans des occaſions où l'on auroit à départir une grande quantité de cornets, d'avoir un double guide, dont l'un donneroit le premier avertiſſement ſur le point où en ſeroit l'opération; & l'autre, ſi elle n'étoit pas finie, inſtruiroit en ſecond lieu de l'effet du moyen qu'on auroit employé pour la rendre complète. On ſeroit bien dédommagé de ce léger ſurcroît de travail par la certitude du titre de pluſieurs matières qu'on auroit eſſayées, & pour leſquelles, en ſuivant la méthode ordinaire, on auroit employé plus de temps, fait plus de frais, pris plus de peine, avec le riſque ſouvent de revenir

à de nouveaux Eſſais des mêmes matières, & toujours avec une ſorte d'incertitude d'en avoir déterminé le véritable titre.

J'ai dit que les cornets d'eſſais, après le départ, & renfermés encore dans leur étui, étoient plongés dans un petit creuſet rempli d'eau; que par-là ils ſe dégageoient facilement de l'étui, & ſe repoſoient ſur le fond du creuſet où ils étoient enſuite recuits, ſans avoir éprouvé d'accidens. Quoique la méthode ordinaire ne préſente pas autant d'avantage pour conſerver les cornets en entier, puiſqu'on eſt obligé, en la ſuivant, de faire précipiter ces cornets du fond du matras, dont le col eſt aſſez long, dans un creuſet où il peut être entamé par le moindre choc; j'ai ſenti cependant qu'il ſeroit utile pour la facilité du travail, pour éviter ſur-tout la confuſion dans un grand nombre de cornets auxquels il faudroit donner le recuit, & qui demanderoient chacun leur creuſet particulier, de procéder à cette dernière opération, ſans déranger les cornets, & en faiſant ſubir le recuit aux étuis même qui les contiendroient. Mes premières expériences à cet égard, eurent lieu ſur des étuis d'or fin: je m'aperçus d'un inconvénient qui tenoit à l'emploi des étuis de cette eſpèce: les cornets qui, comme je l'ai dit, ſont d'une grande molleſſe, après le départ, & qu'on a humectés par des lotions réitérées, s'appliquent ſur la ſurface intérieure des étuis; quoiqu'ils tendent à ſe reſſerrer ſur eux-mêmes, à meſure qu'ils ſe recuiſent, cependant il y a des endroits par leſquels ils portent néceſſairement ſur l'étui, & y ſont très-adhérens; lorſque celui-ci commence à rougir, le cornet qu'il renferme éprouve le même effet; & comme je leur donnois un recuit aſſez fort qui ouvroit leurs pores réciproques, ils ſe ſoudoient, pour ainſi dire, l'un à l'autre, au point de contact, & ne pouvoient être ſéparés qu'aux dépens de quelques parties du cornet, qui reſtoient unies à l'étui, & que je ne pouvois plus en détacher.

Ainſi j'abandonnai les étuis d'or fin pour être expoſés au recuit avec les cornets qui auroient ſubi le départ dans ces mêmes étuis; je fis de nouvelles épreuves à ce ſujet avec des

étuis d'or rouge, qui, comme on ſait, eſt allié ſur le pied de cinq ſixièmes d'or fin, & d'un ſixième de cuivre de roſette; j'éprouvai le même inconvénient : je ne réuſſis pas mieux en employant des étuis d'or vert, dans la compoſition duquel j'avois fait entrer trois quarts d'or pur & un quart d'argent fin. Ce défaut de ſuccès ne me rebuta point : je ne me diſſimulois pas que le procédé nouveau que j'avois imaginé, perdroit quelque choſe de l'utilité que j'y voyois attachée, de l'agrément même qu'il y auroit à l'employer, ſi je ne parvenois pas au point particulier dont il s'agit ici, & que je cherchois avec une ſorte d'obſtination. Je réfléchis enfin que l'or gris dans lequel il entre un ſixième de fer & cinq ſixièmes d'or pur, pourroit être favorable à mon deſſein, parce que la portion de fer qui s'y trouve mêlée, préſente un obſtacle naturel à l'effet que j'avois intérêt d'éviter. Je m'empreſſai donc de faire des étuis d'or gris; de les employer dans le départ de pluſieurs cornets, & de les expoſer à un fort recuit avec les cornets même qui y avoient été départis. Lorſque l'opération fut finie, j'eus le plaiſir d'entendre, en agitant un peu ces étuis avant de les ouvrir, que les cornets s'y remuoient, comme le fait une amande sèche dans ſa coque; & le poids des cornets, tel préciſément que je l'attendois, me rendit certain qu'aucune partie ne s'en étoit détachée.

Outre la grande utilité que j'ai tirée des étuis d'or gris, pour l'accélération & la ſimplicité du travail, j'ai reconnu dans ce métal compoſé, un avantage relatif aux étuis même, & à la conſiſtance dont ils ont beſoin pour bien conſerver leur forme, après des recuits multipliés. L'or gris eſt très-dur, & a beaucoup de reſſort; on vient à bout cependant de le bien laminer au ſortir de la fonte, & de le réduire à très-peu d'épaiſſeur, ſans qu'il ſoit néceſſaire de le recuire à meſure qu'il s'écrouit: il paroît même, d'après l'expérience que j'en ai faite pluſieurs fois, qu'un recuit pouſſé juſqu'au blanc, ne produit ſur lui que peu d'effet, puiſqu'une épreuve auſſi forte ne lui ôte preſque rien de ſon reſſort. Dès-lors on voit que l'or gris eſt très-propre à devenir la matière des étuis,

indépendamment

indépendamment de l'avantage précieux qu'il leur donne d'un autre côté, & que l'or, soit pur, soit allié avec d'autres métaux que le fer, ne pourroit pas leur procurer. En supposant en effet que les cornets d'Essais ne fussent pas restés adhérens aux parois intérieures des étuis d'or, que la matière de ceux-ci fût pure ou non, & quel que fût le métal qu'on y eût employé comme alliage, il est certain que les étuis d'or fin, qui d'abord auroient eu un peu de ressort, le perdroient totalement, après un recuit, & reviendroient à un état de souplesse, dont les suites nécessaires seroient une trop grande aisance dans les viroles pour serrer les extrémités de l'étui, & s'y maintenir elles-mêmes, lorsqu'on les feroit servir de nouveau, & à l'opération du départ, & à celle du recuit. Le même inconvénient auroit lieu à l'égard des étuis composés d'or & d'argent fins; & si l'or rouge ne perdoit pas absolument, par le recuit, une certaine roideur qu'il tient de sa composition, au moins seroit-elle sensiblement diminuée, & résulteroit-il un peu de relâchement dans les étuis, dont cet or allié au cuivre auroit été la matière; au lieu que la dureté particulière à l'or gris maintient, malgré le recuit, un étui formé de ce métal dans tout le ressort qui lui est propre, empêche le relâchement, au moins sensible, des viroles qui en dépendent, & rend cet étui, aussi capable de résister à une longue suite d'épreuves qu'il a été propre à la première pour laquelle on l'a employé.

Après tous les détails dans lesquels je viens d'entrer, afin que l'Académie, instruite de mes recherches, dans l'ordre où je les ai faites, juge mieux du degré de confiance que mes expériences peuvent mériter, & adopte les conséquences que j'en tire, si elles lui paroissent bien fondées, il ne me reste plus qu'à rapprocher la méthode ordinaire d'essayer les matières d'or de celle que je propose; les avantages de la dernière n'en seront que plus frappans, s'ils sont tels aux yeux de l'Académie que je les ai considérés moi-même dans le succès de mes opérations; ou bien, par la comparaison de ces deux méthodes, on verra, au contraire, dans celle que

toutes les Nations ſuivent aujourd'hui, des raiſons de la conſerver, ſur leſquelles j'ai pu être diſtrait, comme occupé trop fortement de celle que je deſirerois d'y ſubſtituer.

La quantité d'argent néceſſaire pour le départ des Eſſais d'or, le mélange de ces métaux dans la coupelle, par le moyen d'une quantité convenable de plomb, la réduction du bouton d'Eſſai qui en réſulte, en une lame mince dont on forme enfin un cornet; tous ces procédés ſont communs à l'une & à l'autre méthode, & leur différence n'a lieu que lorſqu'il s'agit du départ. Comme celle qui a été l'objet de mes expériences, pourra devenir très-utile à ceux principalement qui auront un grand nombre d'Eſſais d'or à faire à la fois, aux Gardes-orfévres de Paris, par exemple, dont le travail eſt journalier & aſſez conſidérable, je ſuppoſerai qu'il ſera queſtion d'eſſayer quinze ou vingt matières d'or différentes, dont on ignorera le titre, & de départir tout-à-la-fois un nombre pareil de cornets.

L'uſage de ces Gardes-orfévres, dont je vais repréſenter le travail, eſt, comme on ſent bien, d'employer autant de matras qu'il y a de cornets dont il faut faire le départ; ces matras n'ont aucune marque diſtinctive qui établiſſe une relation entre les cornets qui s'y trouvent contenus & les matières d'or auxquelles ils appartiennent; mais ces Gardes-orfévres évitent le danger de confondre ces matras par une précaution que voici, & qui demande une explication. Les pièces ébauchées de bijouterie que les Orfévres envoient à leur Bureau pour y être eſſayées, & recevoir la marque, ſi elles ſe trouvent au titre preſcrit, ſont contenues dans des ſacs qui portent le nom de ceux à qui ils appartiennent: on tire un échantillon de chacune de ces pièces qu'on met dans un petit baſſin de cuivre avec le nom du propriétaire du ſac; ces échantillons plus ou moins nombreux, ſuivant la quantité des pièces, deviennent la matière de l'eſſai; & comme il eſt rare qu'ils ſoient tous employés, ceux qui ne l'ont pas été reſtent dans le baſſin avec le nom du propriétaire, pour ſervir en cas de beſoin, à des repriſes d'Eſſais; c'eſt ce petit baſſin qui, placé ſur le

fourneau où se fait le départ, & vis-à-vis du matras qui renferme le cornet correspondant aux échantillons contenus dans ce même bassin, c'est lui seul qui garantit de la confusion des matras, parce que l'ordre dans lequel il est, répond à celui dans lequel les matras sont placés sur le feu; il reste dans le rang où il a été mis d'abord, lorsqu'on ôte du matras la première eau-forte affoiblie qu'il contenoit, pour y en verser d'autre pure, & achever le départ; il y reste, parce qu'on a l'attention, en remettant le matras sur le feu, de lui donner la même place qu'il y occupoit; mais s'agit-il d'ôter une seconde fois le matras de dessus le feu, parce que le départ est fini, alors le bassin accompagne le matras; il est à côté de lui pendant qu'on y lave le cornet d'Essai; il est près du creuset où ce cornet est déposé, en attendant le recuit qui doit être donné en commun à tous les cornets dont on aura fait le départ; il est placé dans une première ou une seconde ligne, vis-à-vis de celui des creusets, rangés aussi sur deux lignes, qui lui est relatif, pendant que celui-ci est dans le feu; & enfin, après cette dernière opération, ce petit bassin reçoit le creuset même où est le cornet d'Essai dont il a fourni la matière.

On voit par le détail que je viens de donner, quelle attention exige cette opération particulière, & combien on court risque de tomber dans des erreurs de conséquence, si la moindre confusion a lieu dans l'attribution qui doit être faite de chacun des cornets d'Essais à la matière d'or dont il doit déterminer le titre : on s'expose en effet, par un dérangement dans l'ordre qu'on a d'abord suivi, à marquer des pièces de bijouterie comme trouvées au titre prescrit, pendant qu'elles étoient au-dessous, & à occasionner la refonte de celles qui étoient en règle, parce qu'on leur a attribué, par une transposition dont on ne s'est pas aperçu, un cornet qui ne leur appartenoit pas.

Mais témoin par état, & assez fréquemment, des Essais en grand nombre qui se font tous les jours au Bureau des Orfévres de Paris, par les Gardes en charge de ce corps,

je leur dois ici la juſtice d'aſſurer qu'ils donnent à ce travail la plus grande attention, qu'ils s'y portent avec un zèle toujours ſoutenu, & que de leur propre mouvement, ils font juſqu'à trois repriſes d'Eſſais de la même matière, ſi aux deux premières épreuves, elle ne ſe trouve pas au titre fixé par la loi.

Je dois faire obſerver encore que parmi les inconvéniens qui ſont les ſuites de la méthode ordinaire, & dont je deſirerois de mettre les Eſſayeurs à l'abri, il en eſt un qui a lieu de temps en temps, & mérite une certaine attention : il rend inutile en effet une partie du travail de ces Eſſayeurs, & occaſionne un retard, dans les rapports d'Eſſais qu'ils ont à donner, qui gêne ordinairement quelqu'un de ceux qui les attendent, ſoit pour des opérations momentanées de commerce, ſoit pour des ouvrages de bijouterie qu'il s'agit d'ébaucher ou de finir. Il arrive quelquefois qu'un matras ſe caſſe ſur le feu, & que l'eſprit de nitre, s'écoulant par les ouvertures qui s'y ſont faites, laiſſe preſque à ſec, au fond de ce matras, le cornet qu'on y avoit mis : ſi, avant cet accident, l'eſprit de nitre n'avoit pas encore agi vivement ſur ce cornet ; ſi celui-ci conſerve de la conſiſtance, il eſt facile de le faire paſſer dans un autre matras, & d'y continuer l'opération ; ſi au contraire, le départ étoit à peu-près fini lorſque le matras s'eſt caſſé, alors le défaut de conſiſtance du cornet, l'état de molleſſe où il eſt réduit, ne laiſſe preſque aucun moyen de le prendre ſans l'entamer, & de l'introduire ſans accident dans un autre matras : on ſe détermine preſque toujours à recommencer l'opération, & ce parti eſt le plus ſage, parce qu'en voulant tirer avantage du cornet repris avec ſoin dans le matras caſſé, on auroit la crainte aſſez bien fondée de ne l'avoir point recueilli tout entier.

On ne vient de remarquer encore dans la méthode ordinaire de faire le départ des cornets d'Eſſai, que la longueur de l'opération, lorſqu'il y en a un grand nombre à départir tout-à-la-fois, les riſques qu'on y court de tomber dans quelque erreur, pour peu que trois des choſes principales

qui y concourent, le baſſin, le matras & le creuſet ne reſtent pas dans l'ordre qu'on a d'abord établi, & enfin une double opération à laquelle les Eſſayeurs ſont quelquefois contraints par la rupture des matras: mais cette méthode laiſſe toujours une ſorte d'incertitude dans les réſultats qui en naiſſent, quelqu'intelligent & ſcrupuleux que ſoit l'Eſſayeur qui la ſuit; il ne ſauroit répondre qu'il a porté l'eſprit de nitre, ſoit affoibli, ſoit pur, au même degré d'ébullition dans douze ou quinze matras qu'il a employés: ſi dans le cours de ſon opération il eſt obligé de ſe ſervir d'un eſprit de nitre, qui, quoique propre aux Eſſais, ne ſoit pas préciſément le même que celui dont il a déjà reconnu la bonne qualité par une épreuve ſûre, il n'eſt pas abſolument certain que ce nouveau diſſolvant ait produit tout l'effet qu'il en a attendu: des cornets conſervés dans leur entier, ſans la moindre altération à leur ſurface, & de la couleur riche qu'ils ont au ſortir du recuit, ne ſont pas conſtamment une preuve que le départ a été complet; il arrive tous les jours, qu'en eſſayant de l'or fin, & en obtenant des cornets, qui ont toute la perfection apparente dont je viens de parler, on remarque, en les peſant, une légère augmentation de poids qui eſt dûe à une petite portion d'argent que l'eſprit de nitre n'a pas diſſoute; & on ne ſauroit ſe tromper ſur cet excédant de poids, puiſqu'il réſulte de la comparaiſon du poids principal de la ſemelle d'or dont on s'eſt ſervi pour la matière de l'Eſſai, avec le cornet qui ne doit repréſenter tout au plus que la portion de cette matière qui eſt entrée dans l'opération. Si dans les cornets qui proviennent tous les jours des différentes matières d'or qu'on eſſaye, on ne s'aperçoit pas de cette ſurcharge légère, qui peut cependant y avoir lieu, comme dans ceux qui réſultent quelquefois des épreuves faites ſur l'or fin, c'eſt qu'on ignore le titre de ces matières, ou qu'au moins on n'en a pas une connoiſſance exacte: on voit des cornets d'or qui ont, en apparence, toute leur perfection, & on conclut avec aſſez de vraiſemblance que ces cornets, annonçant à l'extérieur leur dernier point de pureté, ils doivent donner,

par le poids juste qu'ils ont, le titre bien réel de ces matières: mais un autre cornet, pour lequel on eût employé d'abord une quantité précise d'or fin, & qui eût été départi à côté de ceux-là dans un même matras, y auroit fait connoître un excédant de poids, le degré juste de cette augmentation, si réellement elle s'y fût trouvée; & pendant que l'imperfection du départ n'auroit pas même pu être soupçonnée, ce cornet auroit instruit, comme un témoin exact, de l'état bien positif des autres cornets, en donnant, par le sien même, une preuve évidente de cette imperfection du départ.

Il faut donc ajouter aux inconvéniens attachés à la méthode ordinaire, pour le départ des cornets, pour de simples manipulations, l'incertitude où sont les Essayeurs d'avoir saisi le point de précision dans l'objet essentiel, dans le titre des matières d'or, & de le retrouver constamment, en revenant aux mêmes matières par des épreuves multipliées.

Afin que l'Académie puisse juger nettement, & d'un coup-d'œil, de l'avantage du procédé nouveau pour le départ des Essais d'or, que je propose de substituer à la méthode ordinaire, quant à ce point particulier, il me paroît convenable que la marche que j'ai tenue dans l'exposé qu'on a vu des inconvéniens attachés à celle-ci, soit la même dans l'exposé du moyen propre à les écarter, & dans l'application naturelle de ce moyen seul à toutes les circonstances du départ.

Je commence par prier l'Académie de regarder, 1.° comme un fait constant, que le départ des cornets d'Essais a lieu d'une manière aussi parfaite, lorsqu'ils sont renfermés dans des étuis d'or, tels que je les ai décrits, que quand ils sont, suivant l'usage, entièrement à découvert dans un matras: 2.° que plusieurs cornets renfermés chacun dans leur étui, & réunis dans un seul matras, y sont départis aussi complètement qu'un seul cornet contenu dans un étui, ou mis à nu dans le matras: toutes mes expériences, & elles ont été en grand nombre, m'autorisent à assurer ces deux points essentiels, & d'où naît l'utilité de la méthode que je propose. J'ai

toujours pris pour base des épreuves que j'ai faites, des matières d'or qui m'étoient connues par des expériences précédentes, ou que j'avois alliées moi-même dans la coupelle, en employant une quantité déterminée d'or fin & de cuivre rouge: j'ai soumis souvent l'or fin au départ, sans y joindre le moindre alliage: non content d'avoir composé des matières à quatre ou cinq titres différens, je les ai suivis tous depuis un karat jusqu'à vingt-quatre: dans le cours de ces opérations, j'ai fait usage de six ou sept étuis à la fois dans un petit matras ordinaire, qui m'avoit toujours servi pour le départ à nu d'un cornet seul, & dans lequel je n'ai guère mis plus d'esprit de nitre, pour ces six ou sept cornets réunis, que pour un seul que j'y aurois voulu départir. J'ai toujours vu que la quantité précise d'or fin employée pour l'essai, & variée suivant les titres que j'avois eu dessein de représenter, se retrouvoit dans les cornets que je retirois: j'ai même remarqué un fait qui confirme la marche égale des cornets renfermés dans leur étui, soit pour l'exactitude du départ, soit pour l'imperfection légère qui peut s'y trouver. Ayant eu l'occasion de faire usage d'un esprit de nitre qui n'étoit pas précisément le même que celui dont je m'étois servi pour mes premières expériences, je l'employai au départ de six cornets renfermés dans leur étui, & contenus tous dans un seul matras: après le recuit, je m'aperçus en pesant le premier de ces cornets, que son poids étoit plus fort d'un trente-deuxième de karat, ou environ, qu'il n'auroit dû être, d'après la quantité déterminée d'or fin que j'avois mise dans la matière de l'Essai, dont ce cornet étoit le résultat: je pesai les cinq autres qui avoient également un léger excédant de poids, & qui s'ils me firent connoître que l'esprit de nitre n'avoit pas produit sur eux tout l'effet que j'en attendois, me prouvèrent en même temps une chose très-essentielle pour mes opérations, l'égalité de cet effet sur plusieurs cornets réunis, & m'établirent dans la confiance de regarder un départ comme généralement complet, quand un étui, sorti d'un matras, où il auroit été exposé avec beaucoup d'autres, à l'action de l'esprit de nitre,

me fourniroit un cornet d'Eſſai, dont le poids ſeroit égal à celui de l'or fin que j'y aurois employé.

Lorſqu'on voudra faire uſage de ces étuis, il conviendra d'établir un premier ordre, à l'égard des opérations antérieures au départ, qui s'étendra aux étuis même, & écartera toute erreur: on aſſignera d'abord un numéro à chacune des matières qu'on ſe propoſera d'eſſayer; les petits baſſins, dans leſquels on mettra les échantillons de ces matières & le nom de ceux à qui elles appartiendront, pour en tirer la portion qu'exigera l'Eſſai, porteront chacun un numéro pareil à celui de ces mêmes matières: à meſure que chaque peſée, tant de la matière d'or que de l'argent néceſſaire au départ, ſera faite, on la mettra dans le baſſin auquel elle correſpond; ou, pour la commodité du tranſport, ſur un plateau quarré de cuivre dont les bords ſeront relevés, & qui, partagé intérieurement en plus ou moins de caſes numérotées, recevra la matière des Eſſais dans l'ordre où elle aura été peſée. L'arrangement qui aura eu lieu d'abord pour ces préparatifs de l'opération, ſubſiſtera dans toutes ſes ſuites; celui des coupelles dans la moufle, l'aplatiſſement des boutons d'Eſſais qu'on en retirera, les recuits qu'ils demanderont, leur réduction en lames très-flexibles, tout ſera fait dans l'ordre primitivement établi, juſqu'à ce que ces boutons d'Eſſais parvenus à l'état de cornets, ſeront renfermés dans des étuis; ceux-ci qui porteront un *numero*, recevront les cornets dont le *numero* ſera le même que le leur, & dès-lors il n'y a plus de confuſion à craindre, quoiqu'on perde ces cornets de vue juſqu'au moment, où ſortis des étuis dans toute leur beauté, ils donneront, par leur poids, le réſultat de l'opération. On met donc pêle-mêle tous les étuis dans un matras, & on y verſe de l'eſprit de nitre affoibli pour procéder au départ; mais avant de placer le matras ſur le feu, on y introduit un autre étui dont j'ai déjà parlé, celui qui contient un cornet dont la partie en or eſt parfaitement connue, qu'on peut retirer ſeul du matras, quand on le veut, à la faveur du fil d'or auquel il eſt attaché, & qui par l'état du cornet qu'il

renferme,

renſerme, donne lieu de juger ſûrement du point où en eſt le départ.

Lorſque l'eſprit de nitre affoibli, & celui qu'on a employé pur en ſecond lieu, paroiſſent avoir exercé toute leur action ſur les cornets, on ôte le matras de deſſus le feu; on retire l'étui dont le cornet doit ſervir de guide, & après l'avoir lavé dans pluſieurs eaux, on le fait recuire: ſi le cornet qu'il reſtitue annonce par ſon poids que le départ n'eſt pas abſolument complet, on remet le matras ſur le feu pour y faire bouillir de nouveau l'eſprit de nitre qu'il contient; ou ſi l'on ſoupçonne que ce diſſolvant a perdu quelque choſe de ſon activité, on y en verſe d'autre d'une qualité éprouvée, qui, après une ébullition de peu de durée, achève l'opération.

Si, au contraire, on eſt averti par le rapport fidèle de ce même cornet, que le départ eſt terminé, on décante l'eſprit de nitre, on lave dans le matras même, & à pluſieurs repriſes, les autres étuis; lorſque l'eau y a repris toute ſa tranſparence, on la verſe entièrement & ſeule, ſi l'on veut d'abord, pour faire gliſſer enſuite les étuis le long du col du matras, les recevoir l'un après l'autre dans la main, ou les faire tomber dans un vaſe plein d'eau, à la ſurface de laquelle nage une rondelle de liége, qui s'oppoſe à la chute trop précipitée de ces étuis. On range enfin ces étuis l'un à côté de l'autre, dans une petite boîte d'argent de deux pouces de largeur en tout ſens, de quatre à cinq lignes de profondeur, à laquelle on a adapté un couvercle du même métal, mais qui en eſt indépendant; cette boîte eſt contenue elle-même dans une eſpèce d'autre boîte de tôle, qui a auſſi ſon couvercle, mais qui n'eſt fermée que de trois côtés; la bordure d'un de ces côtés qu'on a tenue plus haute que celle des deux autres côtés fermés, eſt repliée horizontalement, & forme une ſaillie extérieure, qui donne la facilité de ſaiſir avec une pince la boîte de tôle, & conſéquemment d'enlever la boîte d'argent qu'elle contient, lorſqu'on veut retirer l'une & l'autre du feu.

C'eſt dans une boîte ainſi diſpoſée, miſe au milieu de quelques charbons allumés, & dans un très-petit eſpace, qu'on

peut donner un recuit prompt à douze étuis à la fois, à vingt-quatre, si l'on veut, en donnant à la boîte plus de profondeur, & suppléer par-là à l'usage beaucoup plus embarrassant d'un grand nombre de creusets : il suffit, après avoir retiré les deux boîtes du feu, & en tenant, au moyen de la pince, celle qui est de tôle, de la pencher, privée de son couvercle, du côté où elle n'est point fermée, pour que la boîte d'argent s'en dégage avec facilité, glisse sur la tablette du fourneau, & s'y refroidisse en un moment.

Il est aisé de voir actuellement, que du procédé nouveau, pour l'opération du départ dont je viens d'exposer les détails, il résulte des avantages que n'a point la méthode ordinaire : cette opération devient & plus simple & plus courte par ce nouveau procédé; on n'y court point les risques de confondre les cornets d'Essais; les étuis, dans la rupture des matras, préservent ces cornets de tout accident, & passent avec eux, sans le moindre danger, dans d'autres matras; ce procédé enfin paroît conduire à toute l'exactitude qu'il est possible d'espérer dans un travail si délicat.

Peut-être, en adoptant la méthode que je viens de présenter, & en suivant avec soin la marche que j'ai tracée, remarquera-t-on quelquefois de légères variations dans le cours des expériences qu'on sera curieux de répéter d'après celles que j'ai faites : mais les différences qu'on pourra observer, & qui ne seront jamais bien marquées, à moins qu'un défaut d'attention n'ait fait tomber dans quelque erreur notable, ces différences ne tiendront pas proprement à l'opération du départ; elles auront leur cause dans les opérations antérieures à celle-ci : une balance qui n'a ni assez de sensibilité, ni une exactitude constante; un mélange inégal des deux ou trois métaux dont peut être composé un lingot qu'on se propose d'essayer ; une distraction momentanée pendant qu'on pèse la matière des Essais; quelque partie impalpable qui s'en écarte, lorsqu'on enveloppe cette matière avec l'argent nécessaire au départ; un pétillement passager de la matière en fusion dans la coupelle duquel on ne s'est pas aperçu; la litharge qui, en

s'imbibant dans la coupelle, a entraîné plus d'argent aurifère qu'elle n'en dérobe ordinairement; quelques globules d'argent aurifère qui sont restés sur le bassin de la coupelle, & qui ont échappé à la vue, lorsqu'on en a détaché le bouton d'Essai; des parcelles légères qui se sont séparées du bouton, pendant qu'on l'aplatissoit, qu'on lui donnoit les recuits nécessaires, & qu'on le réduisoit en lame pour en former un cornet; toutes ces différentes manipulations peuvent occasionner une perte plus ou moins sensible sur la portion précise d'or qu'on a pour but de connoître. Mais comme il n'a été souvent rien observé dans tout ce qui a précédé le départ, qui ait pu faire remonter à la source de cette perte, & que le cornet d'Essai, au sortir du recuit, annonce, par son poids, qu'il n'a pas toute la matière d'or qu'il devoit représenter; l'attention se borne à ce qui concerne le cornet en cet état, & on ne voit la cause de la perte qu'il a éprouvée, que dans l'imperfection du départ.

Cependant, qu'on y fasse réflexion, & on verra que, si en employant la méthode que j'ai indiquée, on remarquoit des variations dans les différens Essais qu'on feroit, il seroit difficile de concevoir qu'elles eussent leur principe dans quelque vice du départ. La base des expériences seroit sans doute, comme je l'ai dit, de l'or fin porté au titre de 24 karats, ou au moins à celui de 23 karats $\frac{31}{32}$; en alliant soi-même les matières dans la coupelle, pour qu'il en résultât différens titres, on emploîroit des quantités d'or fin bien déterminées; on y ajouteroit l'argent fin qu'exige le départ; & la quantité de ce dernier métal qu'on auroit jugé convenable pour l'Essai destiné à devenir le guide de l'opération, serviroit de règle pour en joindre une quantité proportionnelle aux autres Essais à différens titres qu'on se seroit proposé de faire.

Comment, dans la supposition où toutes les opérations antérieures au départ, auroient été également bien suivies, & où il ne fût arrivé aucune perte qui eût pris son origine dans quelqu'une des causes dont j'ai parlé plus haut; comment,

dis-je, feroit-il poffible que les cornets dépendans de ces différens Effais, ne repréfentaffent pas refpectivement la quantité précife d'or mife d'abord dans chacun de ces mêmes Effais? ils auroient éprouvé, dans leur étui, & pendant une durée de temps égale, la même action du même efprit de nitre; ils ne feroient fortis du matras, qu'autant que le cornet qu'on leur auroit affocié, comme un guide fûr, en feroit forti le premier, & auroit annoncé l'exactitude du départ; les lotions répétées leur auroient été communes; ils auroient fubi le même degré de recuit; & fortant enfin de leur étui, ils auroient paffé à la balance également bien confervés.

Il feroit difficile, je le répète, de faire retomber avec fondement, fur l'opération du départ, les inégalités qu'on auroit remarquées dans des Effais d'or réitérés; il feroit plus naturel d'en chercher la caufe dans tout ce qui auroit précédé cette opération; & l'attention portée principalement de ce côté, produiroit un effet avantageux: Dans la jufte confiance où feroient les Effayeurs, qu'une fois parvenus à l'opération du départ, ils n'auroient plus à craindre des inégalités, leur vigilance fe tourneroit prefque toute entière du côté de la partie du travail, qui eft antérieure à cette opération; & ces foins bien foutenus de leur part, les conduiroient à une précifion pour la totalité du travail, qu'ils ne font pas toujours fûrs d'obtenir par la méthode ordinaire, malgré l'application qu'ils peuvent y donner, & les talens qu'ont quelques-uns d'entr'eux pour cet Art intéreffant.

Je terminerai ce Mémoire par deux obfervations; l'une, fur la manière d'employer l'efprit de nitre dans l'opération du départ; l'autre, fur l'ufage avantageux qu'on pourroit faire d'une compofition différente de celle de l'or gris, pour former les étuis dans lefquels les cornets d'effais doivent être contenus.

Quoiqu'on réuffiffe ordinairement à faire le départ, en fe fervant d'un efprit de nitre bien concentré qu'on affoiblit d'abord par une égale quantité d'eau de rivière, afin qu'il n'attaque pas avec trop de violence les cornets d'effais, & qu'on emploie enfuite dans toute fa force pour achever le

départ, j'ai cependant remarqué qu'on obtient un ſuccès plus conſtant de l'emploi d'un pareil eſprit de nitre, lorſqu'on s'en ſert à trois repriſes, & en graduant ſa force; c'eſt à-dire, en y mêlant une égale quantité d'eau pour commencer l'opération, en ne mettant enſuite qu'une partie d'eau ſur trois parties d'eſprit de nitre pour la continuer, & en le faiſant ſervir enfin dans toute ſon activité, pendant quelques minutes, pour qu'il ne ſubſiſte aucun doute ſur l'exactitude du départ.

Je dois, en ſecond lieu, prévenir les Eſſayeurs que les étuis d'or gris reprennent peu-à-peu, & juſqu'à un certain point, la couleur naturelle de l'or, après avoir ſervi pendant quelque temps, parce que l'action ſouvent répétée, de l'eſprit de nitre & les recuits multipliés, enlèvent la petite portion de fer qui ſe trouve à la ſurface de ces étuis, & leur ôtent par-là une partie de la propriété qu'ils ont de ne pas s'attacher aux cornets d'eſſais. Il y a tout lieu de croire que la Platine pure, ſur laquelle l'eſprit de nitre n'a aucune action, fondue avec de l'or fin dans une certaine proportion, & peut-être ſeule, d'après les recherches curieuſes de M. le Comte de Sickingen & la malléabilité qu'il eſt parvenu à donner à ce métal ſi rebelle par ſa nature; il eſt à préſumer, dis-je, que la Platine deviendra favorable pour la compoſition de la matière de ces ſortes d'étuis, & les garantira de l'altération qu'un mélange d'or & de fer éprouve néceſſairement à ſa ſurface dans l'opération du départ.

Nota. J'avois lû ce Mémoire à l'Académie, lorſque M. le Comte de Milly, qui en eſt Membre, voulut bien me donner un morceau de la platine ductile, qu'il avoit obtenue de ſes expériences ſur ce métal, & dont il s'étoit ſervi avec ſuccès pour différens ouvrages de Bijouterie. J'en ai formé des étuis dont le corps étoit de platine pure, & les viroles, compoſées de deux pièces, étoient ſoudées ſolidement avec de l'or fin. Ces étuis ont réuſſi, comme je l'eſpérois, pour l'emploi auquel ils m'avoient paru propres, dans l'opération du départ; ils n'y éprouvent, en effet, aucune altération; ils conſervent toute leur conſiſtance dans le recuit, ou au moins n'y perdent preſque rien de leur reſſort. Il eſt eſſentiel, à l'égard du recuit qu'on donne aux étuis, lequel ſe communique néceſſairement tel qu'il eſt

aux cornets d'or qu'ils contiennent; il eſt eſſentiel, dis-je, que ce recuit ne ſoit pas porté juſqu'au *blanc*, c'eſt-à-dire à un point qui approche fort près de celui où commence la fuſion. Ce n'eſt pas ſans doute qu'il y eût quelque riſque à courir pour les étuis de platine, ou au moins pour le corps de ces étuis; mais les cornets d'or qui s'y trouveroient renfermés, pourroient, par un recuit exceſſif, s'attacher aux parois intérieures des étuis, ſoit qu'ils fuſſent de platine, ſoit qu'ils fuſſent d'or uni au ſer : au lieu que par un recuit modéré de l'une & l'autre ſorte de ces étuis, on evite toujours cet inconvénient, ſur-tout ſi on donne aux cornets d'or le temps de s'y deſſécher peu-à-peu, de ſe reſſerrer de toutes parts, & de ſe rouler ſur eux-mêmes, avant que de paſſer au rouge couleur de ceriſe, qu'il ſuffit de leur donner.



CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES
SUR LA NATURE DES ACIDES,
Et sur les Principes dont ils sont composés.

Par M. LAVOISIER.

LORSQUE les anciens Chimistes avoient réduit un corps en huile, en sel, en terre & en eau, ils croyoient avoir atteint les bornes de l'analyse chimique ; & en conséquence ils avoient donné au sel & à l'huile le nom de *principes des corps.*

Présenté le 5 Septemb. 1777. Lû le 23 Nov. 1779.

A mesure que l'art fit de nouveaux progrès, les Chimistes qui leur succédèrent, s'aperçurent que les substances qu'ils avoient regardées comme principes, étoient encore susceptibles de décomposition ; & ils reconnurent successivement que tous les sels neutres, par exemple, étoient formés par la réunion de deux substances, d'un acide quelconque & d'une base saline, terreuse ou métallique.

De-là toute la théorie des sels neutres, qui fixe l'attention des Chimistes depuis plus d'un siècle, & qui se trouve aujourd'hui tellement perfectionnée, qu'on peut la regarder comme la partie la plus certaine & la plus complète de la Chimie.

D'après cet état où la science chimique nous est transmise, il nous reste à faire sur les principes constituans des sels neutres ce que les Chimistes nos prédécesseurs ont fait sur les sels neutres eux-mêmes, à attaquer les acides & les bases, & à reculer encore d'un degré les bornes de l'analyse chimique en ce genre.

J'ai déjà fait part à l'Académie de mes premiers essais sur ce sujet : je lui ai démontré dans de précédens Mémoires, autant toutefois qu'il est possible de démontrer en Physique & en Chimie, que l'air le plus pur, celui auquel M. Priestley

a donné le nom *d'air déphlogistiqué,* entroit, comme partie constituante, dans la composition de plusieurs acides, & notamment de l'acide phosphorique, de l'acide vitriolique & de l'acide nitreux.

Des expériences plus multipliées me mettent aujourd'hui dans le cas de généraliser ces conséquences, & d'avancer que l'air le plus pur, l'air éminemment respirable, est le principe constitutif de l'acidité ; que ce principe est commun à tous les acides, & qu'il entre ensuite dans la composition de chacun d'eux, un ou plusieurs autres principes qui les différencie & qui les constitue plutôt tel acide que tel autre.

D'après ces vérités, que je regarde déjà comme très-solidement établies, je désignerai dorénavant l'air déphlogistiqué ou air éminemment respirable dans l'état de combinaison & de fixité, par le nom de *principe acidifiant*, ou, si l'on aime mieux la même signification sous un mot grec par celui de *principe oxygine :* cette dénomination sauvera les périphrases, mettra plus de rigueur dans ma manière de m'exprimer, & évitera les équivoques dans lesquelles on seroit exposé à tomber sans cesse, si je me servois du mot d'*air :* ce nom en effet, d'après les découvertes modernes, est devenu un mot générique, & qui s'applique d'ailleurs à des substances dans l'état d'élasticité, tandis qu'il est ici question de les considérer dans l'état de combinaison, & sous la forme liquide ou concrète.

Sans répéter des détails que j'ai donnés ailleurs, je rappellerai ici en peu de mots, en adoptant ce nouveau langage :

1.° Que le principe acidifiant ou oxygine, combiné avec la matière du feu, de la chaleur & de la lumière, forme l'air le plus pur, celui que M. Priestley a nommé *air déphlogistiqué ;* cette première proposition, il est vrai, n'est pas rigoureusement démontrée, & peut-être même n'est-elle pas susceptible de l'être; aussi ne l'ai-je donnée que comme une idée que je regarde comme très-probable; & en cela, il ne faut pas la confondre avec les propositions qui vont suivre,

& qui

& qui ſont appuyées ſur des expériences & ſur des preuves rigoureuſes :

2.° Que ce même principe acidifiant ou oxygine, combiné avec les ſubſtances charbonneuſes ou le charbon, forme l'acide crayeux ou air fixe :

3.° Qu'avec le ſoufre, il forme l'acide vitriolique :

4.° Qu'avec l'air nitreux, il forme l'acide du nitre :

5.° Qu'avec le phoſphore de Kunckel, il forme l'acide phoſphorique :

6.° Qu'avec les ſubſtances métalliques en général, il forme des chaux métalliques, ſauf les exceptions dont je parlerai dans ce Mémoire ou dans les ſuivans.

Voilà à peu-près à quoi ſe bornent dans ce moment les connoiſſances générales acquiſes ſur la combinaiſon du principe oxygine avec les différentes ſubſtances de la Nature, & il n'eſt pas difficile de voir, qu'il reſte à cet égard le champ le plus vaſte à parcourir; qu'il exiſte une partie de la Chimie toute nouvelle & entièrement inconnue juſqu'à ce jour, & qui ne ſera complète que lorſqu'on ſera parvenu à déterminer le degré d'affinité de ce principe avec toutes les ſubſtances avec leſquelles il eſt ſuſceptible de ſe combiner, & à connoître les différentes eſpèces de compoſés qui en réſultent.

Tous les Chimiſtes ſavent que plus les corps ſur leſquels on opère ſont ſimples, que plus on approche de réduire les ſubſtances en leurs molécules élémentaires, plus auſſi les moyens de décompoſition & de recompoſition deviennent difficiles; on conçoit donc que la décompoſition & la recompoſition des acides, doivent préſenter des difficultés beaucoup plus grandes que l'analyſe de ſels neutres, dans la combinaiſon deſquels ils entrent. J'eſpère cependant être en état de faire voir dans la ſuite qu'il n'eſt aucun acide, ſi ce n'eſt peut-être celui du ſel marin, qu'on ne puiſſe décompoſer & recompoſer,

& auquel on ne puiſſe enlever ou rendre à volonté le principe de l'acidité.

Ce genre de travail demande une grande variété dans les moyens; & les procédés néceſſaires pour parvenir à la combinaiſon, varient ſuivant les différentes ſubſtances ſur leſquelles on opère: pour les unes, on eſt obligé d'avoir recours à la combuſtion, ſoit dans l'air atmoſphérique, ſoit dans l'air pur, & c'eſt ce qui a lieu à l'égard du ſoufre, du phoſphore & du charbon: ces ſubſtances, pendant la combuſtion, abſorbent le principe acidifiant ou oxygine, & par l'acceſſion de ce principe, ils ſe convertiſſent en acide vitriolique, en acide phoſphorique & en acide crayeux aëriforme ou air fixe: pour d'autres ſubſtances, la ſimple expoſition à l'air, aidée d'un degré de chaleur médiocre, ſuffit pour opérer la combinaiſon, & c'eſt ce qui arrive à toutes les ſubſtances végétales, ſuſceptibles de paſſer à la fermentation acide: dans toutes les opérations de ce genre, il y a abſorption de la partie la plus pure de l'air, & le principe acidifiant engagé dans la combinaiſon, forme autant d'acides particuliers qu'il y a de ſubſtances ſuſceptibles de paſſer à la fermentation acide: enfin, dans le plus grand nombre des cas, on eſt obligé d'avoir recours à la ſcience des affinités, & d'employer le principe acidifiant déjà engagé dans une autre combinaiſon.

L'exemple que je vais donner aujourd'hui eſt de ce dernier genre; je le tirerai d'une expérience très-connue depuis quelques années, d'après les Mémoires de M. Bergman; c'eſt la formation de l'acide du ſucre: cet acide, d'après les expériences dont je vais rendre compte, ne me paroît être autre choſe que le ſucre en entier combiné avec le principe acidifiant ou oxygine; & je me propoſe de faire voir ſucceſſivement dans différens Mémoires, qu'on peut, par des procédés analogues, unir ce même principe à la corne des animaux, à la ſoie, à la limphe animale, à la cire, aux huiles eſſentielles, aux huiles par expreſſion, à la manne, à l'amidon, à l'arſenic, au fer, & probablement à un grand nombre d'autres ſubſtances des trois règnes, & les convertir ainſi en de véritables acides.

Avant d'entrer en matière, je prie l'Académie de ſe rappeler que l'acide nitreux, d'après les expériences que je lui ai précédemment expoſées, & que j'ai répétées ſous ſes yeux, eſt le réſultat de la combinaiſon de l'air nitreux avec l'air le plus pur ou principe acidifiant; que la proportion de ces deux principes varie dans les différentes eſpèces d'acide nitreux; & que celui qui eſt fumant, par exemple, contient une ſurabondance d'air nitreux; de ſorte qu'on peut regarder l'eſprit de nitre fumant comme un acide nitreux imprégné & ſurchargé d'air nitreux, tandis qu'au contraire celui qui ne répand que des vapeurs blanches eſt ſurchargé d'air déphlogiſtiqué. J'ajouterai à ces notions, que, par des expériences multipliées & faites depuis la publication du Mémoire que j'ai donné en 1776, je me ſuis aſſuré que l'acide nitreux que j'emploie dans mes expériences, & qui eſt toujours le même, contient par once environ 240 pouces cubiques de fluides aériformes; ſavoir, 120 pouces d'air nitreux & environ autant d'air le plus pur, ce qui équivaut en poids environ à 48 grains d'air nitreux & 60 grains de principe acidifiant ou oxygine également par once: tout le reſte n'eſt que du flegme ou de l'eau.

D'après ces données, toutes les fois que j'aurai introduit dans une combinaiſon une once d'acide nitreux, & que par le réſultat de l'opération, j'aurai obtenu 120 pouces cubiques d'air nitreux, il demeurera pour conſtant qu'il eſt reſté dans la combinaiſon 120 pouces cubiques de l'air le plus pur, ou, ce qui revient au même, 60 grains de principe acidifiant. Appliquons maintenant ces connoiſſances à la combinaiſon de l'acide nitreux avec le ſucre.

J'ai mis dans une petite cornue de verre 4 gros de ſucre, & j'ai verſé par-deſſus un mélange de 2 onces d'eau & de 2 onces de l'acide nitreux que je viens de déſigner: jai placé cette cornue à feu nu dans un petit fourneau de réverbère; j'ai adapté à ſon col, qui étoit fort alongé, une bouteille à deux gouleaux, dans laquelle j'avois introduit 8 onces 7 gros 24 grains d'eau diſtillée: du ſecond gouleau de cette même

bouteille, partoit un tube de verre qui s'adaptoit à l'appareil chimico-pneumatique ordinaire à l'eau.

On voit que p r ces diſpoſitions, j'avois le double avantage, d'une part de retenir dans la bouteille intermédiaire tous les produits qui pouvoient paſſer dans la diſtillation, & qui étoient ſuſceptibles de ſe condenſer; & d'une autre, de recevoir ſous des cloches les différens airs qui pouvoient ſe dégager; de ſorte que rien ne me manquoit pour obtenir la totalité des produits de l'opération.

J'ai luté avec la plus grande exactitude toutes les jointures avec du lut gras recouvert avec des bandes de toile enduite de blanc d'œuf & de chaux : enfin lorſque le lut extérieur a eu pris toute la conſiſtance néceſſaire pour pouvoir contenir le lut gras, dans le cas où il ſeroit venu à ſe ramollir, j'ai mis quelques charbons allumés ſous la cornue.

D'abord le ſucre s'eſt diſſout paiſiblement; mais lorſque la liqueur a commencé à acquérir 40 ou 45 degrés de chaleur au thermomètre de M. de Reaumur, il a commencé à s'exciter un bouillonnement très-vif, ou plutôt une effervefcence conſidérable, qui n'étoit autre choſe qu'un dégagement très-rapide de l'air nitreux, le plus pur & le plus fort que j'aye jamais obtenu. Il eſt important d'aller extrêmement lentement dans cette opération, autrement on décompoſe l'acide du ſucre lui-même; & au lieu d'obtenir de l'air nitreux pur, on l'obtient conſidérablement mélangé d'air inflammable & d'acide crayeux aériforme. Il faut en conſéquence retirer tout le feu au moment où l'ébullition commence, & n'en remettre à meſure que ce qui eſt néceſſaire pour l'entretenir : vers la moitié ou les deux tiers de l'opération, l'air nitreux ne paſſe plus auſſi pur; il eſt accompagné d'abord d'une petite portion d'acide crayeux aériforme, qui va enſuite toujours en augmentant, & d'un peu d'air inflammable. Lorſqu'il ne paſſe plus que de l'acide crayeux aériforme & de l'air inflammable, on doit regarder l'opération comme finie.

J'ai fractionné en un grand nombre de portions les fluides aériformes qui ſe ſont dégagés dans cette opération; après quoi

j'en ai examiné la nature par tous les moyens que fournit la Chimie moderne, & j'ai reconnu que les 2 onces d'acide nitreux & les 4 gros de sucre que j'avois employés, m'avoient donné

Air nitreux	190 pouces.
Air fixe ou acide crayeux aériforme	90
Air inflammable	25
TOTAL	305

Ayant désapareillé les vaisseaux, j'ai trouvé d'une part dans la cornue 2 onces 6 gros 18 grains d'un acide transparent & sans couleur, & tel que l'a décrit M. Bergman, si ce n'est qu'il étoit en liqueur: l'eau de la bouteille intermédiaire étoit augmentée de 1 once 2 gros 12 grains; elle étoit médiocrement acide & avoit une légère odeur nitreuse.

On concevra bientôt que pour donner quelqu'exactitude aux résultats de cette expérience, il étoit nécessaire que je connusse exactement la qualité & la quantité d'acide qui s'étoit séparé par voie de distillation & qui s'étoit condensé dans la bouteille intermédiaire: il est évident en effet qu'elle n'étoit pour rien dans l'opération; & que pour pouvoir faire des calculs exacts, il étoit nécessaire de la déduire de la quantité totale d'acide employée. Pour remplir cet objet, j'ai versé goutte à goutte sur la liqueur acide de la bouteille intermédiaire une liqueur alkaline, composée de cinq parties d'eau & de quatre d'alkali fixe végétal concret très-pur: la quantité nécessaire pour arriver juste au point de saturation, s'est trouvée de 6 gros 12 grains. J'ai ensuite déterminé, par une seconde expérience, combien il falloit de l'acide primitivement employé pour saturer 6 gros 12 grains de la même liqueur alkaline; le résultat m'a donné 3 gros 56 grains $\frac{1}{3}$: d'où j'ai conclu, que des 2 onces d'acide nitreux que j'avois employés, 3 gros 56 grains avoient passé en nature dans la distillation, & que par conséquent il n'en étoit entré réellement dans l'expérience que 1 once 4 gros 15 grains $\frac{2}{3}$.

Mais une once d'acide nitreux est composée, ainsi que je

viens de le rappeler il n'y a qu'un moment, de 240 pouces cubiques de fluides aériformes, ſavoir, de 120 pouces cubiques d'air nitreux, & de 120 pouces cubiques de l'air le plus pur; ainſi, dans l'expérience dont il eſt ici queſtion, j'ai réellement combiné avec le ſucre 183 pouces cubiques d'air nitreux, & autant d'air le plus pur, ce qui revient en poids à un peu plus d'un gros d'air nitreux, & à près d'un gros & demi de principe acidifiant ou oxygine. On vient de voir qu'il s'étoit dégagé pendant la combinaiſon 190 pouces d'air nitreux, c'eſt-à-dire, la totalité de ce que j'y avois fait entrer; donc il eſt reſté dans la combinaiſon 183 pouces d'air le plus pur; donc dans la compoſition des 2 onces 6 gros 18 grains d'acide du ſucre en liqueur, qui me ſont reſtés dans la cornue, il entroit 4 gros de ſucre & 183 pouces d'air éminemment reſpirable, ou 1 gros 30 grains de principe acidifiant ou oxygine; ſauf la portion d'acide crayeux aériforme qui s'étoit dégagée ſur la fin de l'opération, & qui eſt dûe, comme on le verra bientôt, à la décompoſition de l'acide du ſucre lui-même.

M. Bergman, & tous ceux qui, depuis lui, ont écrit ſur cette matière, ont donc été dans l'erreur, lorſqu'ils ont regardé l'acide, dont il eſt ici queſtion, comme le réſultat de la décompoſition du ſucre; il paroît conſtant, au contraire, que cet acide eſt formé par la combinaiſon du ſucre, avec près du tiers de ſon poids de principe acidifiant.

Je ne m'en ſuis pas tenu à cette première expérience, & j'ai voulu connoître les changemens qu'apporteroient aux réſultats que j'avois obtenus les différentes proportions de ſucre & d'acide nitreux; en conſéquence, j'ai répété l'expérience ci-deſſus avec les mêmes circonſtances, avec la même quantité d'acide nitreux & d'eau, & en employant ſeulement 3 gros de ſucre au lieu de 4, j'ai procédé très-lentement comme la première fois, & j'ai obtenu

Air nitreux	176 pouces
Air fixe ou acide crayeux aériforme	127.
Air inflammable	17.
TOTAL	320.

Si j'ai eu dans cette opération un peu plus d'acide crayeux que dans la précédente, j'en attribue la cause à ce que le feu a été poussé un peu davantage sur la fin, & continué un peu plus long-temps.

L'opération étant finie, & les vaisseaux ayant été désappareillés, il s'est trouvé dans la cornue 1 once 7 gros 48 grains d'acide du sucre en liqueur; d'un autre côté, en opérant comme précédemment, j'ai reconnu qu'il avoit passé dans la bouteille intermédiaire par voie de distillation 4 gros 9 grains $\frac{1}{2}$ de l'acide primitivement employé, de sorte que la quantité réelle d'acide nitreux entrée dans l'expérience, n'étoit que de 1 once 3 gros 62 grains $\frac{1}{2}$: cette quantité d'acide, d'après les proportions ci-dessus déterminées, devoit contenir 178 pouces d'air nitreux, & autant d'air pur; d'où l'on voit 1.° que la totalité de l'air nitreux introduit dans cette combinaison en a été chassée, & qu'il n'est resté que l'air pur ou le principe acidifiant: 2.° que les trois gros de sucre que j'avois employés se sont emparés pendant l'effervescence de 89 grains de principe acidifiant ou oxygine, & que ces deux substances réunies, combinées avec le flegme, ont formé la quantité de 1 once 7 gros 48 grains d'acide du sucre.

Indépendamment des lumières que répand ce genre d'expériences, sur la nature des acides, il fournit un nouveau moyen de procéder à l'analyse des substances animales & végétales, & quoique je n'aie rien d'absolument complet à présenter sur cet objet, je vais rendre compte du premier essai que j'en ai fait sur le sucre.

J'ai combiné dans le même appareil que ci-dessus, 2 onces d'acide nitreux, 2 onces d'eau, & 6 gros de sucre; j'ai suivi l'expérience de la même manière, en recevant dans une bouteille intermédiaire l'acide nitreux qui montoit dans la distillation: lorsqu'il a cessé de passer de l'air nitreux, & qu'il ne me restoit plus que de l'acide du sucre dans la cornue, j'ai désappareillé les vaisseaux; j'ai supprimé la bouteille intermédiaire; après quoi j'ai continué à entretenir sous l'acide du sucre un feu doux, en recevant directement dans

des cloches l'air qui ſe dégageoit, juſqu'à ce qu'enfin ayant hauſſé un peu le feu ſur la fin, il ne m'eſt plus reſté qu'un léger enduit charbonneux dans la cornue : j'ai partagé en dix portions le fluide élaſtique qui s'eſt dégagé pendant le cours de cette opération, & j'ai mis une attention très particulière pour ſéparer exactement les différentes eſpèces que j'en ai obtenues. Le Tableau ſuivant préſente le réſultat total de l'expérience.

DÉTAIL *exprimé en pouces cubiques des eſpèces & quantités des différens airs ou fluides aériformes obtenus de la combinaiſon de 2 onces d'acide nitreux, & 6 gros de ſucre pouſſés juſqu'à ſiccité.*

	AIR NITREUX.	ACIDE CRAYEUX aériforme.	AIR INFLAMMABLE.	TOTAL.
1.re Portion..	56 $\frac{1}{3}$	....	....	56 $\frac{1}{3}$
2.e Portion...	49 $\frac{6}{10}$	6	....	55 $\frac{6}{10}$
3.e Portion...	23 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{3}$	50 $\frac{2}{3}$
4.e Portion...	21 $\frac{4}{10}$	30 $\frac{2}{3}$	4 $\frac{1}{3}$	56 $\frac{4}{10}$
5.e Portion...	14 $\frac{6}{10}$	45 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{9}{10}$	63
6.e Portion...	15	39 $\frac{1}{4}$	7 $\frac{1}{2}$	61 $\frac{3}{4}$
7.e Portion...	....	28 $\frac{1}{8}$	8 $\frac{1}{4}$	36 $\frac{3}{8}$
8.e Portion...	....	48	11 $\frac{4}{10}$	59 $\frac{4}{10}$
9.e Portion...	....	32 $\frac{4}{10}$	8	40 $\frac{4}{10}$
10.e Portion...	....	25 $\frac{4}{10}$	17	42 $\frac{4}{10}$
TOTAUX...	180 $\frac{13}{30}$	277 $\frac{101}{120}$	74 $\frac{1}{20}$	522 $\frac{13}{40}$

Je n'avois pas mis d'eau cette fois dans la bouteille intermédiaire; l'opération finie, il s'y eſt trouvé 2 onces $\frac{1}{2}$ d'un acide nitreux foible, qui, d'après la quantité de liqueur alkaline qu'il a été ſuſceptible de ſaturer, s'eſt trouvé répondre à 4 gros 17 grains de l'acide primitivement employé : il n'y avoit eu d'après cela de décompoſé dans cette expérience que

1 once

1 once 3 gros 55 grains d'acide nitreux : or cette quantité d'acide, d'après les proportions ci-dessus, est composée de 177 pouces d'air nitreux environ, & d'autant d'air pur ou éminemment respirable.

Il est aisé de voir, en jetant un coup-d'œil sur le tableau ci-dessus, que l'air nitreux qui étoit entré dans la combinaison comme partie constituante de l'acide nitreux, en est ressorti sous la forme de gas, & dans l'état aériforme; mais qu'est devenu l'air pur ou le principe acidifiant qui formoit le second principe de l'acide nitreux? On a vu, par les expériences précédentes, qu'il commençoit par se combiner avec le sucre pour former avec lui un acide particulier, & l'expérience dont il est ici question, nous apprend, que si après que l'acide du sucre a été formé, on le pousse à un degré de feu modéré, il se résout presque en entier en air fixe ou acide crayeux aériforme & en air inflammable : or, qu'est-ce que l'acide crayeux? J'ai fait voir ailleurs, qu'il étoit un résultat de la combinaison de la matière charbonneuse avec le principe acidifiant ou oxygine; d'où il suit, que le sucre est composé d'un peu d'air inflammable & de beaucoup de matière charbonneuse; cette dernière s'unit avec le principe acidifiant ou oxygine fourni par l'acide nitreux, & forme avec lui la grande quantité d'acide crayeux aériforme qu'on a obtenue sur la fin de l'opération. Je me propose d'éclaircir par de nouvelles expériences, ce que ce genre d'analyse peut encore présenter d'obscur.

Tout ce que je viens de donner pour le sucre, on peut, comme je l'ai déjà dit, l'appliquer à un grand nombre de substances animales & végétales : on obtient de presque toutes, par leur combinaison avec l'acide nitreux, ou, pour parler plus exactement, avec le principe acidifiant contenu dans l'acide nitreux, des acides particuliers, dont plusieurs il est vrai ont des propriétés communes, mais qui présentent des caractères distinctifs dans les résultats des combinaisons. Voilà donc encore une route toute nouvelle qui s'ouvre dans la Chimie, & la partie de cette science qui traite des sels, &

à laquelle quelques Chimiſtes allemands ont donné le nom de *halotechnie*, au lieu de cinq ou ſix acides qu'elle employoit, en aura plus du double, d'après les ſeules connoiſſances que j'ai acquiſes juſqu'à ce moment, & on ne peut pas douter que le nombre ne s'en accroiſſe encore conſidérablement dans la ſuite.

De toutes ces réflexions, & des expériences contenues tant dans ce Mémoire que dans quelques-uns de ceux qui l'ont précédé: il réſulte,

1.° Qu'en général, lorſque le principe acidifiant ou oxygine ſe combine avec un corps quelconque, ſans le décompoſer (ſi on en excepte cependant le plus grand nombre des ſubſtances métalliques), il le convertit en un acide particulier, qui, indépendamment des caractères généraux, communs à tous les acides, en a qui lui ſont propres:

2.° Qu'à l'égard des ſubſtances métalliques, il forme, avec la plupart, des compoſés connus ſous le nom de *chaux métalliques;* j'ajouterai cependant ici, que même dans cette claſſe de ſubſtance il en eſt quelques-unes, comme l'arſenic, le fer, & peut-être pluſieurs autres, qui, combinées avec le principe acidifiant ou oxygine, juſqu'à un certain degré de ſurabondance, prennent non-ſeulement un caractère ſalin, mais encore acquièrent les propriétés communes aux acides, & deviennent comme eux de véritables diſſolvans:

3.° Que le principe acidifiant a, comme tous les autres, ſes différens degrés d'affinité, & qu'il a par exemple beaucoup plus d'affinité avec le ſucre & avec la plupart des ſubſtances végétales & animales, qu'avec l'air nitreux, & que c'eſt par une ſuite de cette préférence qu'il quitte ce dernier pour former avec ces ſubſtances différentes eſpèces d'acides:

4.° Que le nombre des acides qu'on peut former eſt encore abſolument indéterminé, puiſqu'on ne connoît pas toutes les ſubſtances qui ſont ſuſceptibles de ſe combiner avec le principe acidifiant, & qu'on connoît encore moins les moyens qu'on peut employer pour parvenir à la combinaiſon:

5.° Que la nature de l'acide nitreux paroiſſant aujourd'hui mieux connue qu'elle ne l'étoit autrefois, & l'exiſtence de deux principes, ſavoir, l'air nitreux & le principe acidifiant, paroiſſant à peu-près démontré dans cet acide, il devient un moyen d'analyſe précieux pour la Chimie, & qu'il peut en réſulter de grandes lumières dans l'analyſe végétale:

6.° Qu'il ne ſeroit pas impoſſible, ſur-tout d'après la dernière expérience rapportée dans ce Mémoire, que la matière charbonneuſe fût toute formée dans les végétaux, & qu'elle ne fût point l'ouvrage du feu, comme les Chimiſtes l'ont penſé juſqu'ici.

Toutes ces conſéquences ſe trouveront développées, & plus ſolidement établies, par les exemples que je me propoſe de donner ſucceſſivement dans des Mémoires particuliers.



RAPPORT

FAIT

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR LA CLASSE DE CHIMIE.

Le 21 Août 1779.

LE 23 Mai de l'année 1778, M. Sage a lû un Mémoire intitulé: *Obſervations ſur les différentes ſubſtances métalliques, & principalemenn ſur l'or qu'on trouve dans les cendres des végétaux.*

L'Auteur dit dans ce Mémoire, qu'il a retiré de l'or des cendres de ſarment, dans la proportion de 4 gros 12 grains par quintal de ces cendres; dans celle de 2 gros 36 grains par quintal de cendres de bois de hêtre non flotté; dans celle d'un gros 56 grains par quintal de cendres de terreau; & enfin, il ajoute qu'il a tiré juſqu'à 2 onces 44 grains d'un quintal de terre végétale de jardin calcinée. Comme l'or eſt un métal qui n'éprouve point de deſtruction par aucune opération connue de l'Art, ni même probablement par celles de la Nature, & qu'il eſt d'ailleurs ſuſceptible d'une diviſion prodigieuſe, & preſque infinie, comme il eſt par cette raiſon répandu en particules d'une petiteſſe extrême dans preſque tous les corps, ſur-tout dans ceux des lieux habités par les hommes, on conçoit qu'il peut en paſſer quelques atomes même juſque dans les plantes, comme cela arrive à pluſieurs autres métaux.

Cette diſperſion étonnante de l'or eſt un fait curieux qui méritoit l'attention des Chimiſtes: auſſi la préſence de ce métal dans une infinité de corps n'avoit-elle pas échappé aux recherches exactes de pluſieurs Chimiſtes, & en particulier de Beccher, de Cramer, qui ont aſſuré qu'il n'y avoit point de ſable, d'argile, ni d'aucune autre eſpèce de terre dans la Nature, dans leſquels on ne pût démontrer au moins quelques

atomes d'or, & d'Henckel, qui, dans son Ouvrage intitulé, *Flora saturnisans*, a dit que les plantes même pouvoient réellement & essentiellement contenir de l'or.

Un fait comme celui-là est assez important pour mériter qu'on le vérifie, & qu'on le constate à plusieurs reprises; c'est sans doute ce motif louable qui a engagé M. Sage à travailler sur cet objet: si les résultats des expériences dont il a rendu compte dans son Mémoire, n'eussent été que des quantités très-petites, comme celles des Chimistes qui viennent d'être cités, le travail de cet Académicien auroit obtenu facilement la confiance que mérite son zèle: mais dans la vérification des faits dont il s'agit, les produits que M. Sage dit avoir obtenus en or pur, se sont trouvés si considérables, qu'ils ont étonné tous les Chimistes; ils ont fait dans le Public une sensation d'autant plus forte, qu'il en résultoit que les cendres de sarment, & sur-tout la terre végétale de jardin, étoient de vraies mines d'or qu'on pouvoit même exploiter avec un grand bénéfice.

M. le Comte de Lauraguais a été un des premiers qui ait voulu satisfaire sa curiosité sur un fait si merveilleux; il est du moins le premier qui ait fait connoître à l'Académie, & par son moyen au Public, les résultats des travaux qu'il a faits & qu'il a fait faire à ce sujet: il a informé cette Compagnie par une lettre en date du 8 Août 1778, adressée à M. le Marquis de Condorcet Secrétaire, qu'ayant répété les expériences de M. Sage, avec le plus grand soin, & d'après le Mémoire de cet Académicien, qui lui avoit été confié, le produit de ses expériences n'avoit eu rien de comparable à ceux qui étoient annoncés dans le Mémoire de M. Sage, & il a joint à sa lettre un extrait des mêmes expériences, réitérées à sa prière, par M.rs Darcet & Rouelle.

Le résultat du travail de ces Chimistes qui ont opéré en doses quadruples de celles de M. Sage, sur des terres de jardin & des cendres de sarment provenant de différens endroits, s'étant trouvé conforme à ceux qu'avoit eus d'abord M. le Comte de Lauraguais, c'est-à-dire presque nuls en

comparaiſon de ceux de M. Sage, M. de Lauraguais a fini par repréſenter à l'Académie qu'il ſeroit convenable qu'elle décidât irrévocablement cette queſtion, de la quantité d'or qu'on peut retirer des matières végétales, & qu'elle chargeât pluſieurs de ſes Membres de vérifier les faits avec toute l'exactude & tout le ſoin convenables : quatre jours après cette lettre, le 12 Août, M. Sage entrant dans les mêmes vues, lut à l'Académie un Supplément à ſon Mémoire, dans lequel il la prioit auſſi de vouloir bien répéter ſes expériences pour conſtater ſi l'on pouvoit extraire de l'or des végétaux, comme il l'avoit annoncé.

En conſéquence, l'Académie a chargé toute la claſſe de Chimie de faire cette vérification, ce qui a été exécuté en dix ſéances ou aſſemblées, dans le Laboratoire de M. Baumé, & en une dans celui de M. Sage, ces Chimiſtes opérant chacun dans leur Laboratoire, ſous les yeux des Commiſſaires de l'Académie & de pluſieurs autres Académiciens & Savans, & particulièrement de M.rs Tillet, Deſmareſt, le Comte de Milly, de Fontanieu, le Duc de Chaulnes, le Baron de Diétrik, Racle, Eſſayeur de la Monnoie, Rey de Morande, & autres.

Les premières expériences ont été faites le mercredi 26 Août, dans le Laboratoire de M. Baumé, lui opérant, & M. Sage qui y avoit été invité, étant du nombre des ſpectateurs.

M. Baumé avoit brûlé d'avance, comme on en étoit convenu avec M. Sage, 100 livres de ſarment de vigne; celui-ci étoit de Belleville : ces 100 livres avoient rendu 3 livres 2 onces de cendre griſe.

On a peſé 1 once 24 grains de cette cendre, c'eſt-à-dire 600 grains poids de marc, repréſentant 6 quintaux ; on les a mêlés avec 300 grains ou 3 quintaux docimaſtiques de minium, 2 onces de flux noir, fait en préſence de l'Aſſemblée, & 6 grains de poudre de charbon : ce ſont les doſes de M. Sage.

D'une autre part, on a fait un autre mélange de 300 grains

ou 3 quintaux du même minium pur & ſans cendres, avec 1 once de flux noir, & 6 grains de poudre de charbon, pour en réduire le plomb, le paſſer à la coupelle, & en obtenir le grain de fin qu'il contient ordinairement.

Chacun de ces mélanges a été fait double, ce qui a formé quatre eſſais, qui ont été fondus ſucceſſivement à la forge, dans des creuſets d'Allemagne.

Quoiqu'il y ait eu quelques différences dans les circonſtances de ces quatre fontes, & que leur produit en culot de plomb réduit n'ait pas été exactement de même poids dans chacune, ces fontes ont été cependant en général aſſez bonnes, & leur produit en plomb réduit a été d'environ 3 gros $\frac{1}{2}$ plus ou moins quelques grains.

On a procédé enſuite à la coupellation de ces quatre eſſais à la manière ordinaire; ces coupellations ont bien réuſſi; chaque plomb a laiſſé ſur ſa coupelle un petit bouton de retour ou grain de fin, blanc comme de l'argent, & ne paroiſſant nullement doré; ces grains de fin étoient tous fort petits, & ceux qui provenoient du plomb d'œuvre *(a)*, ne paroiſſoient point ſenſiblement plus gros que les témoins *(b)*.

Les opérations ayant été amenées à ce point, tous ceux ſous les yeux deſquels elles avoient été faites, ont ſigné la feuille ſur laquelle on les inſcrivoit à meſure qu'elles ſe faiſoient : on a peſé enſuite ces boutons de retour à une bonne balance d'eſſai; celui d'un des eſſais provenant d'un culot de 3 gros 49 grains du plomb-d'œuvre a peſé 15 grains du poids fictif de la balance de M. Baumé, ce qui revient à $\frac{5}{256}$ de grain du poids réel ou du poids de marc; le bouton de retour du témoin provenant d'un culot de ce plomb,

(a) C'eſt le nom qu'on donne en Métallurgie, au plomb enrichi par ſa fonte avec des matières contenant de l'or & de l'argent; nous le donnons au plomb fondu avec la cendre de ſarment, pour le diſtinguer du plomb pur.

(b) On nomme ainſi les grains de fin que contiennent naturellement preſque toutes les eſpèces de plomb; il eſt néceſſaire d'en connoître la quantité, dans tous les eſſais, pour la ſouſtraire de grain de fin que fournit le plomb-d'œuvre.

peſant 3 gros 44 grains, a été trouvé du poids de $\frac{4}{256}$ de grain poids de marc, ce qui fait $\frac{1}{256}$ de différence dans le plomb-d'œuvre, paroiſſoit plus riche. Mais comme cette quantité étoit infiniment petite en comparaiſon de celles que M. Sage avoit obtenues en ſon particulier, & que d'ailleurs, le grain de fin du plomb-d'œuvre ne paroiſſoit que de l'argent pur comme celui du témoin, & non pas jaune & doré comme ceux des expériences que M. Sage avoit faites en ſon particulier; cet Académicien a inſcrit ce qui ſuit ſur le plumitif:

Les produits que j'ai vus chez M. Baumé n'ont nul rapport avec ce que j'ai fait, le grain ne me paroiſſant nullement doré. Signé SAGE.

Le lendemain Jeudi, 27 Août, nous nous ſommes raſſemblés pluſieurs d'entre nous, dans le Laboratoire de M. Baumé, pour examiner & repeſer encore plus exactement les quatre boutons de fin ou boutons de retour, des opérations de la veille, ayant remarqué, par le ſecours d'un microſcope, que ces grains de fin n'étoient pas parfaitement nets, & qu'il y avoit à leur ſurface quelques particules de litharge ou de la coupelle; on les a aplatis ſur un tas d'acier poli avec un marteau d'acier poli, & frottés enſuite ſur du papier, pour en détacher les petits corps étrangers, ce qui les a nettoyés parfaitement, comme on s'en eſt aſſuré, en les examinant enſuite au microſcope, puis on les a repeſés à une petite balance d'eſſai, appartenante à M. Baumé, faite par le ſieur Gallonde, laquelle eſt infiniment fine, & trébuche ſenſiblement à $\frac{1}{1024}$ de grain, poids de marc; leurs poids ſe ſont trouvés comme il ſuit.

Le grain de fin du premier plomb-d'œuvre $\frac{1}{64} - \frac{1}{1024}$ de grain, poids de marc. Le grain de fin du ſecond plomb-d'œuvre $\frac{1}{64}$ un peu fort. Le grain de fin du premier témoin $\frac{1}{64} - \frac{1}{512}$.

Le grain de fin du ſecond témoin $\frac{1}{128} + \frac{1}{5}$. Ces quantités, réduites en 1024es, reviennent à celles qui ſuivent.

Grain

Grain de fin du premier plomb-d'œuvre.......... $\frac{15}{1024}$.es
Grain de fin du second plomb-d'œuvre........... $\frac{16}{1024}$ fort.
Grain de fin, premier témoin.................. $\frac{14}{1024}$.
Grain de fin, second témoin................... $\frac{10}{1024}$.

Ces différences étant très-peu considérables, & s'éloignant d'ailleurs infiniment des produits de M. Sage, nous n'entrerons point pour le présent dans de plus grands détails à ce sujet.

Nous ajouterons seulement, qu'ayant dissout dans de l'esprit de nitre très-pur, les boutons provenans tant du plomb-d'œuvre que des témoins, il ne nous est resté dans les deux cas que des minicules noires, extrêmement petites, que nous avons jugées être de l'or; celles des boutons du plomb-d'œuvre étoient un peu plus considérables, mais elles étoient les unes & les autres infiniment trop petites pour produire le moindre effet sur la balance qui trébuche, comme nous l'avons dit, sensiblement à $\frac{1}{1024}$ degré.

Le même jour nous reçumes de M. Sage une lettre très-honnête & très-judicieuse, adressée à l'un de nous, par laquelle après avoir exposé que la différence de la manière de travailler de M. Baumé & de la sienne, pouvoit être la cause de celle qui se trouvoit entre nos produits & les siens, il nous invitoit à venir dans son laboratoire, pour le voir opérer sur les mêmes matières qui avoient été employées chez M. Baumé, & finissoit en protestant avec candeur qu'il ne lui en coûteroit rien pour convenir qu'il s'étoit trompé, si cela étoit en effet.

En conséquence de cette invitation, le Mardi 1.er Septembre 1778, vers les neuf heures du matin, nous nous sommes rendus au laboratoire de M. Sage, maison de M. Randel, attenant le Jardin du Roi.

M. Sage, en présence de l'Assemblée, a réduit du minium avec de la poix résine dans un creuset; il s'est trouvé 2 onces 2 gros de plomb réduit d'environ 3 onces de minium qui avoit été employé dans cette opération.

Ce plomb étoit destiné à deux opérations de coupellation, ou à deux essais devant fournir les témoins.

D'une autre part, M. Sage a mêlé 1 once 24 grains, c'eſt-à-dire 600 grains ou 6 quintaux docimaſtiques de la cendre de ſarment, ci-devant préparée par M. Baumé, & que M. Sage avoit approuvée, avec une demi-once 12 grains ou 3 quintaux docimaſtiques du même minium, 2 onces de flux noir, fait ſur le champ par M. Sage, en préſence de l'Aſſemblée, & 6 grains de poudre de charbon.

Ce mélange a été fondu par M. Sage à ſa forge, très-bien, très-promptement & très-facilement.

Il en a fondu un ſecond tout pareil avec le même ſuccès : le culot du premier plomb-d'œuvre s'eſt trouvé de 3 gros 24 grains; & celui du ſecond plomb-d'œuvre, du poids de 3 gros 37 grains.

Ces deux plombs-d'œuvre, avec la quantité convenable de plomb réduit du minium pur, pour fournir deux eſſais & deux témoins, ont été paſſés par M. Sage, l'un après l'autre à la coupelle, non dans un fourneau de coupelle à la manière uſitée, mais en plaçant immédiatement ſur les charbons d'un fourneau ordinaire la coupelle ſimplement recouverte d'une moufle très-petite, à peine ſuffiſante pour la couvrir, & en accélérant conſidérablement l'opération par le vent d'un ſoufflet, dirigé alternativement ſur le charbon & ſur le plomb; méthode expéditive qui n'eſt point inconnue dans l'art des Eſſais.

Ces quatre coupellations ont été faites de même que les fontes précédentes, avec beaucoup de facilité, de promptitude & de ſuccès.

Il eſt reſté ſur chaque coupelle un petit bouton de retour; les quatre boutons paroiſſoient à l'œil différer fort peu les uns des autres, pour la groſſeur & pour la couleur; ils étoient tous les quatre blancs comme de l'argent pur.

Après avoir été ſoigneuſement nettoyés, ils ont été peſés à la petite balance très-ſenſible de M. Baumé.

Le bouton de retour du premier témoin a peſé $\frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$ de grain, poids de marc.

Le bouton de retour du premier témoin a peſé $\frac{1}{128} + \frac{1}{256}$

de grain, poids de marc : les deux boutons de retour des deux plombs-d'œuvre ont pesé chacun $\frac{1}{128} + \frac{1}{250} + \frac{1}{1024}$ de grain, poids de marc : en réduisant ces quantités en 1024.es on trouve,

Bouton de retour du plomb du premier témoin $\frac{11}{1024}$.

Bouton de retour du plomb du second témoin $\frac{12}{1024}$.

Bouton de retour des deux plombs-d'œuvre, chacun $\frac{12}{1024}$.

Si l'on compare ces produits avec ceux qu'on avoit obtenus chez M. Baumé, on trouvera, qu'en général, ils diffèrent peu, mais que l'avantage pour la quantité du fin, à l'exception de celle du plomb du second témoin, est en faveur des expériences faites chez M. Baumé.

Il s'ensuit, tant des opérations faites chez M. Baumé que de celles qui ont été faites chez M. Sage, que les grains de fin obtenus dans ces opérations, donnent par quintal réel du minium seul, de 33 à 36 grains; par quintal du plomb réduit & coupellé pour fournir les témoins, de 37 à 40 grains; par quintal de minium employé pour le plomb-d'œuvre, 39 grains; & par quintal de ce même plomb-d'œuvre, de 46 à 48 grains.

Mais comme il ne faut compter comme produit des cendres, que l'excès des grains de fin du plomb-d'œuvre sur les grains de fin des témoins, il s'ensuit que le quintal de cendre n'a fourni que 8 à 9 grains de fin, quantité très-inférieure à celle de 4 gros 12 grains, & l'on doit observer que ces 8 ou 9 grains de fin, loin d'être de l'or, ne paroissent que de l'argent à peu-près pur : il y en avoit cependant un qui paroissoit doré; mais ce petit bouton ayant été aplati & nettoyé, a paru aussi blanc que les autres.

Pour connoître la quantité d'or que pouvoit receler cet argent, nous avons mis un des boutons de retour du plomb-d'œuvre dans de l'eau-forte très-pure; il a été dissous promptement, à la réserve d'une minicule noirâtre, sur laquelle l'eau-forte a refusé d'agir : cette minicule a été lavée avec de l'eau pure, séchée & pesée à la petite balance la plus sensible de

M. Baumé; ſon poids s'eſt trouvé au plus de $\frac{1}{1024}$ de grain, ce qui revient exactement à un grain & demi par quintal réel de la cendre employée.

Pour conſtater que cette minicule étoit réellement de l'or, nous lui avons appliqué un peu d'eau régale, la diſſolution s'en eſt faite promptement ; enfin, une petite lame d'étain ayant été miſe dans cette diſſolution, affoiblie par de l'eau, la liqueur a pris peu-à-peu une teinte purpurine, mais infiniment foible.

Ces expériences & pluſieurs autres que nous avons faites ſur ce même objet, & dont nous ne rendons pas compte ici, parce qu'elles préſentent des réſultats à peu-près ſemblables, ramenoient nos connoiſſances ſur l'exiſtence de l'or dans les végétaux, préciſément au même point où elles étoient avant les dernières recherches qui viennent d'être faites ſur cet objet, & il en réſultoit, comme l'ont avancé les anciens Chimiſtes, & comme M.rs de Lauraguais, Darcet, Rouelle & Bertholet, l'ont confirmé par des expériences très-exactes, qu'on retire quelques minicules d'or de preſque toutes les ſubſtances minérales & végétales, traitées avec le minium; mais que ces minicules ne forment pas communément un objet de plus de deux ou trois grains par quintal réel.

Nous regardions d'après cela notre miſſion comme remplie, & nous étions au moment de faire notre rapport à l'Académie, lorſqu'en réfléchiſſant avec plus d'attention ſur toutes les circonſtances de nos opérations, nous nous ſommes aperçus que dans toutes nos expériences, les quantités de fin, tant en or qu'en argent, étoient d'autant plus grandes, que le coup du feu que nous avions donné pour opérer la fuſion & la réduction, étoit plus fort, & que les différences même étoient très-conſidérables : cette circonſtance a commencé à nous faire ſoupçonner que les quantités infiniment petites d'or que nous avions obtenues, pouvoient bien ne pas venir de la cendre, mais du minium avec lequel nous les avions combinées, & voici à cet égard le raiſonnement que nous avons fait.

L'or n'eſt point ſuſceptible en général de ſe calciner; il

eſt donc probable, que s'il en exiſte dans le minium, il s'y trouve en particules très-fines, & diviſées pour ainſi-dire à l'infini : on conçoit que ſi l'on revivifie de ſemblable minium par la ſeule addition de la poix réſine, c'eſt-à-dire à un degré de chaleur très-médiocre, le plomb doit couler & ſe raſſembler, mais que les minicules d'or qui ſont beaucoup moins fuſibles que le plomb, ou pour mieux dire, qui ne le ſont point au degré de feu qu'on emploie pour réduire le minium par la poix réſine, doivent reſter dans les ſcories : la même choſe ne doit point arriver lorſqu'on revivifie le minium avec du flux noir & avec des cendres; alors, la néceſſité où l'on eſt de donner un grand coup de feu pour faire fondre les cendres & le flux, ne permet plus à l'or de demeurer ſans ſe fondre, le plomb s'en ſaiſit & devient auſſi riche qu'il le peut être.

Ces nouvelles conſidérations exigeoient de nous une nouvelle ſuite d'expériences, & voici le plan auquel nous avons cru devoir nous arrêter ; nous prévenons qu'il n'eſt aucune des expériences que nous allons énoncer que nous n'ayons répétée pluſieurs fois, afin d'éviter de tirer des conſéquences précipitées. Nous avons pris une certaine quantité du même minium que nous avions employé précédemment; nous en avons opéré la réduction par la poix réſine, dans un chaudron de fer, à un degré de feu très-médiocre, & nous avons mis à part le plomb qui en a réſulté; nous avons enſuite mêlé la portion de ce même minium qui étoit reſtée dans le chaudron, & qui avoit refuſé de ſe réduire, tantôt avec du flux noir, tantôt avec de l'alkali fixe ordinaire, & nous l'avons pouſſé au feu juſqu'au point de mettre le flux ou l'alkali en fuſion complète, & nous avons obtenu, par ce procédé, une nouvelle quantité de plomb que nous avons mis à part ſans les confondre avec le premier.

Ayant paſſé ſéparément ces deux plombs à la coupelle, nous avons obſervé que le plomb de la première goutte, contenoit à peine 36 à 37 grains de fin par quintal, tandis que la dernière portion, celle qui avoit été obtenue par la

violence du feu, en contenoit jusqu'à soixante & plus; que ces boutons de fin différoient non-seulement par leur poids, mais encore par leur qualité; que celui du premier plomb ne contenoit point d'or en quantité sensible, tandis que celui du second plomb obtenu par la revivification à grand feu, nous a fourni des minicules d'or presque égales à celles que nous avions retirées dans les expériences avec la cendre; nous disons presque égales, parce qu'en effet, quoiqu'en opérant comme nous venons de le dire sur du minium seul & sans addition de cendre, nous ayons toujours retiré de l'or; la quantité cependant en étoit constamment un peu moindre qu'avec l'addition de la cendre, mais cette différence ne s'est trouvée que d'un demi-grain ou d'un grain tout au plus par quintal réel, quantité beaucoup trop petite pour qu'on en puisse rien conclure, & dont il ne nous auroit pas été même possible de nous apercevoir, si nous n'eussions été munis d'instrumens d'une exactitude rare.

Nous concluons donc définitivement de toutes les expériences ci-dessus:

1.° Que la quantité d'or qu'on retire par la combinaison du minium avec les cendres, est infiniment petite, & qu'elle n'excède pas un ou deux grains par quintal réel de la cendre employée, ce qui est bien différent de 300 grains ou de 4 gros 12 grains par quintal que M. Sage a annoncés dans le Mémoire qu'il a lû à l'Académie;

2.° Qu'il paroît prouvé par nos expériences, qu'une partie de cet or existoit dans le minium, ce qui réduit à quelques fractions de grains par quintal réel, c'est-à-dire à des quantités qu'on peut regarder comme absolument insensibles, les minicules d'or qu'on peut attribuer aux cendres:

3.° Que nous ne faisons même aucune difficulté de conclure qu'il est très-probable que cette quantité infiniment petite sur laquelle il peut rester quelque incertitude, vient plutôt du minium que de la cendre;

4.° Que la cendre dont M. Sage a cru avoir extrait de l'or, n'eſt qu'un intermède à l'acide deſquels il eſt parvenu à extraire ce qui exiſtoit dans le minium, & que probablement par un effet du haſard, il aura employé dans ſes expériences un minium plus riche en or, que n'eſt communément celui du Commerce :

5.° Enfin, qu'il eſt d'une grande importance dans les travaux docimaſtiques d'opérer ſur le minium & ſur le plomb deſtiné à ſervir de témoin exactement de la même manière & au même degré de feu que ſur le plomb-d'œuvre, & que c'eſt faute d'avoir eu cette attention que M. Sage, & beaucoup de Chimiſtes avant lui, ont cru trouver dans un grand nombre de matières des parcelles d'or, qui exiſtoient réellement dans le minium qui leur ſervoit d'intermède.

Signé MACQUER, CADET, LAVOISIER, BAUMÉ, BUCQUET & CORNETTE.



OBSERVATIONS BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1777.

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Obſervations météorologiques ſont diviſées en ſept colonnes, de même que les années précédentes. On s'eſt toujours ſervi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-deſſous de zéro: quand les degrés ſont au-deſſus, il n'y a point de barre; o déſigne que la température de l'air étoit préciſément au terme de la congélation.

Il eſt bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud pluſieurs jours de ſuite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-deſſus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conſervé une certaine chaleur; c'eſt pourquoi on a mis dans la ſeptième colonne, *Gelée.*

Les Obſervations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du ſoir.

Nota. Les Obſervations du baromètre, à commencer du 1.er du mois de Janvier, ont été faites ſur un baromètre callé ſur celui de l'Obſervatoire, qui eſt 3 lignes plus haut que celui dont nous nous ſervions les années précédentes.

JANVIER.

JANVIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S. O.	— 8.	2 ½.	3.	27.	7	neigeux.
2.	O.	5.	2 ½.	4.	27.	8	couvert.
3.	N.	4.	1.	2 ½.	27.	8	neigeux.
4.	N. O.	2.	½.	2.	27.	8 ½	couvert & neigeux.
5.	O.	3 ½.	0.	3 ½.	27.	7	couvert.
6.	S.	5 ½.	0.	3.	27.	6	couvert avec ventvoles de neige.
7.	O.	4.	3.	4.	27.	6	couvert; après midi brouillard.
8.	O.	6 ½.	4.	5.	27.	4	couvert; le ſoir neige.
9.	O.	7.	2.	2.	27.	9	couvert.
10.	S.	½.	2.	1.	27.	5	bruine & couvert
11.	S.	1 ½.	3 ½.	3 ½.	27.	6	couvert & bruine.
12.	S.	8.	10.	9.	27.	7	couvert; le matin pluvieux.
13.	S.	7.	9 ½.	7 ½.	27.	8	beau avec nuages.
14.	S.	6 ½.	9 ½.	6.	27.	9	*idem.*
15.	S.	2.		4.	27.	10	beau.
16.	S.	1.	7.	2 ½.	27.	10	*idem.*
17.	S.	— ½.	2.	— ½.	27.	11	brouillard.
18.	S.	½.	1.	0.	27.	10	*idem.*
19.	S.	0.	3 ½.	3 ½.	27.	10	bruine.
20.	S.	3.	5.	3.	27.	8 ½	brouillard.
21.	S.	3 ½.	5.	4 ½.	27.	5	bruine ou pluvieux.
22.	S.	1 ½.	3.	2.	27.	5	couvert.
23.	S.	1.	2.	2.	27.	9	couvert; le ſoir venteux.
24.	S.	5 ½.	6.	4.	27.	6	pluvieux & venteux.
25.	O.	0.	1 ½.	0.	27.	11 ½	couvert.
26.	N.	— 1.	1 ½.	0.	27.	11	*idem.*
27.	N.	½.	1.	0.	27.	8	*idem.*
28.	S.	½.	½.	0.	27.	7	neigeux.
29.	N.	½.	2.	0.	27.	7 ½	couvert.
30.	N	0.	1 ½.	— 3.	27.	9	matin neige; l'ap. m. beau avec nuag.
31.	N.	— 1.	1 ½.	2.	28.	½	beau avec nuages.

Le commencement de ce mois a été neigeux, il y a eu 5 à 6 pouces d'épais de neige dans la plaine. Le 10, elle a commencé à fondre, & le temps a été assez beau, mais il faisoit très-mauvais voiturer; on a vu quelques grosses grives, appelées *chachats*, mais peu; il y avoit cependant beaucoup de senelles: les rhumes ont été fort fréquens durant ce mois. Le 30, il est tombé de la neige environ 2 pouces d'épaisseur dans la campagne; les grains ont été un peu fatigués de l'hiver, sur-tout ceux qui ont été faits par la sécheresse.

FÉVRIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	— 2.	2.	2½.	27.	6	couvert & nuageux.
2.	S.	0.	1½.	3.	27.	6	couvert; tombé de la neige le matin.
3.	S.	1.	1½.	½.	27.	7	nuageux.
4.	S.	— 1.	3.	1½.	27.	8	couvert ; il eſt tombé de la neige.
5.	O.	3.	1.	1½.	27.	8	beau avec nuages.
6.	N.	3.	0.	— 2½.	27.	8	couvert.
7.	E.	2½.	½.	1½.	27.	8	*idem.*
8.	E.	3½.	0.	1.	27.	7	*idem.*
9.	E.	1½.	0.	1.	27.	8	couvert avec des ventvoles de neige.
10.	S.	0.	1.	1.	27.	9	couvert & neigeux.
11.	S.	— 1.	1.	½.	27.	6	couvert.
12.	S.	1.	1½.	2.	27.	6	*idem.*
13.	N.	½.	2½.	0.	27.	6½	beau avec nuages.
14.	E.	0.	3½.	½.	27.	7	beau.
15.	E.	— ½.	2.	— ½.	27.	3	couvert.
16.	N. O.	1½.	1.	2.	27.	3	beau avec nuages.
17.	E.	4½.	1½.	2½.	27.	1½	*idem.*
18.	E.	4½.	½.	2.	27.	2	*idem.*
19.	S.	3½.	1½.	½.	27.	4	nuageux.
20.	S.	1½.	1½.	4.	27.	½	neige & pluvieux.
21.	S.	3½.	7½.	6½.	27.	2½	pluvieux.
22.	S.	8½.	12.	7½.	27.	3	beau avec nuages.
23.	S.	7½.	11.	7½.	27.	5	*idem.*
24.	S.	7½.	11.	7.	27.	8½	*idem.*
25.	S.	7.	12½.	7.	27.	11	beau.
26.	S.	3½.	13½.	7½.	27.	10	beau ; le ſoir Aurore boréale.
27.	S.	3½.	14½.	8½.	27.	9½	beau.
28.	N.	3.	14.	7½.	27.	10	beau avec nuages.

Ce mois a été froid jusque vers le milieu, ensuite il a fait assez beau: il a encore paru de grosses grives, nommées *chachats;* il y en avoit beaucoup au commencement du mois: la rivière d'Essonnes a été basse. Le 26, on a vu à 8 heures du soir une Aurore boréale très-considérable: on a commencé à labourer vers le milieu de ce mois pour faire les mars, & à tailler les vignes. Vers la fin il a fait un très-beau temps; les Laboureurs travailloient en chemise depuis 8 heures du matin jusqu'au Soleil couché; les vignes & les arbres commençoient déjà à travailler; il y avoit des abricotiers en fleurs.

MARS.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.		
1.	S.	4½.	12.	8½.	27. 9	beau avec nuages.
2.	S.	6.	15.	11.	27. 7	*idem.*
3.	S.	8.	11.	8.	27. 10	nuageux.
4.	N.	4½.	13.	8½.	27. 8½	beau avec nuages.
5.	E.	7.	12.	7.	27. 4½	beau avec gros nuages; le soir pluie.
6.	N.	4.	5.	4.	27. 8	couvert.
7.	N.	2.	5.	½.	27. 6	nuageux.
8.	E.	— 2½.	6.	½.	27. 3	beau avec nuages & vent.
9.	N.	½.	6.	3½.	27. 3	beau avec nuages.
10.	N.	1½.	5.	3.	27. 5	couvert & vent.
11.	N.	½.	3½.	2.	27. 4	couvert; le soir pluvieux & vent.
12.	N.	1.	4.	2½.	27. 4½	couvert, vent & pluie.
13.	N.	— ½.	5.	— 1.	27. 7	beau.
14.	O.	1.	7.	5.	27. 9	couvert & pluie sur le soir.
15.	O.	5.	11.	6½.	27. 7	beau avec nuages.
16.	S. O.	5.	10.	6½.	27. 2	pl. v. a tonn. un fort coup à 2h ap. m.
17.	S. O.	6.	10.	8.	27. 6½	nuageux avec ventvoles de pluie.
18.	S.	9.	11.	10.	27. 8	couvert & bruine.
19.	S. O.	8.	14½.	8.	27. 6	mat. beau, nuages; l'ap. m. pl. & v.
20.	O.	6½.	11.	8½.	27. 8	couvert avec vent & ventv. de pluie.
21.	O	6½.	10½.	6.	27. 10	beau nuag. vent, quelq. goutt. d'eau.
22.	S. O.	4½	9.	7½.	27. 11	beau le matin; l'après midi pluvieux.
23.	O.	4.	10.	8.	28.	beau avec nuages.
24.	S. E.	6½.	17.	11.	27. 11	beau.
25.	S.	7.	20.	12½.	27. 10	*idem.*
26.	E.	8.	21.	12.	27. 10	*idem.*
27.	E.	7½.	21.	12.	27. 10	*idem.*
28.	E.	7½.	19.	12.	27. 9	*idem.*
29.	N.	8.	8.	4.	27. 9	couvert.
30.	N.	1½.	1½.	½.	27. 8	neigeux & venteux.
31.	N.	1½.	4½.	1.	27. 7	couvert.

Le commencement de ce mois a été fort beau & aſſez doux ; les hoyaux ont fleuri : on a continué à tailler la vigne ; elle avoit fort peu de bois : on attribue cela à la grande ſéchereſſe qu'il a fait l'été de 1776 ; les blés ſe ſont bien rétablis & ont eu très-bonne façon durant ce mois. Dans les premiers jours du mois on a travaillé à ſemer les avoines, & on a eu beaucoup de peine à cauſe du grand vent, qui étoit très-froid. Les 13 & 14, il a gelé à ne pouvoir labourer : la rivière d'Eſſonnes a toujours été baſſe. Il a fait de très-beaux jours vers la fin du mois : les arbres ont pouſſé leurs feuilles ; les abricotiers, les pêchers, les cerifiers & les pruniers, étoient en pleine fleur. Les 29, 30 & 31, il a gelé le matin à glace, cela n'a pas beaucoup gâté, parce qu'il a fait du vent : il n'a pas paru d'hirondelles.

AVRIL.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N.	1.	7.	4½.	27. 8	couv. nuag. ☉ ſe montre; gel. à gl.
2.	N.	1.	7½.	3½.	27. 9½	beau avec nuag. gel. le mat. à glace.
3.	N.	1½.	8.	5.	27. 10	couvert.
4.	N.	3.	7½.	3.	27. 11½	nuageux.
5.	N.	0.	7½.	1½.	28.	beau avec nuages; il a gelé à glace.
6.	N.	— 2.	5½.	1½.	27. 11	beau avec nuag. gel. à gl. épais de 2[l].
7.	N.	1½.	5½.	1.	27. 9½	beau avec nuages, vent; gelée à glac.
8.	N.	½.	9½.	6.	27. 8	beau avec nuages & grand vent.
9.	N. E.	4.	10½.	8.	27. 10	beau avec nuages.
10.	E.	2½.	14.	9.	27. 11	beau.
11.	S.	4.	17.	11½.	27. 11	*idem.*
12.	S.	7½.	17½.	8½.	27. 10	le matin nuageux; l'après midi pluv.
13.	S.	7½.	12.	9.	27. 8½	mat. beau, nuag. l'ap. m. couv. pluv.
14.	N.	6.	8½.	6.	27. 11	couvert & pluie.
15.	N.	4.	9.	6.	28.	couvert.
16.	N.	5½.	12.	8.	27. 10	*idem.*
17.	N.	6.	15.	10½.	27. 3	beau avec nuag. tonné ſur les 6[h] ſoir.
18.	N.	5½.	12½.	3.	27. 5	couvert & pluvieux.
19.	N.	3½.	8.	2.	27. 9	beau avec nuag. giboulées & gréſil.
20.	N. O.	— 1.	8½.	5.	27. 10	beau avec nuages; il a gelé à glace.
21.	S.	7½.	17.	12.	27. 8	beau avec nuages.
22.	N. O.	10.	15.	11.	27. 9	beau avec des nuages & du vent.
23.	O.	8.	15.	9.	27. 8	pluv. tonn. écl. un peu de grêle.
24.	S.	8.	11.	8.	27. 11	nuageux, vent & pluie par ondées.
25.		4.	11½.	6.	28. 1	beau avec des nuages.
26.	N.	4.	11.	6.	27. 10	beau avec nuages, gelée blanche.
27.	E.	4.	12.	5.	27. 11	beau avec nuages.
28.	S. O.	1½.	11.	8½.	27. 9	beau avec nuages; gelée blanche.
29.	N.	6.	17.	13½.	27. 7	beau avec nuages.
30.		10.	16.	10½.	27. 6	pluvieux.

Ce mois a été au commencement très-froid & fec. Le 6, il a gelé à glace de l'épaiffeur de 2 lignes, ce qui a gâté la vigne qui commençoit à pouffer, de forte que les jeunes vignes les plus avancées ont été gelées à moitié; du côté de Rebrechien elles l'ont été entièrement: on a fini vers la moitié de ce mois de femer les avoines, & enfuite on a femé les pois & vefces.

Le milieu & la fin de ce mois ont été fort humides: les avoines, pois & vefces ont très-bien levé; les blés étoient très-beaux; les feigles ont été un peu attaqués de cette dernière gelée; les cerifiers & les pruniers étoient en pleine fleur; mais la gelée de la nuit du 5 au 6 en a bien gâté, ainfi que les abricots, les pêches & les poires.

Le 3, on a vu des hirondelles voler dans la plaine: on a entendu le roffignol dans le parc le 17. Le 19, le blé froment d'élite s'eft vendu à Pithiviers vingt-deux livres le fetier, pefant 240 livres. Vers le 23, toutes les charmilles ont pouffé leurs feuilles, ainfi que les tilleuls: la rivière d'Effonnes a été baffe.

MAI.

MAI.

Jours du Mois.	Vents.	THERMOMÈTRE.			Barom.		État du ciel.
		Matin.	Midi.	Soir.			
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces*	*lignes*	
1.	S. E.	10.	15.	11½.	27.	4	vent avec pluie; il a tonné l'ap. m.
2.	S. E.	10.	13.	9½.	27.	5	pluie par ondées avec tonn. l'ap. m.
3.	S. E.	9½.	11½.	9½.	27.	6	pluvieux; il a tonné l'ap. m. au loin.
4.	S. E.	9½.	13½.	8.	27.	8	pluvieux.
5.	S. E.	8½.	11.	8.	27.	10	*idem.*
6.	S. O.	9½.	13.	11.	27.	10	couvert.
7.	N.	10.	14½.	12.	27.	11	couvert & pluvieux.
8.	N. E.	8½.	13.	10½.	27.	11	beau.
9.	S.	10½.	20.	16½.	27.	7	beau avec nuages.
10.	S. O.	10½.	13½.	10.	27.	10	couvert & venteux.
11.	S.	9½.	15.	8½.	27.	9½	beau avec nuages.
12.	N. O.	6.		4.	27.	11	pluvieux avec grêle & tonnerre.
13.	S.	3½.	15½.	9.	27.	8	beau avec nuag. il a gelé bl. le matin.
14.	S.	7½.	14.	7.	27.	4	beau avec nuages; le soir bruine.
15.	S.	6½.	13½.	8.	27.	2	nuageux; le soir il a éclairé.
16.	O.	7.	9½.	6.	27.	4	couvert; le soir pluvieux.
17.	O.	6½.	9½.	6.	27.	7	pluvieux.
18.	S.	5½.	12½.	7.	27.	8	beau avec nuages.
19.	S.	7.	14.	9½.	27.	6	pluvieux.
20.	S.	9½.	14.	9.	27.	7	pluvieux; il a tonné au loin.
21.	S.	9.	14½.	9.	27.	9½	pluv. tonn. au loin; tombé un peu gr.
22.	S.	8.	12.	10.	27.	9	couvert.
23.	S.	10.	15.	13.	27.	9	nuageux.
24.	S.	9.	14.	9.	27.	5	pluvieux.
25.	E.	7½.	14.	9.	27.	7	couvert.
26.	S. O.	7½.	15.	9.	27.	9	beau avec nuages.
27.	S. O.	9.	15.	10.	27.	10	*idem.*
28.	O.	9.	14.	8.	27.	10	pluvieux.
29.	N.	9.	14.	11½.	27.	11	beau avec nuages; il a tonné au loin.
30.	S.	10½.	15.	10½.	27.	10	mat. pluv. l'ap. m. beau avec nuages.
31.	N.	10.	17½.	13½.	27.	10	beau avec nuages.

Ce mois a été fort pluvieux & froid; les vignes ont été long-temps à pousser, à cause du froid, elles montroient un peu de raisins dans le fromenté des jeunes vignes, mais dans les vieilles il y en avoit fort peu; ainsi il n'y avoit pas lieu d'espérer une bonne année: le vin de la récolte de 1775 s'est vendu cinquante-cinq livres le poinçon; celui de la récolte de 1776, trente-cinq livres: on a semé les pois & les féves, & planté les pommes de terre; la saison y a été favorable, elles n'ont point été long-temps à sortir de terre: la rivière d'Essonnes a augmenté & même a débordé; les seigles ont fleuri; vers la fin de ce mois ils ont épié fort hauts & étoient très-beaux, ainsi que tous les autres grains.

JUIN.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	14½.	20.	14.	27. 10½	beau avec nuages.
2.	N. E.	14.	20.	14.	28.	*idem.*
3.	N.	14.	22.	15.	28.	beau.
4.	N.	13.	22.	17.	27. 10½	mat. pluv. l'ap. m. beau, n. & tonn.
5.	N.	14.	21.	13½.	28.	beau avec n. l'ap. m. n. v. tonn. loin.
6.	N.	8½.	17.	11.	28.	beau avec nuages & vent froid.
7.	N.	9.	19.	11½.	27. 9½	beau avec nuages.
8.	N.	9½.	17½.	11½.	27. 8	beau avec du vent.
9.	N.	8½.	16.	9½.	27. 8	beau avec vent & nuages.
10.	N. E.	7½.	15.	9.	27. 9	beau avec nuages.
11.	S.	9.	15.	12.	27. 7	beau avec nuages & vent v. de pluie.
12.	S. O.	10½.	16.	10½.	27. 8	beau avec nuages; pluie par ondées.
13.	S. O.	8.	15½.	11½.	27. 9	beau avec nuages.
14.	S.	10.	17½.	14.	27. 10	nuageux.
15.	S.	10½.	17½.	14.	27. 10½	beau avec nuages.
16.	S.	11½.	20.	16½.	27. 9	*idem.*
17.	S.	10½.	17½.	10½.	27. 11	tonné de gr. mat. couv. tout le jour.
18.	S. O.	9½.	13½.	12½.	28. 1	beau avec nuages.
19.	S.	9½.	21.	15.	27. 11	beau.
20.	S.	9½.	15.	12.	27. 8	pluvieux.
21.	S.	11.	15½.	11½.	27. 9	beau avec nuages & bruine.
22.	S.	10½.	15.	11.	27. 7½	pluvieux.
23.	S.	10.	13½.	9.	27. 10	beau avec nuages & vent.
24.	N.	9.	12.	9.	28. ½	pluvieux.
25.	N.	10.	16½.	11½.	28. 2	beau avec nuages.
26.	S.	12½.	19.	16.	27. 10	beau.
27.	S. O.	11.	17.	9½.	27. 10	nuageux & vent.
28.	S.	9.	17.	12.	27. 9½	beau avec nuages.
29.	S.	9½.	20.	15½.	27. 8½	*idem.*
30.	S.	11½	15½.	12.	27. 9	pluvieux.

Ce mois a été humide & froid : on craignoit que les avoines, qui étoient fortes dans les bonnes terres, ne boulassent; on craignoit aussi que cela ne fit du tort aux blés qui étoient en pleine fleur. Au tiers de ce mois, on a commencé à faucher les sainfoins; le 9, ils étoient bons & fort hauts; le temps n'a pas été favorable pour les serrer : il tomboit de l'eau presque tous les jours. Le 24, on n'avoit pas encore mangé de guignes ni de cerises, mais on servoit des fraises : la rivière d'Essonnes a baissé: le blé de la récolte de l'année 1775 s'est vendu vingt-deux livres; celui de 1776, dix-neuf livres le sac; il n'approchoit pas de celui de 1775, pour la bonté. La vigne n'a commencé à fleurir que vers la fin de ce mois: les sainfoins étoient beaux & hauts, mais on a eu bien de la peine à les serrer secs; il pleuvoit presque tous les jours; on n'a achevé de les serrer qu'à la fin du mois.

JUILLET.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	11½.	14.	13½.	27.	7	pluvieux.
2.	S.	11.	16½.	14.	27.	8	beau avec de gros nüages.
3.	S.	13.	21.	15½.	27.	5	mat. beau avec nuag. ap. m. t. & pl.
4.	S.	11.	17.	10½.	27.	9	beau & nuag. le ſoir, tonn. & pluie
5.	S.	11.	16½.	12.	27.	11	nuageux, pluie par ondées.
6.	S.	12.	16.	12½.	28.		beau avec nuages.
7.	S.	10.	13½.	10.	27.	10	couvert; le ſoir pluvieux.
8.	S.	11.	10.	9½.	27.	9	pluvieux.
9.	S.	10½.	14.	10½.	28.	0	couvert & bruine.
10.	S. O.	10.	15.	13.	28.	1	nuageux.
11.	N.	10½.	17.	15.	28.	2	beau avec nuages.
12.	N.	15.	21.	16½.	28.	1½	*idem.*
13.	N.	14.	20.	16.	28.	2	*idem.*
14.	N.	13½.	23.	16.	28.	2	beau.
15.	N.	13½.	23½.	17.	28.	1	*idem.*
16.	E.	14.	24½.	17½.	27.	11	*idem.*
17.	E.	15.	26½.	20.	27.	9½	*idem.*
18.	S.	18.	28.	20.	27.	9	*idem.*
19.	S.	16.	21.	14.	27.	9	beau avec nuages & bruine.
20.	S.	16½.	17.	14½.	27.	8½	couvert & bruine.
21.	S.	14½.	17.	14½.	27.	7½	pluvieux.
22.	S.	14.	20.	15.	27.	9	couv. le ☉ s'eſt mont. quelq. temps.
23.	S.	13.	15.	11½.	27.	7	couvert & bruine.
24.	S.	12.	17.	12½.	27.	6	*idem.*
25.	S.	12.	15.	11.	27.	8	couvert & pluie.
26.	S.	11½.	14.	10½.	27.	9	couvert.
27.	O.	10.	15.	11½.	27.	10	beau avec n. il tombe q. gout. d'eau.
28.	S. O.	11.	16.	13.	27.	9	couv. on a vu quelq. rayons de ☉
29.	S.	12.	15.	12½.	27.	7	couv. & bruine; il a ton. écl. l'p. m.
30.	S.	11.	14½.	13½.	27.	7	pluvieux.
31.	S. O.	12.	14.	12.	27.	8	couvert & bruine.

Il n'a preſque fait que pleuvoir pendant le cours de ce mois, ce qui a fait grand tort aux vignes; les froids qui ont régné ont occaſionné la coulure, de ſorte que l'on ne s'attendoit qu'à une médiocre récolte; le vin de 1775 s'eſt vendu ſoixante livres la pièce, & celui de la récolte de 1776 cinquante livres. Le 24, on a commencé à couper les ſeigles; on a eu bien de la peine à les ſerrer, parce que cette moiſſon a été fort humide, mais le grain étoit de très-bonne qualité, quoique humide, & les épis étoient bien grainés; il n'en falloit que douze gerbes pour faire une mine; les fromens commençoient à jaunir.

AOUST.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	11.	17.	12.	27. 8	beau avec nuages; le soir éclairs.
2.	N.	11 ½.	17 ½.	12 ½.	27. 11	beau avec nuages & bruine.
3.	N. O.	12 ½.	18 ½.	12 ½.	28. 1	beau avec nuages & pluie le matin.
4.	N. O.	11.	19.	12 ½.	28.	beau avec nuages.
5.	S. E.	11 ½.	21.	15.	27. 10 ½	beau & couvert le soir.
6.	N. O.	11 ½.	19 ½.	13.	27. 11 ½	beau avec nuages.
7.	S. E.	11 ½.	22.	15 ½.	27. 10	*idem.*
8.	S. E.	13.	24.	19.	27. 8	nuageux & bruine.
9.	S.	16.	24 ½.	15 ½.	27. 10	nuageux.
10.	S.	11 ½.	19.	14.	27. 11 ½	beau avec nuages.
11.	S.	11.	24.	17 ½.	27. 10	*idem.*
12.	S.	14.	25.	19.	27. 11	beau ; le soir il a tonné au loin.
13.	N.	14.	26.	18.	28. 1 ½	beau.
14.	N.	14.	25.	17.	28. 1 ½	*idem.*
15.	N.	13 ½.	24 ½.	18.	28. 1 ½	*idem.*
16.	N.	13.	23 ½.	17.	27. 11 ½	*idem.*
17.	N.	12 ½.	22.	17.	27. 10	beau avec nuag. le mat. brouillard.
18.	N.	12.	22.	15.	27. 10	beau & venteux.
19.	N. E.	13 ½.	21.	14.	27. 7	beau.
20.	N.	11 ½.	24.	16.	27. 10	*idem.*
21.	S. O.	12.	22.	17.	27. 10	mat. beau; l'ap. midi couv. & bruine.
22.	O.	13.	18.	13.	28. ½	beau avec nuag. pluie toute la nuit.
23.	S.	11.	20.	13 ½.	28.	beau.
24.	N. E.	11 ½.	23.	18.	27. 10 ½	beau; soir écl. aurore boréale au N.
25.	S.	13.	25.	17.	28. ½	beau.
26.	N.	13 ½.	26.	18.	28. 1 ½	*idem.*
27.	N.	16.	26.	18 ½.	28. 1	*idem.*
28.	E.	14 ½.	26.	18 ½.	27. 11	beau avec nuages; le soir éclairs.
29.	O.	15.	17.	14.	28.	couv. le matin ; l'après-midi pluv.
30.	S.	14.	17.	17.	27. 8	pluvieux.
31.	S.	17.	17.	12.	27. 11	couvert & grand vent.

On a commencé le 1.er de ce mois la moisson des fromens; les pluies qui étoient tombées les mois passés, avec l'herbe qui étoit en abondance dans les blés en avoient fait verser beaucoup; ils étoient hauts & fort bons en paille & en grains, excepté ceux qui étoient versés, dont le grain n'avoit pas mûri comme il faut: voyant la pluie qui tomboit tous les jours, durant la moisson des seigles, on craignoit qu'il n'en arrivât de même pour serrer les blés; mais le temps ayant commencé le 4 à se mettre au beau, & ayant duré jusqu'à la fin de ce mois, excepté deux jours où il est tombé quelques ondées de pluie, les blés ont été serrés fort secs; il falloit seize à dix-sept gerbes pour en faire une mine, & de celui qui étoit versé, il en falloit jusqu'à vingt-cinq à vingt-six gerbes à la mine. On a commencé le 6, à faucher les avoines qui étoient belles en paille & en grain; elles n'ont pas été serrées toutes pendant ce mois, parce que l'usage de presque tous les Laboureurs est d'attendre qu'elles soient mouillées, mais d'autres les ont levées tout de suite après qu'elles ont été fauchées; il y a eu aussi beaucoup d'orge: il n'y a pas eu de noix pour faire des cerneaux, elles ont toutes gelé l'hiver: on ne voyoit encore point de verjus de tourné.

Il n'y a pas eu de prunes d'aucunes espèces, toutes ont été gelées l'hiver; il y a eu fort peu d'abricots. Il n'y a pas eu beaucoup de maladies, & peu de fièvres.

SEPTEMBRE.

SEPTEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N.	11.	17½.	11.	28.	beau nuag. gel. bl. mat. dans les bas.
2.	N.	11.	17.	13½.	27. 10	couvert & venteux.
3.	O.	10½.	14.	8.	27. 9½	nuageux & venteux.
4.	O.	10½.	16.	12.	27. 10	couvert & bruine.
5.	O.	11½.	17.	13.	28.	couv. avec quelq. rayons de Soleil.
6.	N.	12.	19.	14.	28. 1	couvert.
7.	N.	12½.	21.	15.	28. 1	beau.
8.	N.	11½.	21.	15.	28. ½	*idem.*
9.	N. E.	11.	21½.	15.	28. 1	*idem.*
10.	N.	12.	21½.	15.	28. 1	*idem.*
11.	N.	12.	19½.	16.	28. 1	*idem.*
12.	N.	12½.	21½.	16.	28.	beau avec vent.
13.	N.	10½.	18½.	13.	27. 11	beau avec nuages & vent.
14.	N.	10.	15.	12.	27. 11	beau & grand vent.
15.	N.	9.½	17.	12.	28.	beau avec vent.
16.	N.	10½.	19.	13½.	28.	beau.
17.	N.	10.	22½.	13.	28.	*idem.*
18.	E.	10.	23.	13.	27. 11½	*idem.*
19.	S.	11.	22.	13.	27. 9½	*idem.*
20.	N.	10½.	20½.	12½.	27. 10	beau avec nuages.
21.	N.	10.	20½.	12.	27. 9	beau.
22.	N.	12.	17.	11½.	27. 9½	beau avec nuages.
23.	N.	10¼.	16½.	9.	27. 9½	beau.
24.	N.	7½.	17.		27. 9	*idem.*
25.	S.	10.	20½.	10.	27. 8½	*idem.*
26.	N.	11½.	23.	15.	27. 9	*idem.*
27.	N.	12.	23.	16½.	27. 9½	*idem.*
28.	N.	13.	22.	16.	27. 10	beau; le ſoir il a éclairé.
29.	S. O.	13½.	21.	14½.	28.	beau avec nuag. le ſoir br. il a tonné.
30.	S.	13½.	15½.	13½.	27. 11	couvert & bruine.

Ceux qui attendoient de la pluie pour lever les avoines, ont été obligés de les couper vers le milieu de ce mois, qui a été très-ſec, ce qui a fait retarder les ouvrages de labours pour ſemer les blés. On a commencé à ſemer du ſeigle à la fin du mois; les raiſins n'étoient qu'à moitié tournés; il y en a eu beaucoup de grillés par la chaleur & la ſécheresſe: on a fait durant ce mois la récolte des féves qui a été bonne.

OCTOBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	11½.	13½.	12.	27	8	couvert & bruine.
2.	S.	10.	13½.	10.	27.	6	couvert & pluie.
3.	O.	10.	13½.	8.	27.	9	nuageux.
4.	S. O.	7.	15.	10½.	27.	10	couvert.
5.	S. O.	7.	15½.	11.	28.		beau avec nuages.
6.	S. O.	8½.	20½.	14.	27.	9½	beau.
7.	S. O.	14.	15½.	11.	27.	11	mat. bruine; l'ap. m, beau avec nuag.
8.	S. O.	7½.	14½.	8½.	28.	1	beau; le matin brouillard.
9.	S. E.	5½.	15½.	8½.	27.	11	beau avec nuages.
10.	E.	6½.	16½.	10.	27.	11	beau.
11.	N.	9.	17½.	10½.	27.	10	*idem.*
12.	N.	9.	17½.	12.	27.	8½	beau avec nuages.
13.	N.	9½.	10½.	10½.	27.	5	pluvieux; mat. il a éclairé & tonné.
14.	S.	10.	14.	11½.	27.	5	couvert & pluie.
15.	S.	10.	14.	10.	27.	7	beau avec nuages.
16.	S.	9½.	15.	11.	27.	9	beau; le soir il a éclairé & tonné.
17.	S.	10.	16.	10.	27.	10½	beau avec nuages.
18.	S.	8½.	14½.	8.	27.	10½	matin bruine, & l'ap. midi couvert.
19.	S. E.	8.	13.	9.	27.	11	matin à 11h¾, tonne; nuageux le s.
20.	S. E.	1.	7.	2½.	27.	10	beau avec nuages.
21.	N.	½.	7½.	2½.	27.	10	nuag. & vent froid; gel. à gl. mat.
22.	N.	— ½.	8.	2.	27.	8½	beau avec nuages.
23.	S.	0.	12½.	7½.	27.	8½	couvert.
24.	S.	7½.	11½.	7.	27.	10	couvert & bruine.
25.	S.	½.	11.	5.	27.	10	beau avec nuages.
26.	S.	1.	11.	9½.	27.	7	beau avec nuag. & mat. brouillard.
27.	S.	9.	10½.	6½.	27.	7	couvert & venteux.
28.	S.	2½.	8.	2½.	27.	8	brouillard le matin, ensuite beau.
29.	S.	2½.	11.	8.	27.	4	pluvieux.
30.	S.	8½.	14.	8½.	27.	2	pluie & grand vent.
31.	S.	8½.	10.	7½.	27.	6	couvert.

On a commencé la vendange le 7; elle a été si foible qu'en général on n'a recueilli qu'environ la moitié d'une demi-queue par arpent; cependant le peu qu'il y a eu étoit de bonne qualité; c'est pourquoi à la fin de ce mois il s'en est vendu soixante-quinze livres le poinçon. Il n'y a pas eu beaucoup de fièvres dans cette saison, qui a été favorable pour labourer & semer les blés, de sorte que la plupart, même dans les terres noires, étoient faits. Durant ce mois, la récolte de safran a été aussi mauvaise que celle des raisins: il y en a eu fort peu; il s'est vendu quarante francs la livre.

NOVEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Thermomètre. Midi.	Thermomètre. Soir.	Barom. pouces	Barom. lignes	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	2½.	9½.	7.	27.	6½	couvert; l'après-midi pluvieux.
2.	S.	3.	9½.	5.	27.	9	beau avec brouillard.
3.	S.	2½.	11.	5.	27.	10	beau avec nuag. ſoir aurore bor. au N.
4.	S.	6½.	15.	9.	28.		beau avec nuages.
5.	S. E.	7½.	11½.	9½.	28.	½	couvert.
6.	N.	8½.	10.	10.	28.		pluvieux.
7.	N.	8.	10.	3½.	28.	½	couvert.
8.	O.	— ½.	7½.	7¼.	27.	6	couvert; le ſoir pluie & vent.
9.	N. O.	2.	7.	1½.	27.	7½	beau avec des hargnes de pluie.
10.	N. O.	— 1.	5½.	5.	27.	8	couvert avec quelques rayons de ⊙.
11.	S. O.	2.	9½.	3½.	27.	9	beau.
12.	N.	— 1.	11½.	3.	27.	8	*idem.*
13.	N. O.	0.	12½.	9½.	27.	7	*idem.*
14.	N.	8½.	8.	7.	27.	9	pluvieux.
15.	N.	7.	9½.	6½.	27.	10	couvert.
16.	N.	1.	6½.	5.	27.	10	nuageux.
17.	N.	1½.	6½.	6½.	28.	2	couvert & brouillard.
18.	S. O.	1½.	6½.	6.	28.	2	brouillard.
19.	S. O.	2.	9.	7.	28.	1	couvert.
20.	O.	5½.	9½.	7.	28.	½	couvert; le ſoir bruine.
21.	N. O.	5½.	9½.	7½.	28.	½	couvert & bruine.
22.	N. O.	4.	8½.	7½.	28.	½	couvert.
23.	S.	5.	9.	5½.	27.	11	couvert & pluie.
24.	N.	1½.	5½.	1½.	28.		nuageux.
25.	O.	1.	5½.	1½.	28.	2	couvert avec quelques rayons de ⊙.
26.	O.	2.	7.	1½.	28.	½	beau avec nuages.
27.	N.	— 1½.	2½.	2.	27.	10	beau avec n. brouil. ſoir aurore bor.
28.	S.	— 6½.	7.	1.	27.	10	pluvieux.
29.	E.	— 1½.	2½.	1.	27.	8	brouillard.
30.	S. O.	6½.	9½.	8½.	27.	6	pluvieux & venteux.

On a commencé dans ce mois à donner les labours d'entre-hiver, à tirer les échalas, & à donner la première façon à la vigne que l'on nomme *parage :* il y a eu beaucoup de rhumes. Le temps de la fin du mois a été favorable pour faire les plantations d'arbres; le blé de la récolte de 1777 s'eſt vendu vingt-deux livres le ſetier, & celui de 1776 vingt-trois livres dix ſous: la rivière d'Eſſonnes a été d'une moyenne hauteur.

DÉCEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S. O.	6½.	8½.	5½.	27.	9	couvert.
2.	S. O.	4½.	8½.	3½.	27.	10	*idem.*
3.	S. O.	4.	9.	4½.	27.	8½	brouillard le mat. enſuite nuageux.
4.	S.	5½.	8½.	5.	27.	½	pluvieux & grand vent.
5.	O.	1½.	3½.	0.	27.	5	couvert avec des hargnes de grêle.
6.	N. O.	1½.	2½.	0.	27.	6	couvert; il a tombé de la neige.
7.	O.	— 1½.	2.	½.	27.	7	neige fondue & pluie.
8.	S. O.	½.	2.	1.	27.	9	bruine.
9.	N.	0.	1½.	1.	27.	10	nuageux & couvert.
10.	N.	— 2.	1½.	— 2.	28.	3½	beau avec nuages.
11.	S.	3½.	— 1½.	3½.	28.	4	brouillard.
12.	N.	4½.	1½.	1½.	28.	3½	brouillard mat. l'ap. midi nuageux.
13.	N.	5.	0.	1½.	28.	½	beau avec nuages.
14.	S. O.	4.	0.	1½.	27.	10	*idem.*
15.	N.	3¼.	0.	1.	27.	9	brouillard.
16.	N.	3.	0.	1½.	27.	8½	couvert & bruine.
17.	N.	½.	1½.	0½.	27.	9	beau avec nuages.
18.	N.	1½.	1½.	— 1.	27.	8	beau avec nuages; le ſoir neige.
19.	N.	0.	1½.	3.	27.	9	couvert.
20.	N.	7.	3.	7.	27.	8	beau avec nuages.
21.	N.	3.	1.	2.	27.	6	neigeux.
22.	N. O.	1.	½.		27.	6	beau avec nuages.
23.	N. O.	1.	2.	— 3.	27.	5½	couvert.
24.	S. O.	½.	3½.	2.	27.	2	pluvieux.
25.	O.	4.	5½.	1½.	27.	3	pluvieux & venteux.
26.	S. O.	1½.	2½.	1.	27.	1	pluvieux & neige fondue.
27.	N. O.	— ½.	½.	½.	27.	3	couvert & pluie.
28.	N. O.	— 1.	½.		27.	5	couvert.
29.	N.	1.		— 2.	27.	3	couvert avec ventvoles de greſil.
30.	N. O.	1½.		1½.	27.	2	couvert.
31.	N.	2.	½.	2½.	27.	3½	neigeux.

On a toujours continué à labourer pour entr'hiverner; le temps y a été favorable, quoique la terre fût un peu molle; mais vers le milieu & la fin de ce mois, il eſt tombé de la neige & de la pluie, qui ont fait ceſſer les ouvrages.

Les ſeigles & les blés ont très-bien levé & étoient très-beaux: le blé de la récolte de 1777 s'eſt vendu vingt-une livres le ſetier. Le vin de la récolte de 1776 s'eſt vendu en ce mois ſoixante-quinze livres le poinçon, & celui de la récolte de 1777, ſoixante-cinq livres; c'eſt environ dix livres de diminution en un mois.

OBSERVATIONS ſur la quantité d'Eau de pluie tombée en l'année 1777.

JANVIER	1 pouc.	6 lignes	19 48.es	3 pouc.	8 lignes	0 48.es
FÉVRIER	0.	10.	2			
MARS	1.	3.	27			
AVRIL	2.	4.	6	8.	4.	9.
MAI	3.	4.	30			
JUIN	2.	7.	21			
JUILLET	2.	4.	18	4.	4.	13.
AOÛT	1.	8.	22			
SEPTEMBRE	0.	3.	21			
OCTOBRE	0.	11.	19	3.	7.	31.
NOVEMBRE	1.	2.	9			
DÉCEMBRE	1.	6.	3			
TOTAL DE LA PLUIE tombée pendant l'année 1777				20 pouc.	0 lignes	5 48.es

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

JANVIER 1777.

J.	*H.*	*N.°*	*D.*	*M.*	*J.*	*H.*	*N.°*	*D.*	*M.*	*J.*	*H.*	*N.°*	*D.*	*M.*	*J.*	*H.*	*N.°*	*D.*	*M.*
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	10			2	19	15
1	10	3	20	0	9	4 ½	3	20	0	17	10 ½	3	20	0	25	2 ½	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	10			2	10	15
2	3 ½	3	20	0	10	11 ¼	3	20	0	18	10	3	20	0	26	9	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	10			2	19	20
3	9	3	20	0	11	8	3	20	0	19	4	3	20	0	27	12 ¼	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	15			2	19	20
4	4 ¾	3	20	0	12	4 ½	3	20	0	20	3 ½	3	20	0	28	2	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	15			2	19	20
5	3	3	20	0	13	4 ½	3	20	0	21	midi	3	20	0	29	10 ¾	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	18			1	20	19			1	20	19			1	20	19
		2	19	15			2	19	10			2	19	15			2	19	20
6	8 ¼	3	20	0	14	10	3	20	0	22	9 ¼	3	20	0	30	11	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19			1	20	18
		2	19	15			2	19	10			2	19	15			2	19	20
7	4 ¼	3	20	0	15	9 ¼	3	20	0	23	8	3	20	0	31	8 ½	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	19			1	20	19			1	20	19					
		2	19	10			2	19	10			2	19	15					
8	2	3	20	0	16	3 ½	3	20	0	24	4 ¼	3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

FÉVRIER 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
		1	20	18			1	20	20			1	20	23			1	20	22
		2	19	20			2	19	20			2	19	2[illegible]			2	19	30
1	9 ½	3	20	0	9	2 ½ s.	3	20	0	17	10 m.	3	20	0	25	2 s.	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20				4	20	5
		5	6	20			5	67	20			5	67	2[illegible]			5	67	20
		1	20	18			1	20	20			1	20	2[illegible]			1	20	22
		2	19	20			2	19	20			2	19	2[illegible]			2	19	30
2	12 ¼	3	20	0	10	3 ¾	3	20	0	18	1 s.	3	20	0	26	5	3	20	0
		4	20	5			4	2	5			4	20	[illegible]			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	2[illegible]			5	67	20
		1	20	18			1	20	20			1	20	23			1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	2[illegible]			2	19	30
3	4 ½ s.	3	20	0	11	2	3	20	0	19	7 ½ m.	3	20	0	27	10 ½ m.	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	6[illegible]	2[illegible]			5	67	20
		1	20	18			1	20	20			1	20	23			1	20	23
		2	19	20			2	19	20			2	19	30			2	19	35
4	9 m.	3	20	0	12	10 ½ m	3	20	0	20	3 ½ s.	3	20	0	28	2 s.	3	20	0
		4	20	5			4	20	5			4	20	5			4	20	5
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
		1	20	18			1	20	20			1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
5	9 ½	3	20	0	13	4 s.	3	20	0	21	4 ¼	3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
		1	20	19			1	20	23			1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
6	2 s.	3	20	0	14	1 ¼	3	20	0	22	9 m.	3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
		1	20	19			1	20	23			1	20	23					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
7	11 ½ m.	3	20	0	15	9 m.	3	20	0	23	11	3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
		1	20	19			1	20	23			1	20	22					
		2	19	20			2	19	20			2	19	30					
8	5 s.	3	20	0	16	3 ½ s.	3	20	0	24	2 ½ s.	3	20	0					
		4	20	5			4	20	5			4	20	5					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

MARS 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	3 f.	1	20	23	9	11 m.	1	20	25	17	11¼ m.	1	20	25	25	2 f.	1	20	25
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
2	10 m.	1	20	23	10	7½	1	20	25	18	5¾ f.	1	20	25	26	5	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
3	8½	1	20	23	11	10¼	1	20	25	19	4	1	20	25	27	2	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	5			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
4	2 f.	1	20	23	12	4 f.	1	20	25	20	3½	1	20	25	28	9½ m.	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	35			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
5	12¼	1	20	23	13	4	1	20	25	21	6	1	20	25	29	6	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			5	20	0
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
6	4½	1	20	23	14	5½	1	20	25	22	3½	1	20	25	30	4½	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
7	2	1	20	25	15	2¼	1	20	25	23	10 m.	1	20	25	31	5½	1	20	26
		2	19	35			2	19	35			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	0			3	20	0			3	20	0
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
8	5¼	1	20	25	16	8 m.	1	20	25	24	6 f.	1	20	25					
		2	19	35			2	19	35			2	19	40					
		3	20	0			3	20	0			3	20	0					
		4	20	10			4	20	10			4	20	10					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

AVRIL 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	8	1	20	26	9	2	1	20	25	17	11 ½	1	20	20	25	9		20	22
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	40
		3	20	0			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
2	4	1	20	26	10	8 ½	1	20	24	18	7 ¾	1	20	20	26	2	1	20	22
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	40
		3	20	10			3	20	10			3	20	0			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
3	10	1	20	26	11	9 ¼	1	20	24	19	10	1	20	22	27	5 f.	1	20	21
		2	19	40			2	19	40			2	9	40			2	19	40
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
4	11 ½	1	20	24	12	2 ½	1	20	20	20	9 ¼	1	20	22	28	2	1	20	27
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	40
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
5	3	1	20	24	13	4	1	20	20	21	8	1	20	22	29	8 m.	1	20	27
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	40
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
6	11	1	20	24	14	2	1	20	20	22	11	1	20	22	30	1 ½ f.	1	20	27
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	40
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	15			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	20
7	8	1	20	24	15	11 ½	1	20	20	23	3 ½	1	20	22					
		2	19	40			2	9	40			2	19	40					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	15			4	20	10			4	20	15					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					
8	5 ¼	1	20	25	16	1 ¼		20	20	24	11 ¼	1	20	22					
		2	19	40			2	19	40			2	19	40					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	10			4	20	10			4	20	15					
		5	67	20			5	67	20			5	67	20					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

MAI 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	3	1	20	21	9	5	1	20	21	17	9	1	20	20	25	2 f.	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	20
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
2	10	1	20	21	10	3 ½	1	20	21	18	11	1	20	20	26	3 ¼	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	20
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
3	1 ½	1	20	20	11	10 ¼	1	20	21	19	1	1	20	20	27	5 f.	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
4	2	1	20	20	12	11 ½	1	20	21	20	3	1	20	20	28	2 ½	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
5	1	1	20	20	13	3 ¼	1	20	21	21	10 ½	1	20	20	29	1 ¼	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
6	8	1	20	20	14	11 ½	1	20	21	22	3	1	20	20	30	4	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	40			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	67	20			5	67	50
7	9 ½	1	20	21	15	4	1	20	2	23		1	20	20	31	2 ½	1	20	20
		2	19	40			2	19	40			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	20			4	20	15
		5	67	20			5	67	20			5	68	0			5	67	50
8	11	1	20	21	16	3 ½	1	20	2	24	6 f.	1	20	20					
		2	19	40			2	19	40			2	19	50					
		3	20	10			3	2	1			3	20	10					
		4	20	15			4	20	20			4	20	20					
		5	67	20			5	67	20			5	68	0					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

JUIN 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	12½ m.	1	20	20	9	8 s.	1	20	20	17	Je n'étois point à la maison.	1			25	11½ m.	1	20	21
		2	19	50			2	19	50			2					2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3					3	20	10
		4	20	15			4	20	20			4					4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5					5	67	50
2	6¾	1	20	20	10	3¼	1	20	20	18	7½ m.	1	20	20	26	3	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	20			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
3	7¼	1	20	20	11	2 m.	1	20	20	19	2 s.	1	20	20	27	6	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	20			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
4	6	1	20	20	12	9½	1	20	20	20	6	1	20	20	28	4½	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	20			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
5	10¾	1	20	20	13	6¼ s.	1	20	20	21	9¾ m.	1	20	20	29	8 m.	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	20			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
6	4½ s.	1	20	20	14	8½ m.	1	20	20	22	8¾	1	20	21	30	2½	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	20			4	20	20			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
7	9 m.	1	20	22	15	3¼ s.	1	20	20	23	2 s.	1	20	21					
		2	19	50			2	19	50			2	19	50					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	20			4	20	20			4	20	15					
		5	67	50			5	67	50			5	67	50					
8	5¾ s.	1	20	22	16	Je n'étois point à la maison.	1			24	6¼	1	20	21					
		2	19	50			2					2	19	50					
		3	20	10			3					3	20	10					
		4	20	20			4					4	20	15					
		5	67	50			5					5	67	50					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

JUILLET 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	$3\frac{1}{2}$ s.	1	20	20	9	$5\frac{1}{2}$ s.	1	20	22	17	10 m.	1	20	21	25	$6\frac{1}{2}$ s.	2	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
2	4 m.	1	20	20	10	$7\frac{1}{2}$ m.	1	20	22	18	$2\frac{1}{4}$ s.	1	20	21	26	2	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
3	6	1	20	21	11	$6\frac{1}{4}$	1	20	22	19	$3\frac{1}{2}$	1	20	21	27	$8\frac{1}{2}$	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	6	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
4	11	1	20	21	12	6	1	20	22	20	$8\frac{1}{4}$ m.	1	20	21	28	$3\frac{1}{4}$	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
5	$2\frac{1}{2}$ s.	1	20	21	13	$1\frac{1}{2}$ s.	1	20	22	21	$4\frac{1}{2}$ s.	1	20	21	29	7 m.	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
6	4	1	20	21	14	$3\frac{1}{2}$	1	20	21	22	11 m.	1	19	50	30	$11\frac{1}{2}$	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
7	9 m.	1	20	22	15	$8\frac{1}{4}$ m.	1	20	21	23	$2\frac{1}{2}$ s.	1	19	50	31	$1\frac{1}{4}$ s.	1	19	55
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	15			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
8	$2\frac{1}{2}$ s.	1	20	22	16	10	1	20	21	24	$7\frac{3}{4}$ m.	1	19	50					
		2	19	50			2	19	50			2	19	50					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	15			4	20	10			4	20	10					
		5	67	50			5	67	50			5	67	50					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

AOUST 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J	H.	N.°	D.	M.
1	10m.	1	19	55	9	$1\frac{1}{2}$ s.	1	20	5	17	$4\frac{1}{2}$ s.	1	20	10	25	$4\frac{1}{2}$ s.	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
2	6	1	20	5	10	$8\frac{1}{2}$ m.	1	20	5	18	$9\frac{1}{2}$	1	20	20	26	$10\frac{1}{2}$ m	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
3	$7\frac{1}{2}$	1	20	5	11	$6\frac{1}{4}$	1	20	5	19	$7\frac{1}{4}$	1	20	20	27	$5\frac{1}{4}$ s	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
4	$5\frac{1}{2}$	1	20	5	12	$4\frac{1}{2}$ s.	1	20	5	20	$7\frac{1}{2}$	1	20	20	28	$1\frac{1}{2}$	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
5	$7\frac{1}{4}$	1	20	5	13	$2\frac{1}{4}$	1	20	10	21	6	1	20	20	29	$6\frac{1}{2}$ m.	1	20	20
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
6	4 s.	1	20	5	14	$5\frac{1}{2}$	1	20	10	22	$6\frac{3}{4}$ s.	1	20	20	30	$11\frac{1}{2}$	1	20	25
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
7	$4\frac{1}{2}$	1	20	5	15	$11\frac{1}{2}$ m.	1	20	10	23	$2\frac{1}{2}$	1	20	20	31	$2\frac{1}{2}$ s.	1	20	25
		2	19	50			2	19	50			2	19	50			2	19	50
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	67	50			5	67	50			5	67	50
8	2	1	20	5	16	$7\frac{1}{4}$	1	20	10	24	$11\frac{1}{2}$ m.	1	20	20					
		2	19	50			2	19	50			2	19	50					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	10			4	20	15			4	20	15					
		5	67	50			5	67	50			5	67	50					

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

SEPTEMBRE 1777.

J.	H.	N.°	...	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
		1	2	25			1	20	25			1	20	26			1	20	29
		2	19	50			2	20	30			2	30	30			2	20	35
1	5 s.	3	20	10	9	2 m.	3	20	10	17	4 ½ m.	3	20	10	25	2 ½ s.	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	68	20			5	68	20			5	68	25
		1	20	25			1	20	25			1	20	26			1	20	30
		2	19	50			2	20	30			2	20	30			2	20	35
2	4	3	20	10	10	8 ½	3	20	10	18	5 ½	3	20	10	26	12 ½	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	68	20			5	68	20			5	68	2
		1	20	25			1	20	25			1	20	27			1	20	30
		2	19	50			2	20	30			2	20	30			2	20	35
3	2 ½		20	10	11	2 ½ s.	3	20	10	19	1 ½	3	20	10	27	5 ½	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	68	20			5	68	20			5	67	
		1	20	25			1	20	25			1	20	27			1	20	30
		2	19	50			2	20	30			2	20	30			2	20	35
4	11 ½ m	3	20	10	12	4 ¼	3	20	10	20	4 ¼	3	20	10	28	3 ¼	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	67	50			5	68	20			5	68	20			5	67	25
		1	20	25			1	20	26			1	20	27			1	20	30
		2	20	50			2	20	30			2	20	30			2	20	35
5	11 ¼	3	20	10	13	7 ½ m.	3	20	10	21	3 ½	3	20	10	29	2 ½	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	68	20			5	68	20			5	68	20			5	68	30
		1	20	25			1	20	26			1	20	27			1	20	32
		2	20	25			2	20	30			2	20	30			2	20	45
6	5 ½	3	20	10	14	11 ½	3	20	10	22	5	3	20	10	30	9	3	20	10
		4	20	15			4	20	15			4	20	15			4	20	15
		5	68	20			5	68	20			5	68	20			5	68	30
		1	20	25			1	20	26			1	20	29					
		2	20	25			2	20	30			2	20	35					
7	4	3	20	10	15	4 ¼	3	20	10	23	11 ½	3	20	10					
		4	20	15			4	20	15			4	20	15					
		5	68	20			5	68	20			5	68	20					
		1	20	25			1	20	26			1	20	29					
		2	20	25			2	20	30			2	20	35					
8	10 ½	3	20	10	16	3 ½	3	20	10	24	9	3	20	10					
		4	20	15			4	20	15			4	20	15					
		5	68	20			5	68	20			5	68	20					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

OCTOBRE 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
		1	20	35			1	20	36			1	20	36			1	20	35
		2	20	45			2	20	45			2	21	15			2	21	15
1	4	3	20	10	9	8 ¼ m	3	20	10	17	11 ½ m.	3	20	10	25	9 ½ m	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	35			1	20	36			1	20	36			1	20	35
		2	20	45			2	20	45			2	21	15			2	21	15
2	6 ½ ſ.	3	20	10	10	7 ½	3	20	10	18	5 ſ.	3	20	10	26	8 ½	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	35			1	20	36			1	20	36			1	20	35
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
3	9 m.	3	20	10	11	8	3	20	10	19	2 ¼	3	20	10	27	11 ¼	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	35			1	20	36			1	20	36			1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
4	7 ¼	3	20	10	12	8 ¼	3	20	10	20	3	3	20	10	28	1 ſ.	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	36			1	20	36			1	20	36			1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
5	11 ½	3	20	10	13	8	3	20	10	21	2	3	20	10	29	11 ½ m.	5	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	36			1	20	36			1	20	36			1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
6	5 ¾ ſ.	3	20	10	14	2 ſ.	3	20	10	22	2 ½	3	20	10	30	2 ¼ ſ.	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	36			1	20	36			1	20	35			1	20	36
		2	20	45			2	21	15			2	21	15			2	21	15
7	10 ½ m	3	20	10	15	11 ½ m.	3	20	10	23	8 ¾ m.	3	20	10	31	4 ½	3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	10			4	20	10
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
		1	20	36			1	20	36			1	20	35					
		2	20	45			2	21	15			2	21	15					
8	9 ½	3	20	10	16	9	3	20	10	24	4 ½ ſ.	3	20	10					
		4	20	10			4	20	10			4	20	10					
		5	68	30			5	68	30			5	68	30					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

NOVEMBRE 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D	M.
1	7 ½	1	20	36	9	4 ½	1	20	33	17	11	1	20	26	25	Je n'étois point à la maison.	1		
		2	21	15			2	21	15			2	21	15			2		
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3		
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4		
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5		
2	10	1	20	36	10	2 ¼	1	20	33	18	2 ¼	1	20	26	26		1		
		2	21	15			2	21	15			2	21	10			2		
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3		
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4		
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5		
3	11 ½	1	20	36	11	10 ½	1	20	33	19	11 ½	1	20	26	27		1		
		2	21	15			2	21	15			2	21	10			2		
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3		
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4		
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5		
4	1 ¼	1	20	34	12	7 ¾	1	20	31	20	9 ¼	1	20	26	28	11 ¼	1	20	25
		2	21	15			2	21	15			2	21	10			2	21	10
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4	20	5
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
5	3	1	20	34	13	9 ½	1	20	31	21	2	1	20	26	29	11 ¼	1	20	25
		2	21	15			2	21	15			2	21	10			2	21	10
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4	20	5
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
6	8 ¼	1	20	34	14	5	1	20	31	22	2 ½	1	20	24	30	4 ½	1	20	25
		2	21	15			2	21	15			2	21	10			2	21	10
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	10			4	20	10			4	20	5			4	20	5
		5	68	30			5	68	30			5	68	30			5	68	30
7	8 ¼	1	20	33	15	2	1	20	31	23	2	1	20	23					
		2	21	15			2	21	15			2	21	10					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	10			4	20	5			4	20	5					
		5	68	30			5	68	30			5	68	30					
8	2	1	20	33	16	11 ½	1	20	26	24	8 ½	1	20	24					
		2	21	15			2	21	15			2	21	10					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	10			4	20	5			4	20	5					
		5	68	30			5	68	30			5	68	30					

OBSERVATIONS DES BOUSSOLES.

DÉCEMBRE 1777.

J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.	J.	H.	N.°	D.	M.
1	3	1	20	25	9	4 ½	1	20	22	17	9 ¼	1	20	20	25	2	1	20	18
		2	21	10			2	21	10			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	5			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	30			5	68	25			5	68	25			5	68	20
2	10 ½	1	20	25	10	9 ½	1	20	22	18	3	1	20	18	26	8 ½	1	20	18
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	5			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	30			5	68	25			5	68	25			5	68	20
3	8	1	20	25	11	1 ¼	1	20	22	19	10	1	20	18	27	3 ¼	1	20	19
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	5			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	25			5	68	25			5	68	20			5	68	20
4	10 ¼	1	20	25	12	3	1	20	20	20	4	1	20	18	28	11	1	20	19
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	0			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	25			5	68	25			5	68	20			5	68	20
5	1 ½	1	20	22	13	10	1	20	20	21	11 ½	1	20	18	29	10 ½	1	20	19
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	0			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	25			5	68	25			5	68	20			5	68	20
6	11	1	20	22	14	3 ½	1	20	20	22	8 ½	1	20	18	30	3 ½	1	20	19
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	0			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	25			5	68	25			5	68	20			5	68	20
7	9 ¼	1	20	22	15	3	1	20	20	23	10 ¼	1	20	18	31	10 ¼	1	20	19
		2	21	10			2	21	5			2	21	5			2	21	5
		3	20	10			3	20	10			3	20	10			3	20	10
		4	20	0			4	20	0			4	20	0			4	20	0
		5	68	25			5	68	25			5	68	20			5	68	20
8	3	1	20	22	16	14 ½	1	20	20	24	9 ½	1	20	18					
		2	21	10			2	21	5			2	21	5					
		3	20	10			3	20	10			3	20	10					
		4	20	0			4	20	0			4	20	0					
		5	68	25			5	68	25			5	68	20					

ESSAI D'UNE THÉORIE

De la Résistance qu'éprouve la Proue d'un Vaisseau dans son mouvement.

Par M. LÉONARD EULER.

COMME la Théorie ordinaire est uniquement fondée sur l'effet du choc de l'eau contre la proue, quoique son frottement sur la surface du Vaisseau doive produire un effet très-considérable, comme j'ai fait voir dans un Mémoire, inséré au *Volume VI* des *Nouveaux Commentaires*, sous le titre: *Tentamen Theoriæ de frictione fluidorum*, il n'est pas surprenant que cette théorie donne toujours la résistance trop petite, & qu'elle s'écarte d'autant plus de la vérité, que l'obliquité du choc est grande. Je crois donc qu'en tenant compte de l'effet du choc de l'eau, & de celui de son frottement, on s'approchera beaucoup plus de la vraie théorie; car on verra, par l'expression pour la résistance que je vais déduire de ces deux effets réunis, que lorsque le choc de l'eau est à peu-près perpendiculaire, la résistance sera aussi à peu-près comme le carré du sinus d'incidence, & que dans le choc oblique, elle approche de plus en plus de la raison du simple sinus, comme elle a été conclue par les expériences faites par M.^rs d'Alembert, le Marquis de Condorcet & l'abbé Bossut. Lû le 24 Févr. 1781.

Pour combiner cette double source de la résistance, je vais considérer une proue angulaire, dont la section faite à fleur d'eau soit le triangle isocèle ABB, auquel toutes les autres sections horizontales soient égales. Soit AC l'axe de la proue qui partage la largeur BB en deux également au point C; & en mettant cet axe $AC = a$, les côtés $AB = b$, l'angle $BAC = \alpha$, & la profondeur ou flottaison $Aa = Bb = Cc = c$, on aura $BC = b\ \sin.\ \alpha$. Fig. 1.

Fig. 1. Que la proue ſe meuve dans la direction CA avec une vîteſſe égale v, où v marque l'eſpace parcouru en une ſeconde de temps, & en mettant g pour la hauteur par laquelle un corps tombe dans le même temps, la hauteur qui répond à la vîteſſe v, ſera exprimée par $\frac{vv}{4g}$; ainſi, ſi l'eau choquoit perpendiculairement, avec cette vîteſſe v, ſur la face $ABba$, dont l'aire eſt bc, la force du choc ſeroit égale au poids d'un volume d'eau égal à $\frac{bcvv}{4g}$. Mais puiſque le choc ſe fait ſous un angle α, ſa force ſera exprimée par $\frac{bcvv \text{ ſin. } \alpha^2}{4g}$, & ſa direction MN perpendiculaire à la face AB; de-là il naît une force ſelon la direction AC égale à bc ſin. $\alpha . \frac{vv \text{ ſin. } \alpha^2}{4g}$, où bc ſinus α exprime la moitié de la plus grande largeur BB. Le double de cette force $2\,bc$ ſin. $\alpha . \frac{vv \text{ ſin. } \alpha^2}{4g}$, donnera la partie de la réſiſtance cauſée par le ſeul choc de l'eau ſur la proue, & cette expreſſion convient avec la théorie ordinaire.

Pour déterminer l'effet du frottement, je remarque d'abord qu'on ne ſauroit douter que le frottement ne ſoit égal à une partie aliquote de toute la preſſion que l'eau exerce ſur la ſurface entière de la proue : or cette preſſion eſt produite par une double cauſe, dont l'une eſt la propre peſanteur de l'eau, & qui ſur la face $ABab$ eſt égale à $\frac{1}{2}bcc$; l'autre partie eſt la preſſion que le choc exerce ſur la même face, qui eſt, comme j'ai fait voir, $\frac{bcvv \text{ ſin. } \alpha^2}{4g}$. En prenant donc la fraction λ pour la partie de la preſſion égale au frottement, la force qui en réſulte ſera $\frac{1}{2}\lambda bcc + \frac{\lambda bcvv \text{ ſin. } \alpha^2}{4g}$, dont la direction eſt la droite AB, ce qui donne pour la direction AC la force $\frac{1}{2}\lambda bcc \text{ coſ. } \alpha + \frac{\lambda bcvv \text{ ſin. } \alpha^2 \text{ coſ. } \alpha}{4g}$, dont le double donne l'effet du frottement ſur l'une & l'autre face.

Enfin la base de la proue, dont l'aire est ab sin. α & la profondeur C, éprouve la pression abc sin. α; d'où il naît un frottement dans la direction même du mouvement, égal à λabc sin. α; la somme de toutes les forces qu'éprouve la proue entière, tant du choc que du frottement de l'eau, contraires au mouvement du Vaisseau, sera donc Fig. 1.

$$\frac{bc \text{ sin. } \alpha}{2g} \cdot vv(\text{sin. } \alpha^2 + \lambda \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha) + \lambda bc(c \text{ cos. } \alpha + a \text{ sin. } \alpha).$$

Pour faciliter l'application de cette formule aux expériences, on pourra mettre $v = \frac{s}{t}$, où s marque l'espace parcouru par le Vaisseau, & t le temps exprimé en secondes; & puisque le poids moteur doit être égal à la résistance, pour produire ce mouvement, en le désignant par la lettre P, on aura cette équation,

$$P = \frac{bc \text{ sin. } \alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{tt}(\text{sin. } \alpha^2 + \lambda \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha) + \lambda bc(c \text{ cos. } \alpha + a \text{ sin. } \alpha),$$

où P doit être exprimé par un volume d'eau du même poids; de sorte qu'en mettant 140 marcs pour le poids d'un pied cube d'eau, on aura à peu-près

$$\frac{P}{140} = \frac{bc \text{ sin. } \alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{tt}(\text{sin. } \alpha^2 + \lambda \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha) + \lambda bc(c \text{ cos. } \alpha + a \text{ sin. } \alpha).$$

En supposant le choc direct, de sorte qu'on puisse regarder l'angle α sensiblement égal à 90 degrés, & son cosinus évanouissant, il y aura $\frac{P}{140} = \frac{bc \text{ sin. } \alpha^3}{2g} \cdot \frac{ss}{tt} + \lambda abc \text{ sin. } \alpha$; & en négligeant le dernier terme, qui sera très-petit par rapport à l'autre, toutes les fois que la vîtesse $\frac{s}{t}$ est considérable, la résistance, rapportée à la plus grande largeur de la proue, sera $bc \text{ sin. } \alpha \cdot \frac{ss}{2gtt} \cdot \text{sin. } \alpha^2$, & par conséquent proportionnelle au carré du sinus d'incidence, tout comme

dans l'hypothèſe commune. Mais en ſuppoſant l'angle d'incidence très-petit, & $\text{coſ.}\,\alpha = 1$, à peu-près, on aura

$$\frac{p}{34\varrho} = \frac{bc\,\text{ſin.}\,\alpha}{2g} \cdot \frac{ss}{tt}(\text{ſin.}\,\alpha^2 + \lambda\,\text{ſin.}\,\alpha) + \lambda bc(c + a\,\text{ſin.}\,\alpha);$$

d'où l'on voit, qu'à cauſe de la petiteſſe de $\text{ſin.}\,\alpha$, cette réſiſtance approche à la raiſon du ſimple ſinus; au moins s'écartera-t-elle beaucoup plus de la raiſon du carré, tout comme on a vu par les expériences. L'expreſſion qui vient d'être trouvée pour la réſiſtance, ſe rapporte donc uniquement à la figure de la proue du Vaiſſeau, & j'ai même ſuppoſé que la preſſion de l'eau contre la poupe, contre-balance parfaitement celle qui agit ſur la proue, tout comme il arrive dans l'état de repos: mais il eſt clair, que plus le mouvement d'un Vaiſſeau eſt rapide, plus l'eau aura de la peine à le ſuivre, & partant la preſſion ſur la poupe pourra devenir conſidérablement plus petite que celle que la proue ſoutient; il en doit réſulter une augmentation de la réſiſtance d'autant plus grande, que le mouvement eſt plus rapide. Outre cela, la poupe éprouvera auſſi un frottement de la part de l'eau qui gliſſe ſur ſa ſurface: or il ſemble trop difficile de déterminer cet effet par aucune théorie; je me contente donc d'avoir aſſigné la réſiſtance que l'eau exerce ſur la ſeule proue.

Tout reviendroit ici à connoître la juſte valeur de la lettre λ, & il me ſemble qu'on pourroit la déterminer aſſez exactement, moyennant quelques expériences faites de la manière que je vais indiquer.

Fig. 2. Soit *AA*, *BB*, un grand vaſe rempli d'eau, & muni en bas d'un petit tuyau ouvert *bc*, auquel on puiſſe ajuſter le tuyau *CE*, moyennant le col *BC*, qui, ſans laiſſer ſortir l'eau, doit gliſſer auſſi légèrement qu'il eſt poſſible ſur le petit tuyau *bc* du vaſe; & il eſt clair que l'eau, en coulant par le grand tuyau *BE*, exercera, pour l'entraîner & pour le détacher du vaſe, une force qui pourra aiſément ſurpaſſer le petit frottement du col *BC* ſur l'orifice *bc*. Qu'on attache à ce tuyau un fil qui, en paſſant ſur la poulie *F*, porte un poids *p*, capable

capable de retenir le tuyau, & de vaincre la force de l'eau, ce poids se trouvera facilement par quelques expériences, & diminué de l'effet du frottement du grand tuyau sur le petit, il donnera la fraction λ, puisque tant la pression de l'eau dans le tuyau, que sa surface intérieure, peut être exactement assignée : pour faciliter cette recherche, on tiendra le vase toujours rempli d'eau, afin que le mouvement soit uniforme aussi-bien que la pression.

Après avoir établi ici les vrais principes, d'où il faut tirer la détermination de la résistance qu'éprouve la proue d'un Vaisseau, sans entrer dans la discussion de ce que la poupe y peut contribuer, je vais terminer ce petit Mémoire par l'application de ces principes à une proue de figure quelconque, déterminée par une équation entre trois variables.

Soit la ligne AB sur la surface de l'eau, l'axe de la proue & la direction de son mouvement, dont la vîtesse $= v$; soient les trois ordonnées $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, & l'équation pour la figure de la proue $\partial z = p\partial x + q\partial y$; considérons la section verticale de la proue EZ, faite perpendiculairement à YX; soit ZE perpendiculaire sur EZ, & on aura la sous-normale $YL = \frac{z\partial z}{\partial x} = pz$; donc, si LN est parallèle à Yx, ou perpendiculaire à la section, chaque droite NZ sera aussi perpendiculaire à EZ. Concevons de la même manière une section verticale FZ, faite selon XY, & perpendiculaire à AX, de sorte que Zn soit perpendiculaire sur FZ, & la sous-normale YM sera $= -\frac{z\partial z}{\partial y} = -qz$; & en tirant la droite MN, perpendiculaire à ce plan, toutes les droites ZN seront aussi perpendiculaires à la courbe FZ. Fig. 3.

En complétant donc le parallélogramme $MYLN$, la droite ZN, perpendiculaire sur les courbes EZ & FZ, sera aussi perpendiculaire à la surface de la proue au point Z, & partant $MN = YL = pz$, & $LN = YM = -qz$; donc $ZL = \sqrt{(YZ^2 + YL^2)} = z\sqrt{(1 + pp)}$; il y aura donc dans le triangle rectangle ZLN, la droite

Fig. 3. $ZN = z(1 + pp + qq)$, ſelon laquelle la preſſion de l'eau agit ſur la proue.

Soit l'angle $MNZ = \varphi$, & on aura cof. $\varphi = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp + qq)}}$, & l'angle, ſous lequel la direction de la courſe eſt inclinée ſur la proue en Z $= 90^d - \varphi$. La force de l'eau ſelon ZN, ſera $\frac{vv}{4g}$ coſ. $\varphi^2 = \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1 + pp + qq}$, & l'élément de la proue, qui répond à l'élément $\partial x \partial y$, ſera $\partial x \partial y \sqrt{(1 + pp + qq)}$; d'où l'on tire la réſiſtance qui naît du choc de l'eau $= \frac{vv}{4g} \iint \frac{p^3 \partial x \partial y}{1 + pp + qq}$.

Soit enſuite la preſſion en Z, égale à π, & on aura $\pi = z + \frac{vv \text{ coſ.} \varphi^2}{4g}$; & puiſque la friction $= \lambda \pi$, ſon effet contraire au mouvement ſera $\frac{\lambda \pi q}{\sqrt{(pp + qq)}}$, & l'effet total de la friction ſera exprimé par

$$\lambda \iint \frac{q \partial x \partial y \sqrt{(1 + pp + qq)}}{\sqrt{(pp + qq)}} \left(z + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{pp}{1 + pp + qq}\right),$$

qui, ajoutée à l'effet du choc, donne la réſiſtance totale de la proue en queſtion.

Fig. 4. Si l'on veut appliquer cette expreſſion à une proue pyramidale $ABCD$, dont la longueur $AB = a$, la demi-largeur $BD = b$, & la profondeur $CD = c$, on a l'équation $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, & partant $p = \frac{c}{a}$, & $q = -\frac{c}{b}$. Donc, puiſque p & q ſont des conſtantes, l'expreſſion pour la réſiſtance totale ſera

$$\frac{vv}{4g} \cdot \frac{b^3 c^3}{aa + bb + aacc + bbcc} + \frac{\lambda ac\sqrt{(aabb + aacc + bbcc)}}{\sqrt{(aa + bb)}} \left(\frac{r}{b} + \frac{vv}{4g} \cdot \frac{bbc}{aa + bb + aacc + bbcc}\right).$$

EXTRAITS de différentes Lettres de M. EULER à M. le Marquis DE CONDORCET.

L'INTÉGRALE de cette formule, $\frac{x^m - x^n}{lx} \cdot \frac{\partial x}{n}$, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, eſt $= l\,\frac{m}{n}$. $\frac{3}{14}$ Nov. 1775.

L'intégrale de cette formule $\frac{x^{m-1}\partial x}{(1 + x^n)\,lx}$, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = \infty$ eſt $= l \,.\, \text{tang.}\, \frac{m\pi}{n}$, où π marque l'angle de 180 degrés.

Démonſtration des deux Théorèmes précédens.

SOIT Q une fonction quelconque des deux variables x & y, & qu'on cherche la quantité Z, telle que $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x \partial y}\right) = Q$, où il s'agit d'une double intégration; l'une où la ſeule x eſt priſe pour variable, & l'autre où la ſeule y varie; la première devra être étendue depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, & l'autre depuis $y = 0$ juſqu'à $y = n$: par la nature de telles formules, on aura donc d'une double manière ou $Z = \int \partial x \int Q \partial y$, ou $Z = \int \partial y \int Q \partial x$. Maintenant, qu'on ſuppoſe $Q = x^y$, & on aura $\int Q \partial y = \frac{x^y}{lx} - \frac{1}{lx}$, afin que cette intégrale évanouiſſe lorſque $y = 0$. Soit donc à préſent $y = n$, & nous aurons $\int Q \partial y = \frac{x^n - 1}{lx}$, & partant $Z = \int \frac{(x^n - 1)\partial x}{lx}$; enſuite nous aurons $\int Q \partial x = \frac{x^{y+1}}{y+1}$, qui évanouit lorſque $x = 0$; poſant donc $x = 1$, il en réſulte $\int Q \partial x = \frac{1}{y+1}$, & de-là, $Z = \int \frac{\partial y}{y+1} = l(y + 1)$, (expreſſion qui diſparoît lorſque $x = 0$). Qu'on faſſe donc $y = n$, & l'on aura $Z = l(n + 1)$; par conſéquent, il eſt 2 Fév. 1776.

certain que cette intégrale $\int \frac{\partial x (x^n - 1)}{lx}$, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, eſt $l(n + 1)$.

Pour l'autre formule intégrale plus compliquée que je vous avois communiquée, j'avois ſuppoſé $Q = \frac{x^{m-y} + x^{m+y}}{(1 + x^{2m})x}$; de-là, prenant d'abord x conſtante à cauſe de

$$\int x^{m-y} \partial y = - \frac{x^{m-y}}{lx} \text{ \& de } \int x^{m+y} \partial y = \frac{x^{m+y}}{lx},$$

on aura $$\int Q \partial y = \frac{x^{m+y} - x^{m-y}}{(1 + x^{2m}) x lx},$$

ce qui devient $= 0$ poſant $y = 0$. Faiſant donc $y = n$,

on aura $$\int Q \partial y = \frac{x^{m+n} - x^{m-n}}{(1 + x^{2m}) x lx},$$

& partant $$Z = \int \frac{(x^{m+n} - x^{m-n}) \partial x}{(1 + x^{2m}) x lx}.$$

L'autre intégration donne d'abord

$$\int Q \partial x = \int \frac{(x^{m-y} + x^{m+y}) \partial x}{(1 + x^{2m}) x},$$

dont l'intégrale doit être étendue depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$; or pour ce cas, j'ai démontré autrefois que cette intégrale ſe réduit à cette forme, $\frac{\pi}{2m \operatorname{coſ.} \frac{\pi y}{2m}}$; d'où nous tirons $Z = \int \frac{\pi \partial y}{2m \operatorname{coſ.} \frac{\pi y}{2m}}$. Pour cette forme, poſons $\frac{\pi y}{2m} = \varphi$ pour avoir $Z = \int \frac{\partial \varphi}{\operatorname{coſ.} \varphi} = \int \frac{\partial \varphi}{\operatorname{ſin.} (90^d + \varphi)}$; dont l'intégrale eſt $l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{1}{2}\varphi)$, & partant $Z = l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{\pi y}{4m})$, qui en effet s'évanouit prenant $y = 0$. Faiſons donc $y = n$, & nous aurons $Z = l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{\pi n}{4m})$;

d'où il eſt clair que ſous les conditions préſentes, on aura

$$\int \frac{(x^{m+n-1} - x^{m-n-1})\partial x}{(1 + x^{2m})\,lx} \left\{ \begin{matrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{juſqu'à } x = 1 \end{matrix} \right\} = l.\text{tang.}\left(45^d + \frac{\pi n}{4m}\right).$$

Par ces deux exemples, on verra aiſément que cette ſpéculation mérite toute l'attention des Géomètres. La première idée qui m'a conduit à cette recherche, étoit tirée d'un principe entièrement différent, que voici. J'avois conſidéré cette formule $\int \frac{(x-1)\partial x}{lx}$, où au lieu de lx j'ai écrit cette valeur $\frac{x^{\omega} - 1}{\omega}$, en ſuppoſant ω infiniment petit, ou bien $lx = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, en prenant pour i un nombre infiniment grand. Qu'on poſe à préſent $x^{\frac{1}{i}} = z$, ou bien $x = z^i$, où il faut remarquer que les termes de l'intégration $x = 0$ & $x = 1$ ſe réduiſent à $z = 0$ & à $z = 1$; cette valeur étant ſubſtituée, transforme notre formule en celle-ci, $\frac{(z^i - 1)\,z^{i-1}\partial z}{z - 1}$; or la fraction $\frac{z^i - 1}{z - 1}$ ou bien $\frac{1 - z^i}{1 - z}$, ſe réduit à la ſérie $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{i-1}$, qui étant multipliée & intégrée, donne

$$\frac{z^i}{i} + \frac{z^{i+1}}{i+1} + \frac{z^{i+2}}{i+2} + \frac{z^{i+3}}{i+3} + \ldots + \frac{z^{2i-1}}{2i-1},$$

& poſant $z = 1$, la valeur cherchée ſera

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \frac{1}{i+4} + \ldots + \frac{1}{2i-1},$$

dont la valeur eſt $l2$, de ſorte que $\int \frac{(x-1)\partial x}{lx} \left\{ \begin{matrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{juſqu'à } x = 1 \end{matrix} \right\}$ eſt $= l2$.

Pour démontrer la ſomme de la ſérie trouvée qu'on appellera A, on n'a qu'à remarquer que

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2i-1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{1-i}\right),$$

où, parce que la série supérieure contient deux fois plus de termes que l'inférieure, on n'a qu'à soustraire chaque terme de la dernière de la supérieure alternativement, & l'on aura

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \ldots + \frac{1}{2i-1}$$

$$- 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \&c.$$

ou bien

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \&c. = l2.$$

Autre Théorème.

En prenant les lettres α, β, γ, δ, &c. pour marquer les coëfficiens d'un binome élevé à l'exposant n, de sorte que

$$(1+x)^n = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \&c.$$

on aura toujours

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\ldots\frac{4n-2}{n},$$

par exemple, si $n = 6$, on aura $\alpha = 6$, $\beta = 15$, $\gamma = 20$, $\delta = 15$, $\varepsilon = 6$, $\zeta = 1$, & les suivans $= 0$; & partant on aura

$$1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1 = \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{18}{5}\cdot\frac{22}{6},$$

dont la démonstration directe me paroît extrêmement difficile.

Démonstration de ce Théorème.

12/23 Sept. 1776.

En supposant

$$(1+z)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)z + \left(\frac{n}{2}\right)z^2 + \left(\frac{n}{3}\right)z^3 + \&c;$$

d'où l'on voit que $\left(\frac{n}{0}\right) = 1$, aussi-bien que $\left(\frac{n}{n}\right)$, &

de-là il s'ensuit, que $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n}{n-p}\right)$; outre cela, il est clair que la valeur de la formule $\left(\frac{n}{p}\right)$ est toujours égale à zéro, tant dans les cas où p est un nombre négatif, que dans ceux où il est un nombre plus grand que n, ce qui s'entend des nombres entiers; ensuite, on sait que la valeur développée de ce caractère $\left(\frac{n}{p}\right)$ est $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \ldots \frac{n-p+1}{p}$. Cela posé, si nous passons aux coëfficiens de la puissance suivante $(1+z)^{n+1}$, on sait qu'on aura $\left(\frac{n+1}{p+1}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{n}{p+1}\right)$; de sorte que réciproquement $\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{n+1}{p+2}\right)$; ajoutons ces deux équations ensemble, & nous aurons

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 2\left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{n}{p+2}\right) = \left(\frac{n+1}{p+1}\right) + \left(\frac{n+1}{p+2}\right) = \left(\frac{n+2}{p+2}\right);$$

de la même manière, nous aurons

$$\left(\frac{n}{p+1}\right) + 2\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{n}{p+3}\right) = \left(\frac{n+2}{p+3}\right);$$

cette équation ajoutée à la précédente, donne

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 3\left(\frac{n}{p+1}\right) + 3\left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{n}{p+3}\right) = \left(\frac{n+2}{p+2}\right) + \left(\frac{n+2}{p+3}\right) = \left(\frac{n+3}{p+3}\right);$$

ensuite

$$\left(\frac{n}{p+1}\right) + 3\left(\frac{n}{p+2}\right) + 3\left(\frac{n}{p+3}\right) + \left(\frac{n}{p+4}\right) = \left(\frac{n+3}{p+4}\right),$$

qui, encore ajoutée à la précédente, donne

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 4\left(\frac{n}{p+1}\right) + 6\left(\frac{n}{p+2}\right) + 4\left(\frac{n}{p+3}\right) + \left(\frac{n}{p+4}\right) = \left(\frac{n+3}{p+3}\right) + \left(\frac{n+3}{p+4}\right) = \left(\frac{n+4}{p+4}\right),$$

& de-là il est aisé à conclure qu'on aura en général

$$1\left(\frac{n}{p}\right) + \left(\frac{m}{1}\right) \cdot \left(\frac{n}{p+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{p+2}\right) + \left(\frac{m}{3}\right) \cdot \left(\frac{n}{p+3}\right) + \&c. = \left(\frac{n+m}{p+m}\right),$$

Voilà donc une progreſſion bien générale, dont chaque terme eſt le produit de deux coëfficiens de puiſſances différentes du binome, dont le terme général peut être exprimé par la formule $\left(\frac{m}{x}\right).\left(\frac{n}{p+x}\right)$, où mettant pour x ſucceſſivement les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c. juſqu'à ce qu'on parvienne à des termes évanouiſſans, la ſomme de toute cette progreſſion ſera infailliblement $= \left(\frac{n+m}{p+m}\right) = \left(\frac{n+m}{n-p}\right)$. C'eſt de-là que réſulte le Théorème que je vous ai communiqué, en faiſant $m = n$, & $p = 0$, de ſorte qu'il eſt un cas infiniment plus particulier, que la ſérie que je viens de ſommer ici. Dans ce cas, on aura cette ſommation,

$$1^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \&c. = \left(\frac{2n}{n}\right);$$

or cette formule développée donne

$$\frac{2n}{1} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-2}{3} \cdot \frac{2n-3}{4} \cdots\cdots \frac{n+1}{n},$$

ce qui, comme il eſt aiſé à démontrer, eſt égal à

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{4n-2}{n}.$$

Il eſt fort remarquable que cette ſommation a auſſi lieu, lors même que les expoſans m & n ſont des fractions quelconques, pourvu que par la voie d'interpolation, on puiſſe aſſigner la juſte valeur de $\left(\frac{m+n}{m+p}\right)$; & ſi le développement n'a pas lieu dans ce cas, il faut recourir à des formules intégrales : or poſant pour abréger $l\frac{1}{x} = u$, on aura toujours

$$\left(\frac{m+n}{m+p}\right) = \frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x . \int u^{n-p}\partial x} \begin{Bmatrix} \text{de } x = 0 \\ \text{à } x = 1 \end{Bmatrix}:$$

or, ſi λ marque un nombre entier poſitif quelconque, on ſait qu'il y aura $\int u^\lambda \partial x = 1.2.3.4\ldots\lambda$, & de-là on tirera

$$\int u^{\lambda+1}\partial x = (\lambda+1)\int u^\lambda \partial x,$$

$$\int u^{\lambda+2}\partial x = (\lambda+1).(\lambda+2)\int u^\lambda \partial x, \&c.$$

& cette

& cette réduction aura toujours lieu, quelque nombre qu'on prenne pour λ. Prenant donc $\lambda = -\frac{1}{2}$, j'ai démontré autrefois qu'on aura $\int \frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \pi$, & $\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π désignant la circonférence d'un cercle, dont le diamètre $= 1$. Maintenant, si l'on met $m = n\ \frac{1}{2}\ \partial p = 0$, puisque les coëfficiens de $(1 + z)^{\frac{1}{2}}$ sont

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \&c,$$

nous en tirons cette série des carrés,

$$1^2 + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1.1}{2.4})^2 + (\tfrac{1.1.3}{2.4.6})^2 + \&c,$$

dont la somme sera $\frac{\int u \partial x}{\int \partial x \sqrt{u} \int \partial x \sqrt{u}} = \frac{4}{\pi}$, à cause de $\int u \partial x = 1$ & $\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ce qui s'accorde parfaitement avec la somme qu'on trouve par la voie de l'approximation.

J'ai cru pouvoir joindre ici une autre Démonstration de deux des Théorèmes précédens, quoique la méthode qui y est employée soit fort inférieure à celle de M. Euler; mais il peut être quelquefois utile de voir comment différentes routes peuvent conduire aux mêmes vérités. D'ailleurs M. Euler ayant daigné honorer ces recherches de son approbation, c'est lui donner une marque de mon respect que de les rendre publiques.

Soit la fonction $\int \frac{x^m}{lx}\ \frac{\partial x}{x}$, & qu'on l'intègre en série par la méthode des intégrations par parties, on aura

$$\int \frac{x^m}{lx}\ \frac{\partial x}{x} = x^m \left[\frac{1}{m\,lx} + \frac{1}{m^2\,lx^2} + \frac{2}{m^3\,lx^3} + \frac{2.3}{m^4\,lx^4} \ldots\right]$$

Ainsi la valeur de cette intégrale, prise depuis $x = B$ jusqu'à $x = A$, sera

$$(S)\left\{\begin{array}{l} B^m.\left(\frac{1}{m\,l\,B}+\frac{1}{m^2\,l\,B^2}+\frac{2}{m^3\,l\,B^3}+\frac{2.3}{m^4\,l\,B^4}\ldots\right) \\ -A^m.\left(\frac{1}{m\,l\,A}+\frac{1}{m^2\,l\,A^2}+\frac{2}{m^3\,l\,A^3}+\frac{2.3}{m^4\,l\,A^4}\ldots\right) \end{array}\right.$$

Pour avoir maintenant la valeur de cette fonction en m, je la différencie par rapport à m, & j'ai pour sa valeur

$$B^m.\left(\frac{\partial m}{m}+\frac{\partial m}{m^2\,l\,B}+\frac{2\,\partial m}{m^3\,l\,B^2}+\frac{2.3\,\partial m}{m^4\,l\,B^3}\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\partial m}{m^2\,l\,B}-\frac{2\,\partial m}{m^3\,l\,B^2}-\frac{2.3\,\partial m}{m^4\,l\,B^3}\ldots\right)$$
$$-A^m.\left(\frac{\partial m}{m}+\frac{\partial m}{m^2\,l\,A}+\frac{2\,\partial m}{m^3\,l\,A^2}+\frac{2.3\,\partial m}{m^4\,l\,A^3}\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{\partial m}{m^2\,l\,A}-\frac{2\,\partial m}{m^3\,l\,A^2}-\frac{2.3\,\partial m}{m^4\,l\,A^3}\right),$$

valeur qui se réduit à

$$(B^m - A^m).\frac{\partial m}{m}.$$

La valeur de la série (S) sera donc

$$\int(B^m - A^m).\frac{\partial m}{m}+C;$$

& si on suppose $A = 0$ & $B = 1$ à $\int\frac{\partial m}{m}+C = lm + C$, C étant une constante indépendante de m, par la même raison, on aura pour valeur de $\int\frac{x^n}{lx}.\frac{\partial x}{x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la fonction $ln + C$; donc la valeur $\int\frac{x^n - x^m}{lx}.\frac{\partial x}{x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, sera $ln - lm$ ou $l\frac{n}{m}$.

On seroit parvenu à la même conclusion, sans employer les séries; en effet, le Problème se réduit ici à trouver

$$\int\left(\frac{B^m}{lB}\,\frac{\partial B}{B}-\frac{A^m}{lA}\,\frac{\partial A}{A}\right);$$

or, différenciant cette fonction par rapport à m, elle devient $\int(B^{m-1}\partial B - A^{m-1}.\partial A), \partial m = (B^m - A^m).\frac{\partial m}{m}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

On auroit aussi trouvé immédiatement en cherchant que la valeur de

$$\int\left(\frac{B^n - B^m}{l B} \; \frac{\partial B}{B} - \frac{A^n - A^m}{l A} \; \frac{\partial A}{A}\right),$$

que cette fonction différenciée par rapport à n & à m; devient

$$(B^n - A^n).\frac{\partial n}{n} - (B^m - A^m).\frac{\partial m}{m},$$

dont l'intégrale est, lorsque $B = 1$ & $A = 0$, $l\frac{n}{m} + C$; mais pour le cas de $m = n$, il est clair que cette intégrale doit être zéro; donc $C = 0$; donc l'intégrale cherchée, est égale à $l\frac{n}{m}$

Soit en général une fonction $\int X\partial x$, que X contienne des constantes indéterminées n, m .... & qu'on cherche des valeurs de $\int X\partial x$, prises depuis $x = A$ jusqu'à $x = B$, la valeur de cette fonction sera égale à l'intégrale de

$$\left[\int\left(\frac{\partial X}{\partial m}\partial B\right) - \int\left(\frac{\partial X}{\partial m}\partial A\right)\right]\partial m + \left[\int\left(\frac{\partial X}{\partial n}\partial B\right) - \int\left(\frac{\partial X}{\partial n}\partial A\right)\right]\partial n \ldots$$

prise par rapport aux m, n... ainsi toutes les fois que les fonctions $\frac{\partial X}{\partial m}\partial x$, $\frac{\partial X}{\partial n}\partial x$, seront intégrales, la formule ci-dessus sera débarrassée de signes d'intégration, & l'on pourra chercher pour quelles valeurs de A & de B, elle devient intégrable.

Sur quoi nous observerons 1.° que comme il faut ajouter une arbitraire à cette intégrale, dans le cas où l'on n'auroit pas des moyens de la déterminer, ce ne seroit pas la valeur de $\int X\partial x$, prise depuis $x = A$ jusqu'à $x = B$, qu'on pourroit trouver par cette méthode, mais celle de $\int(X'\partial x - X\partial x)$;

X' étant ce que devient X, en y mettant au lieu de m, n... m', n'...

Par exemple, soit repris l'exemple ci-dessus, où $X = \frac{x^m}{xlx}$; nous avons $\int \frac{x^m}{lx} \frac{\partial x}{x} = lm + C$, il est clair que lorsque $m = 0$, la valeur de l'intégrale est $ll.1 - ll.0$; or elle est aussi $l0 + C$; donc à cause de $l1 = 0$, on a $C = -ll.0$, & $\int \frac{x^m}{lx} \frac{\partial x}{x} = lm - ll.0$; mais si on n'avoit pas connu la valeur de l'intégrale pour une particulière de m, C seroit resté inconnu, & la méthode n'auroit donné aucun résultat, au lieu que même, lorsqu'on ne peut connoître C, elle auroit toujours donné

$$\int\left[\left(\frac{x^{m'}}{xlx} - \frac{x^m}{xlx}\right)\right]\partial x = l\frac{m}{m'}.$$

2.° Que pour trouver, par cette méthode, la valeur de $\int X\partial x$, il faut que pour satisfaire à l'équation

$$\int\left[\left(\int \frac{\partial X}{\partial m} \partial x\right)\right]\partial m = \int X\partial x,$$

on ne soit pas obligé d'ajouter à la première intégrale, prise par rapport à m, une fonction de x; d'où il résulte qu'il y a encore une infinité de cas où la méthode ne pouvant être employée à trouver $\int X\partial x$, peut l'être à trouver $\int(X' - X)\partial x$.

3.° Que pour réduire l'intégration de $\int X\partial x$ à celle de $\int\left\{\left[\int\left(\frac{\partial X}{\partial m}\right)\partial x\right]\right\}\partial m$, il suffit de savoir intégrer $\int\left(\frac{\partial X}{\partial m}\right)\partial x$; mais par la même raison, l'intégration de $\int\left(\frac{\partial X}{\partial m}\right).\partial x$ dépendra de l'intégration de $\int\left(\frac{\partial^2 X}{\partial m^2}\right).\partial x$; en sorte qu'en général, pourvu qu'on puisse trouver $\int \frac{\partial^p X}{\partial m^p} \partial x$, on pourra

faire dépendre l'intégration de $\int X \partial x$, d'intégrales prises par rapport à m.

Démonstration du second Théorème.

Soit maintenant la fonction

$$(1 + z)^n = 1 + A' z + A'' z^2 + A''' z^3 \ldots$$

en sorte que le coëfficient de z^m soit A''^m, nous avons à prouver que

$$1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \ldots = \frac{2.6.10 \ldots\ldots 4n - 2}{1.2 \ldots\ldots n.};$$

mettons $n + 1$ à la place de n, & faisons

$$1 + A'^2 + A''^2 \ldots\ldots\ldots = Z,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Z + \Delta Z = 1 &+ A'^2 &&+ A''^2 \ldots\ldots\ldots \\ &+ 2A'\Delta A' &&+ 2A''\Delta A'' \\ &+ \Delta A'^2 &&+ \Delta A''^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{2.6.10 \ldots 4n + 2}{1.2 \ldots\ldots n + 1} = \frac{Z.4n + 2}{n + 1};$$

mais

$$\Delta A' = 1, \ \Delta A'' = A', \ \Delta A''' = A'' \ldots.$$

donc nous aurons

$$\begin{aligned} 1 &+ A'^2 + A''^2 + A'''^2 \ldots\ldots = \frac{Z.4n + 2}{n + 1} \\ &+ 2A' + 2A'A'' + 2A''A''' \\ &+ 1 \quad + A'^2 + A''^2, \end{aligned}$$

ou

$$2Z + 2 . (A' + A'A'' + A''A''' \ldots) = \frac{Z.4n + 2}{n + 1};$$

d'où

$$(n + 1) . (A' + A'A'' + A''A''' \ldots)$$
$$= n . (1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \ldots):$$

or nous avons

$$A' = n, \quad A'A'' = A'^2 . \frac{n-1}{2}, \; A''A''' = A''^2 . \frac{n-2}{3} \ldots$$

&

$$A' = \frac{A'^2}{n}, \; A'A'' = A'' . \frac{2}{n-1}, \; A''A''' = A'''^2 . \frac{3}{n-2} \ldots$$

Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle devient

$$\frac{n+1}{n} . \left\{ \begin{array}{l} a . n + \frac{1-a}{n} . A'^2 + \frac{2}{n-1} . (1 - a') A''^2 \\ \quad + \frac{3}{n-2} . (1 - a'') A'''^2 \ldots\ldots\ldots \\ \quad + \frac{n-1}{2} . a' A'^2 + \frac{n-2}{3} . a'' A''^2 \\ \quad + \frac{n-3}{4} . a''' A'''^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$= 1 + A'^2 + A''^2 + A'''^2 \ldots\ldots\ldots$$

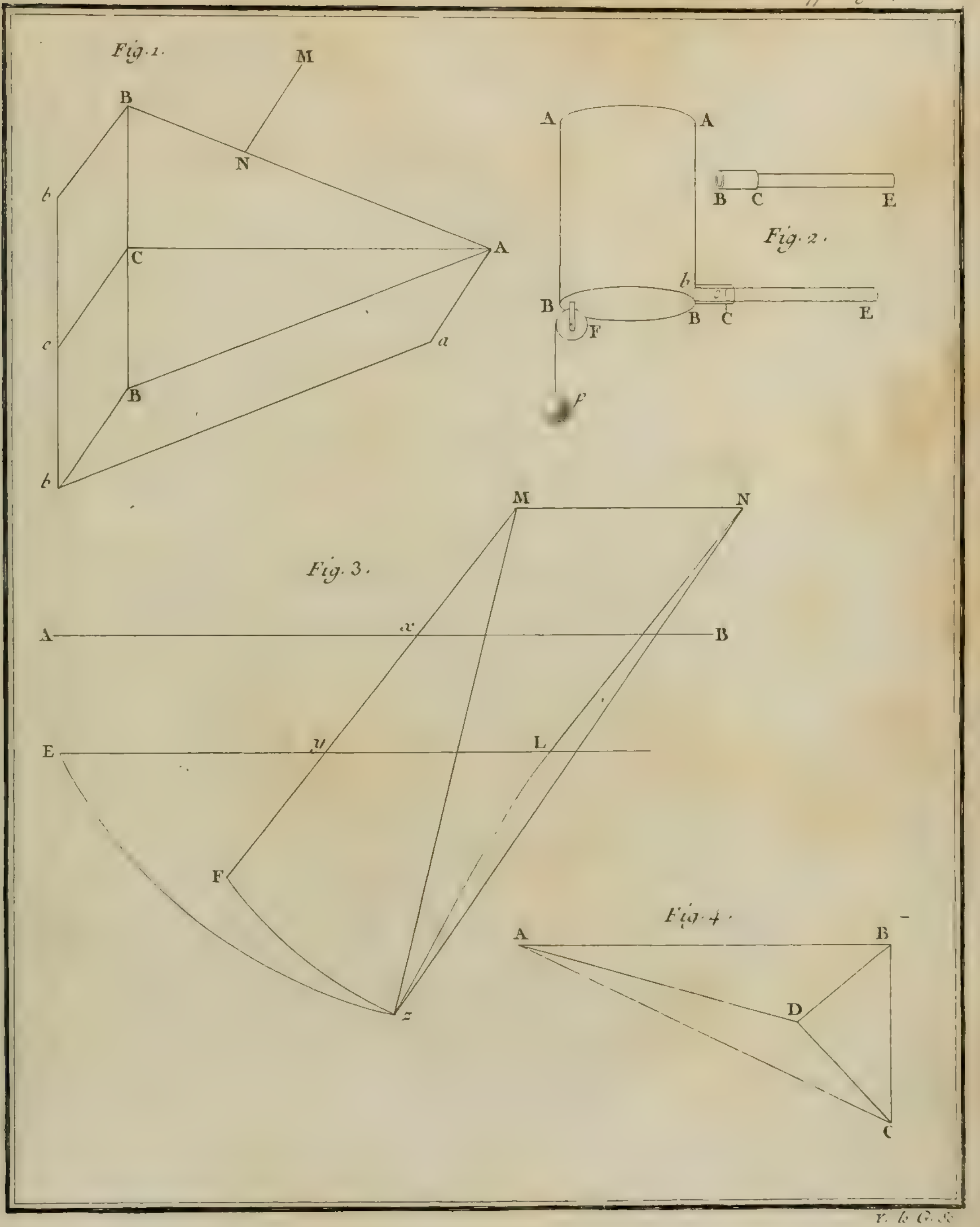
$a, a', a'', a''' \ldots$ étant des coëfficiens indéterminés; d'où comparant terme à terme, & faisant

$$a = \frac{1}{n+1}, \; a' = \frac{2}{n+1}, \; a'' = \frac{3}{n+1}, \; a''' = \frac{4}{n+1} \ldots$$

on concluera l'identité des deux formules.

Cette manière d'employer la méthode des coëfficiens indéterminés peut facilement s'étendre à différens Théorèmes du même genre.




Fig. 1.
M
B
N
b
C
A
c
a
B
b
A
A
B
C
E
Fig. 2.
b
B
B
C
E
F
f
Fig. 3.
M
N
A
x
B
E
y
L
F
z
Fig. 4.
A
B
D
C



MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

MÉMOIRE DE MINÉRALOGIE.

Par M. MONTET.

IL s'agit principalement dans ce Mémoire de faits minéralogiques, & le canton dont il eſt fait mention dans ce Mémoire, eſt en partie calcaire, & en partie brûlé anciennement par un volcan maintenant éteint : la partie calcaire avoiſine toujours la partie brûlée, & derrière celle-ci ſont des montagnes ſchiteuſes; c'eſt ce qui ſera démontré par les Obſervations ſuivantes. Préſenté en Mai 1781.

En allant de Ceyras à Clermont, en côtoyant la rivière de Lergue, on ne voit que rochers, qui, pour la plupart, ſont calcaires, & pluſieurs autres de la nature du grès, rochers qui ſe rencontrent dans bien d'autres pays, ainſi mélangés avec les rochers calcaires, mais qui n'y ſont, ſi on peut parler ainſi, qu'accidentellement formés: il en eſt de même des rochers de poudingues qu'on rencontre en montant par le chemin qui eſt à côté du château de Clermont, & qui conduit au grand chemin de Lodève; ce chemin, qui n'a guère qu'une demi-lieue de longueur, n'eſt qu'une roche

calcaire remplie de coquilles, & les autres rochers ſont des poudingues. Le territoire de Saint-Félix, qui eſt au-delà, ne renferme que des rochers calcaires, dont le plus grand nombre n'eſt qu'un amas de coquilles de différentes eſpèces: un endroit nommé la *Racaſſe,* & qui eſt du côté de Clermont, renferme des huîtres foſſiles très-bien conſervées, qui ont un pied de longueur, & dont les deux battans ſont parfaitement unis enſemble; elles ſont enſevelies dans du gravier ou dans du ſable, & quelquefois dans de la glaiſe; celles qui ſont dans le ſable ſe ſont mieux conſervées que les autres. Près de Saint-André, dans un terrein graveleux, ſe voient d'autres huîtres d'environ un demi-pied en longueur; elles ſont mélangées dans la mine de gravier à beaucoup de cailloux, auxquels elles adhèrent rarement, & la plupart avoient leurs deux valves; ces valves ſe détachent cependant aiſément par les coups de pics dont ſe ſervent les Ouvriers qui tirent du gravier de ces endroits, pour les travaux journaliers: ces grandes huîtres ſont aſſez unies, n'ont ni tubercules ni éminences, au lieu que celles qui ſe trouvent près du Peyrou, promenade de Montpellier, en ſont hériſſées, & reſſemblent beaucoup aux huîtres qu'on pêche dans la Méditerranée, & qu'on mange à Montpellier. Toutes ces grandes huîtres foſſiles ſont très-abondantes dans tous les endroits où l'on en rencontre, & principalement à l'une & l'autre rive de l'Érau, pendant cinq à ſept lieues de ſon cours, depuis ſon entrée dans la plaine de Gignac juſqu'à Pézenas & Agde, où elle forme le port de cette dernière ville; elles ſe trouvent dans toutes ſortes de terreins, & toujours dans la plaine ou dans des vallons peu élevés, qui ne ſont pas éloignés de la mer de plus de ſix lieues, & elles y ſont abondantes. On obſerve tous ces faits dans une étendue de pays de plus de vingt lieues en largeur. Je ferai remarquer que ces huîtres ne ſont pas de nos mers, on n'en trouve point du moins d'analogues dans la Méditerranée; il ſemble cependant qu'on peut rapporter à celle qu'on y pêche, une qui eſt foſſile, & qu'on trouve à Cournonterral, gros village à deux lieues & demie de Montpellier;

de Montpellier; elle ſe tire d'une mine de ſable exploitée près de Beaulieu, maiſon de campagne de M. Angelin, & qui touche le village de Cournonterral. En remontant la rivière de l'Érau juſqu'aux Sevennes, dans l'étendue de douze à quinze lieues, on rencontre encore des foſſiles, mais ils manquent dans les rochers qui dépendent des montagnes véritablement renfermées dans les Sevennes, qui ſont vis-à-vis de Montpellier, & dont les eaux viennent ſe rendre dans la Méditerranée.

Il eſt donc prouvé, par ces obſervations, qu'il y a une ſuite de montagnes qui renferment principalement des matières calcaires & des corps marins foſſiles: on va voir par les obſervations ſuivantes, que ces montagnes avoiſinent un canton qui a été brûlé, & qui eſt rempli de matières qui ont ſenti les effets d'un feu ſorti d'une montagne, qui n'eſt plus maintenant qu'un volcan éteint.

Ce volcan eſt à peu-près dans la même direction de ceux de Pézenas & d'Agde, c'eſt-à-dire du Levant au Couchant; il n'en eſt éloigné que d'environ quatre lieues. La montagne qui a été brûlée ſe nomme maintenant *montagne de la Borio;* elle a environ une pente de vingt degrés: cette montagne fait partie de cette chaîne de montagnes, qui a une bonne lieue d'étendue, & qui s'étend juſqu'au pont de Cartel, où paſſe la rivière de Lergue, qui fait preſque le tour de la montagne, dont le penchant eſt vers la plaine de Salagons. La lave ſe trouve dans l'eſpace d'une demi-lieue, ſur le penchant de cette montagne, où elle eſt en morceaux diſperſés çà & là, détachés les uns des autres, d'une groſſeur qui n'eſt pas conſidérable, d'un noir tirant ſur le gris, de différentes figures, ne laiſſant apercevoir extérieurement ni intérieurement, étant même briſée en petits morceaux, aucune eſpèce de matière criſtalline, conſéquemment point de ſchorl, ni de zeolithe; elle eſt un corps uniforme, homogène dans toutes ſes parties, on peut du moins l'aſſurer pour tous les morceaux qu'on a examinés: il y a de ces morceaux qu'on prendroit pour du mâchefer, à cauſe de leur figure & de leur conformation.

La montagne de la Borio penche d'un côté, comme on l'a dit plus haut, ſur la plaine de Salagons : cette plaine eſt immenſe; elle renferme pluſieurs côteaux, ſur leſquels ſont les uns ou les autres des villages de Liauſſon, Lous-Bally, Celles, Pradines & autres : cette plaine eſt arroſée par une petite rivière qui porte le même nom, & qui va ſe jeter dans la Lergue. Quelques terres de cette plaine, ſur-tout à ſa partie baſſe, ſont propres à la culture, mais en général ces terres ne paroiſſent pas devoir être d'une grande fertilité, vu la nature de ſon ſol; ce qui ſemble le prouver, c'eſt que ſes parties montueuſes ne produiſent que des genêts, du buis & quelques autres arbriſſeaux, encore ſont-ils d'une chétive venue.

Ce ſol eſt d'une terre rouge, qui, étant mouillée, prend une couleur plus intenſe, ce qui donne à cette plaine, lorſqu'il a plu, quelque choſe d'agréable; elle eſt dans le voiſinage & dans le lieu même du volcan, d'une couleur moins vive, & même tirant ſur le brun; en général, elle reſſemble beaucoup à la pouzzolane qui nous vient d'Italie, & il y a lieu de croire, qu'en faiſant des fouilles dans les parties où le volcan ayant fait ſes plus grands efforts, lors de l'éruption, l'a jetée ſur les deux penchans de la montagne , l'on en pourroit trouver d'auſſi bonne que celle que l'on tire de l'étranger.

Il ne faudroit pas confondre cette terre rouge, qui a tant de rapport à la pouzzolane, avec une qui ſe trouve auprès du pont de la Marguerite, autre petite rivière qui ſe jette dans la Lergue; cette terre rouge eſt éloignée du volcan d'une grande lieue de Languedoc, & ne tient point à la chaîne de la montagne volcanique, mais elle eſt dans la même direction, & en eſt ſéparée par la rivière de Lergue, dont elle eſt éloignée d'une demi-lieue. Quand on eſt donc arrivé au pont de la Marguerite, qui fait la démarcation entre deux terreins bien différens, on trouve ſur la partie droite, en venant de Lodève, un petit monticule qui s'étend aſſez loin, composé d'une terre rouge en maſſe qui ſe délite & s'émie aiſément, n'ayant que trois ou quatre lignes d'épaiſſeur dans ſes lits; elle

n'eſt dûe qu'à un ſchitte décompoſé; on entend par ſchitte décompoſé, celui qui a perdu ſa couleur primitive, & qui, en tombant en efflóreſcence à la manière des pyrites expoſées à l'air, ſi on peut s'exprimer ainſi, devient rouge par une cauſe quelconque, ou par l'action du feu, ou par l'acide dont il eſt imprégné, ou concurremment avec celui de l'air, que les Chimiſtes ont appelé *phoſphorique.*

Cette terre étant mouillée devient d'un rouge plus vif que celui qu'elle a lorſqu'elle eſt sèche; elle eſt dans ce dernier état d'un rouge obſcur, très-analogue à celui du bol d'Arménie, elle apte légèrement à la langue: employée à la décompoſition du nitre, elle a les mêmes propriétés que celles des terres bolaires, dont les Diſtillateurs ſe ſervent pour faire l'eau-forte; on retire autant d'acide nitreux qu'avec celle dont ils ſont en uſage de ſe ſervir; donc il eſt probable qu'on peut conclure que le grand nombre de ces terres rouges qu'on voit dans ce canton, ne ſont qu'un ſchitte décompoſé par l'acide vitriolique; & ce qui paroît le prouver, c'eſt que cet endroit, & toute la chaîne de montagnes où il ſe trouve placé, n'ont aucun indice de volcan, & que les rochers de ſchitte qui ſont les plus élevés ſur ces montagnes, ont leur forme primitive: ces terres traitées avec le flux noir & l'huile donnent quelques grains de fer, ce qui eſt contraire à ce que M. de Genſſane rapporte dans ſon Hiſtoire minéralogique du Languedoc, où il dit à l'article du diocèſe de Lodève, que ces terres qu'il appelle *terres rouſſâtres*, n'en donnent aucun indice.

Une terre ſemblable & les ſchittes, dont elle eſt une décompoſition, ne peuvent qu'être facilement pénétrés par l'eau des fortes pluies; auſſi cette terre s'éboule en partie dès qu'elle a été profondément humectée par l'eau de la pluie qui la diviſe en parties très-fines: les chemins qui en ſont couverts, dès que l'eau les a pénétrés, deviennent peu praticables; les roues des voitures s'y enfoncent, & on a peine à les en retirer; elle ſe détache auſſi difficilement des roues, elle s'y attache fortement. L'eau de la Lergue, dans les temps d'inon-

dations, en eſt rouge, elle y eſt apportée par les eaux des torrens & des petites rivières qui s'y jettent, & au moyen de la Lergue, elle colore l'Érau qui la reçoit au-deſſous de Brignac & au-deſſus de Canet; c'eſt ce qui n'arrive point lorſque l'Érau déborde, gonflé par les eaux qui viennent des Sevennes, où l'Érau prend ſa ſource, à la montagne de l'Algonal, n'y ayant point de terre ſemblable dans ce canton des Sevennes : cette différence dans la couleur de cette rivière ne laiſſe aucun doute aux habitans de Pézenas, voiſins de l'Érau, d'où l'inondation de cette rivière peut venir lorſqu'elle ſe déborde.

Non-ſeulement, cette terre rouge eſt emportée par la rivière de Lergue, mais elle roule encore des pierres de volcan qui y ſont également portées dans le temps des grandes pluies; ce ſont ces pierres que l'on trouve dans les environs de Ceyras, que cette rivière laiſſe ſur ſes bords, & dont les habitans de cet endroit bâtiſſent les murs qui bordent le chemin, ou qui ſont la clôture des terres: on voit parmi ces laves des morceaux de baſalte priſmatique, dont les angles ſe ſont encore apercevoir, quoiqu'ils aient été roulés par les eaux de cette rivière, qui en a ſeulement émouſſé quelques angles. Ce baſalte reſſemble aſſez par ſa figure à celui qui eſt à Montferrier, où l'on trouve même au milieu du village un grouppe de pluſieurs colonnes de baſalte à pluſieurs faces: dans le grand nombre de laves de ce pays, qu'on peut avoir examinées, celle de Montferrier ſeulement eſt attirable à l'aimant: le fer s'y trouve avec tous ſes principes conſtituans; celle de la plaine de Salagons étant pulvériſée, n'eſt point attirée par l'aimant; elle ne fait aucune efferveſcence avec les trois acides primitifs, & ne ſe vitrifie que difficilement ſans addition.

Les endroits, dont on a parlé juſqu'à préſent, qui donnent des indices de volcan, ne ſont pas les ſeuls de ce canton qui ſont voir de ces indices : on en voit qui ne ſont pas équivoques dans les environs du village de la Coſte, ſitué au-delà de la rivière de Lergue, en allant à Clermont, & qui eſt preſque à

l'extrémité d'une petite montagne ſituée à un quart de lieue de Clermont. Les murailles des maiſons & celles des terres qui ſont en amphithéâtre, ſont bâties en laves: il y a de ces laves qui ſont poreuſes, perſillées ſur toutes leurs ſurfaces, & fort légères: la terre des environs eſt brune, elle eſt rouge & ſemblable à celle dont on a parlé plus haut, avant d'arriver au pont du Cartel, où l'on paſſe la rivière de Lergue; & cette terre ſe voit dans une lieue d'étendue. On trouve encore depuis ce pont juſqu'à Lodève de ce ſchitte décompoſé & ſemblable à celui qui touche le pont de la Marguerite; il eſt ſeulement en moindre quantité; il paroît ſeulement moins rouge que celui de la plaine de Salagons: on ne remarque dans tout ce trajet aucun veſtige de volcan.

Ces cantons brûlés ou qui donnent des indices de volcans éteints, ſont, comme on l'a dit au commencement de ce Mémoire, placés entre des montagnes calcaires & d'autres montagnes qui ne ſont compoſées que de ſchitte. Il nous reſte à faire voir quelles ſont ces dernières ſortes de montagnes. Le ſol où coule la rivière de Lergue n'eſt ordinairement que de ſchitte très-dur; & ce qui eſt à remarquer dans ce terrein ſchitteux du diocèſe de Lodève, c'eſt qu'il eſt uniforme & entièrement homogène. Les chaînes des montagnes ne ſont point mélangées par d'autre eſpèce de rochers, comme dans les Sevennes, où les ſchittes ſont ſouvent interrompues ou précédées par des granites, & où l'on peut dire que le terrein ſchitteux & graniteux marchent enſemble: c'eſt tout le contraire à Lodève & aux environs, où l'on ne voit que du ſchitte ſans aucune eſpèce de granites. Aux approches de Lodève, on trouve à droite & à gauche du chemin des montagnes dont les rochers ſont preſque perpendiculaires à l'horizon, ſur-tout ceux de la partie droite & qui eſt tournée vers Montpellier: toutes ces montagnes ſont en amphithéâtre & très-bien cultivées; les terres y ſont ſoutenues par de grands circuits de murailles; les terraſſes en amphithéâtre ne ſont pas d'une grande largeur; elles n'ont pas ſouvent deux toiſes dans cette dimenſion; elles ſont plantées de vignes & d'oliviers juſqu'au

ſommet des montagnes ; quelques-unes de celles qui ſont expoſées au nord ont des châtaigniers ; toutes ces montagnes ne ſont compoſées que d'ardoiſes, qui eſt une eſpèce de ſchitte ; on en exploite pluſieurs carrières ; on en tire de grandes tables : cette ardoiſe ſe délite par couches minces ; & en général elle eſt d'un grain plus fin & plus uni que celle des Sevennes, mais plus gris ; la plupart des maiſons de Lodève en ſont couvertes. Lodève eſt ſitué entre ces montagnes, qui y forment une gorge ; la rivière de Lergue la traverſe ; cette rivière prend ſa ſource à quatre lieues plus haut que Lodève ; les montagnes ſont ſi reſſerrées les unes contre les autres & ſi élevées, qu'il y a preſque toujours des nuages à leur ſommet, qui ſe réſolvent ſi ſouvent en pluie, qu'on dit proverbialement qu'il y pleut toujours.

Un des avantages que la connoiſſance de la Minéralogie peut procurer & qu'elle procure en effet, eſt la connoiſſance de la bonté des terreins : c'eſt ce qui a engagé à rapporter dans le cours de ce Mémoire quelques remarques qu'on avoit faites à ce ſujet ; je le finirai par deux autres qui peuvent être d'une utilité prochaine à pluſieurs cantons de la France. On dira donc qu'au village de Saint-Jean de la Blaquière, qui n'eſt éloigné de Lodève que de deux lieues, & près de la petite rivière de la Marguerite, on cultive une ſorte de roſier communément appelé *roſier de Provins ;* & ce qui peut être encore plus utile de ſavoir, l'eſpèce de genêt appelé par Linné, *ſparte* à branches flexibles comme le jonc, *ſpartum junceum.* Le terrein où l'on cultive cette dernière plante eſt des plus mauvais & des plus arides des environs de ce village : on prépare la terre par quelques labours ; on y sème enſuite la graine de ce genêt comme l'on sème le blé ; on le laiſſe enſuite trois années ſans le couper. A cette époque, on le coupe au mois d'Août, & on en fait des fagots de cinq à dix livres, qu'on laiſſe ſécher : quand ils ſont ſecs, on les bat avec une maſſe ou un billot de bois ſur le pavé, & on les porte tout de ſuite à la rivière pour les y faire tremper, en les aſſujettiſſant au moyen de pierres qu'on met

deſſus ; on les y laiſſe pendant neuf jours ; on les en retire enſuite, ce temps ſuffiſant pour les rouir au degré néceſſaire ; on les met ſécher à l'air : ſont-ils ſecs, on les peigne avec des peignes de fer pour en ſéparer le tiſſu filamenteux de la partie parenchymateuſe ; on repeigne enſuite les filamens pour dégager la partie la plus fine de ces filamens de celle qui eſt groſſière ; on en fait des paquets qu'on donne à filer : ce fil ſert à faire des toiles propres à être employées en draps, ſerviettes & autres uſtenſiles de cette nature ; la plus groſſe toile eſt employée en draps pour les uſages de la campagne ; celle qui eſt la plus fine ſert à faire des ſerviettes & des jupes, qui ſont d'un bon uſer & très-belles : lorſqu'elles ſont blanchies ſeulement par les leſſives, il y en a qui paroiſſent égaler en blancheur & en fineſſe celles qui ſont faites avec le beau chanvre.

Une autre utilité de ce genêt, c'eſt que la repouſſe qui vient après la coupe que l'on en fait au mois d'Août, eſt donnée à manger aux troupeaux pendant l'hiver, autre avantage, qui n'eſt pas ſans mériter quelqu'attention dans l'économie rurale ; & en général la culture de cet arbriſſeau en mérite d'autant plus une, qu'il dure long-temps, & qu'il n'a beſoin que de quelques légers labours ; ce qui devroit faire étendre cette culture plus qu'elle ne l'eſt même en Languedoc. Il paroît qu'elle n'y eſt ſuivie que dans le voiſinage de la Blaquière & dans quelques hameaux des environs. On devroit d'autant plus s'y adonner dans le diocèſe de Lodève, que les mauvais terreins y ſont très-communs, celui ſur-tout de la terre rouge de la plaine de Salagons, dont on a parlé. Puiſſent ces réflexions ouvrir les yeux des habitans du diocèſe de Lodève & des autres endroits de la France, qui demeurent dans des pays dont le ſol eſt ſemblable à celui où le genêt eſt cultivé, & les engager à ſe donner à cette culture, qui ne peut que leur être très-avantageuſe & très-utile !



FIN.

